Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2005

Práctica 5

Topologías débiles

1. Sea (X,τ) un espacio topológico. Una base $\mathcal{B}$ para la topología τ es una familia de elementos de τ tal que cualquier elemento de τ se puede escribir como unión de elementos de $\mathcal{B}$.

   a) Dada una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ que cumple las siguientes propiedades:

      i) Cada punto de X está en algún elemento de $\mathcal{B}$

      ii) Si $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

      Probar que $\mathcal{B}$ es base de una única topología en X.

   b) Sea E un espacio de Banach. Sean $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in E'$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\mathcal{B}$ la familia de los conjuntos de la forma

   $$U(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, x_1, x_2, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{x \in E : |\gamma_i(x) - \gamma_i(x_i)| < \varepsilon\}$$

   Probar que estos conjuntos son una base para topología débil w de E.

   c) Encontrar una base de la topología débil* en E'.

2. a) Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ una familia tal que cubre a X. Probar que las intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{S}$ resultan una base de la menor topología que contiene a $\mathcal{S}$. Se dice que $\mathcal{S}$ es una sub-base de dicha topología.

   b) Sea E un espacio de Banach. Sea $x \in E$, $\gamma \in E'$ y $\varepsilon > 0$. Sea $\mathcal{S}$ la familia de los conjuntos de la forma

   $$V(\gamma, x, \varepsilon) = \big\{y \in E : |\gamma(y) - \gamma_(x)| < \varepsilon\big\}$$

   Probar que es una sub-base de la topología débil w de E.

   c) Encontrar una sub-base de la topología débil* en E'.

3. Sean (X, τ_X) e (Y, τ_Y) espacios topológicos y $f : X \to Y$ una función. Decimos que f es continua en un punto $x \in X$ si dado un abierto $V \in \tau_Y$ tal que $y = f(x) \in V$ existe un abierto $U \in \tau_X$ tal que $x \in U$ y $f(U) \subset V$. Se dice que f es continua si es continua en todos los puntos de X.

   a) Probar que f es continua en un punto $x \in X$ si y sólo si para toda red $(x_i)_{i\in I}$ en X tal que $x_i \to x$ se tiene que $f(x_i) \to f(x)$.

   b) Probar que f es continua si y sólo si $f^{-1}(V) \in \tau_X$ para todo $V \in \tau_Y$.

4. a) Sea X un conjunto e $(Y_i, \tau_{Y_i})_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos. Sea $\mathcal{F} = (f_i)_{i\in I} : X \to (Y_i, \tau_{Y_i})$ una familia de funciones. Probar que existe una menor topología τ en X que hace a todas las funciones $(f_i)_{i\in I}$ continuas. $\tau_{\mathcal{F}}$ se llama la topología inicial respecto de la familia (f_i).

   b) Probar que la topología inicial $\tau_{\mathcal{F}}$ está caracterizada por la siguiente propiedad universal: Todas las $(f_i)_{i\in I}$ son continuas y si (Z, τ_Z) es otro espacio topológico y $g : (Z, \tau_Z) \to (X, \tau_{\mathcal{F}})$ es una función, entonces g es continua si y sólo si $f_i \circ g$ es continua para todo $i \in I$.

c) Sea E un espacio de Banach. Probar que la topología débil en E es la inicial respecto a la familia de todas las funcionales lineales continuas sobre E.

5. Sea $(X_i)_{i\in I}$ una familia de espacios topológicos y sea

$$X = \prod_{i\in I} = \{x = (x_i)_{i\in I} : x_i \in X_i\}$$

el producto cartesiano. Sean $\pi_i : X \to X_i$ las proyecciones $\pi_i(x) = x_i$. La topología producto en X es la topología inicial respecto a las proyecciones.

   a) Probar que la topología de la convergencia puntual en $\mathbb{R}^{[0,1]}$ coincide con la topología producto (pensando $I = [0,1]$ y $X_i = \mathbb{R}$: una red (f_α) converge a f si y sólo si converge en la topología producto.

   b) Probar que los conjuntos de la forma

   $$\{x \in X : x_i \in U\}$$

   donde U es abierto en X_i para algún $i \in I$ forman una sub-base de la topología producto en X. Indicar cuál es la base correspondiente.

   c) Sea E un espacio de Banach. Probar que la topología débil en E coinicde con la topología de subespacio del producto $\mathbb{K}^{E'}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$) (pensando a puntos de E como funciones sobre E').

6. Sea E un espacio de Banach, sean $x_n, x \in E$ tales que $x_n \xrightarrow{w} x$. Probar que $\|x_n\|$ está acotada y que $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

   (Sug: usar Principio de Acotación uniforme y la inclusión canónica en el bidual)

7. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\varphi_n \to \varphi$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

8. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$.

   a) Si $x_n \to x$ entonces $x_n \xrightarrow{w} x$.

   b) Si $\dim E < \infty$, $x_n \to x \Leftrightarrow x_n \xrightarrow{w} x$.

