Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2012. Práctica 4

OPERADORES ACOTADOS- ADJUNTO

PRINCIPIO DE ACOTACIÓN UNIFORME, TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA, TEOREMA DEL GRÁFICO CERRADO

1. Si $T, S, T^{-1}, S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, entonces $(TS)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ y $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.

2. Sea X un espacio de Banach y sea $A \