9. *a*) Sea E un espacio de Banach, $\varphi : E \to \mathbb{C}$ lineal. φ es continua si y sólo si φ es continua de (E, w) en $\mathbb{C}$.

   b) Sean E y F espacios de Banach, $T : E \to F$ lineal. T es continua si y sólo si T es continua de (E, w) en (F, w).

10. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$. Si $x_n \xrightarrow{w} x$ entonces existe una sucesión de combinaciones convexas de $\{x_n\}$ que tiende fuertemente a x.

11. Sean E un espacio de Banach, $x_n \in E$. $\{x_n\}_n$ converge en E si y sólo si $\{x_n\}_n$ converge débil y uniformemente en $\{\varphi \in E' : \|\varphi\| \leq 1\}$.

12. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita, sea $S = \{x \in E : \|x\| < 1\}$. En (E, w), S tiene interior vacío.

13. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$, tales que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$. Probar que $\|\varphi_n\|$ está acotada y que $\|\varphi\| \leq \liminf \|\varphi_n\|$.

14. Sean E un espacio de Banach, $x_n, x \in E$, $\varphi_n, \varphi \in E'$. Si $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ y $x_n \to x$ entonces $\varphi_n(x_n) \to \varphi(x)$.

15. Sean E un espacio de Banach, $\varphi_n, \varphi \in E'$.

    a) $\varphi_n \to \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \Rightarrow \varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

    b) Si $\dim E < \infty$, las tres convergencias son equivalentes.

16. Definamos $\varphi_n : E \to \mathbb{C}$ por $\varphi_n(x_1, x_2, \ldots) = x_n$.

    a) Si $E = \ell^2$ probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$. ¿$\varphi_n \to 0$?

    b) Si $E = \ell^\infty$ probar que $\varphi_n \in B_{E'}, \forall n \in \mathbb{N}$ pero que $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión w^*-convergente. ¿Contradice esto el hecho de que $(B_{E'}, w^*)$ es compacta?

17. Sean $\varphi_n : C([-1,1]) \to \mathbb{C}$ definidas por

$$\varphi_n(f) = f\left(\frac{-1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right)$$

    Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

18. Si $1 \leq p < \infty$, en ℓ^p, sea e^n dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$. Probar que:

    a) Si $1 < p < \infty$, $e^n \xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\to 0$

    b) Si $p = 1$, $e^n \xrightarrow{w^*} 0$, $e^n \not\xrightarrow{w} 0$, $e^n \not\to 0$

19. Sean $1 < p < \infty$, $x^n, x \in \ell^p$. Entonces

$$x^n \xrightarrow{w} x \iff \sup \|x^n\|_p < \infty \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \quad \forall k$$

20. a) Si $1 < p < \infty$, $\varphi_n, \varphi \in L^p[0,1]$. Entonces

$$\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi \iff \sup \|\varphi_n\|_p < \infty \ \wedge \ \int_0^a \varphi_n(t)\, dt \to \int_0^a \varphi(t)\, dt \quad \forall a \in [0,1]$$

    b) Si $\varphi_n(t) = \sin(n\pi t) \in L^2[0,1]$, probar que $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$ pero $\varphi_n \not\to 0$.

21. Sean $\varphi_n, \varphi \in L^\infty[0,1]$, $M_{\varphi_n}, M_\varphi \in \mathcal{L}(L^2[0,1])$ los operadores de multiplicación. Probar que

$$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi \iff M_{\varphi_n}(f) \xrightarrow{w} M_\varphi(f) \quad \forall f \in L^2[0,1]$$

22. $C[0,1]$ es cerrado en $L^\infty[0,1]$ en $\| \ \|_\infty$ pero no en la topología w^*.

23. Sea, para cada $n \in\mathbb{N}$, $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi_n(x) = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$

    a) Probar que, $\forall n \in\mathbb{N}$, $\varphi_n \in c_0'$ y calcular su norma.

    b) Probar que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ y que $\varphi_n \not\xrightarrow{w} 0$.

c) $c_0 \supset {}^\circ\langle\{\varphi_1\}\rangle \supset {}^\circ\langle\{\varphi_1,\varphi_2\}\rangle \supset \ldots \supset {}^\circ\langle\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}\rangle \supset \ldots$, y son todos isométricamente isomorfos entre sí. ¿ Ocurre lo mismo con ${}^\circ\langle\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}\rangle$?

24. a) Si E es un espacio vectorial, $f_1,\ldots,f_n, f : E \to\mathbb{C}$ son transformaciones lineales tales que $\cap_{i=1}^{n}\ker(f_i) \subset \ker(f)$, entonces $f \in \langle\{f_i\}_i\rangle$

    b) Si E es un espacio de Banach, $f : E' \to \mathbb{C}$ es lineal y w^*-continua, entonces existen $c > 0$, $x_1,\ldots,x_n \in E$ tales que

$$|f(\varphi)| \leq c \max_{1\leq i\leq n} |\varphi(x_i)| \qquad \forall\varphi \in E'$$

    c) Si E es un espacio de Banach, $f : E' \to \mathbb{C}$ es lineal y w^*-continua, entonces existe $x \in E$ tal que $f(\varphi) = \varphi(x) \quad \forall\varphi \in E'$

25. Sean E un espacio de Banach, $J : E \to E''$ la inclusión canónica.

    a) $J(B_E)$ es fuertemente cerrado, donde B_E es la bola unidad cerrada de E.

    b) Dar un ejemplo en el que J no sea suryectiva.

26. Sean E y F espacios de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E,F)$. Si para cada $x \in E$ y para cada $\varphi \in F'$ la sucesión $\{\varphi(A_n x)\}$ está acotada, entonces $\{\|A_n\|\}$ está acotada.

27. Sean E un espacio de Banach reflexivo, $\varphi \in E'$.

    a) (i) Probar que $\exists x \in E, x \neq 0 \;/ \varphi(x) = \|\varphi\|\;\|x\|$

    b) (ii) Si M es un subespacio cerrado propio de E', $\exists x \in {}^\circ M$, $\|x\| = 1 \;/\; \varphi(x) = d(\varphi, M)$

28. a) Sea E un espacio de Banach tal que E' es separable, entonces E es separable. (Sug: Si $\{\varphi_n\}$ es denso numerable en $\{\varphi \in E'/\|\varphi\| = 1\}$, tomar $\{x_n\} \in E$, $\|x_n\| = 1$ tal que $|\varphi_n(x_n)| \geq \frac{3}{4}$ y ver que $\langle\{x_n\}\rangle$ es denso en E)

    b) Dar un ejemplo de E separable tal que E' no sea separable.

29. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado. Probar que E es separable si y sólo si S y E/S lo son.

30. Si E es un espacio de Banach separable y $\{\varphi_n\}$ es una sucesión acotada en E' entonces existe una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_k$ w^*-convergente.

    (Sug: Si $\{x_k\}$ es denso en E, $\{\varphi_n(x_1)\}_n$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_1}(x_1)\}_{n_1}$, también, $\{\varphi_{n_1}(x_2)\}_{n_1}$ tiene subsucesión convergente $\{\varphi_{n_2}(x_2)\}_{n_2}$, seguir inductivamente y ver que $\{\varphi_{n_n}\}_n$ es w^*-convergente)

31. Sea E un espacio de Banach reflexivo.

    a) Si $\{x_n\}_n$ está acotada en E, entonces tiene una subsucesión $w-$convergente. (Sug: tomar S el subespacio cerrado generado por $\{x_n\}_n$, ver que S' es separable, usar ejercicio anterior e inclusión canónica en el bidual)

    b) Si $\{\varphi_n\}_n$ está acotada en E', entonces tiene una subsucesión w^*-convergente.

32. Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita separable o reflexivo, existe $\{\varphi_n\} \in E'$, $\|\varphi_n\| = 1$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$.

33. Sea E un espacio de Banach separable, y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un conjunto numerable denso en B_E. Probar que la topología débil* en $B_{E'}$ puede darse mediante la métrica

$$d(x',y') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x'(x_n) - y'(x_n)|}{2^n}$$

34. Sea $H_0^1[0,1] = \{u \in H^1[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$ (siendo H^1 el espacio de Sobolev introducido en la práctica 2) y $(u_n)_{n\mathbb{N}} \subset H^1[0,1]$. Probar que si $u_n \xrightarrow{w} u$, entonces existe una subsucesión u_{n_k} tal que $u_{n_k} \to u$ en $C[0,1]$ (Esto dice que la inclusión $i : H_0^1[0,1] \to C[0,1]$ es un operador compacto)

    Sugerencia: probar primero la siguiente desigualdad. Si $u \in H^1(a,b)$ y $x, y \in (a,b)$ entonces:
$$|u(x) - u(y)| \leq |x-y|^{1/2} \left(\int_x^y |u'(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

35. Consideramos la funcional no lineal $J : H_0^1[0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (u'(x))^2 dx - \int_0^1 f(x)u(x)dx$$

    donde $f \in L^2[0,1]$.

    a) Probar que J es débilmente secuencialmente semicontinua inferiormente. (o sea: secuencialmente semicontinua inferiormente en la topología débil de H_0^1), es decir que si (u_n) es una sucesión $H_0^1[0,1]$ tal que $u_n \xrightarrow{w} u$, $J(u) \leq \liminf J(u_n)$

    b) Probar que $J(u) \to +\infty$ si $\|u\|_{H^1} \to +\infty$.

    c) Ver que J es acotada inferiormente. Concluir que J tiene un mínimo.

    d) Probar que la u_0 que realiza el mínimo es solución débil de $-u'' = f$, con las condiciones de frontera $u(0) = u(1) = 0$.

    (Sugerencia: si u_0 es un punto donde J alcanza el mínimo, la función de la variable real $g(t) = J(u_0 + t\varphi)$ tiene un mínimmo en $t = 0$. Calcular $g'(0)$.)

    e) Si $f \in C^2[0,1]$, u_0 resuelve $-u'' = f$ en sentido clásico.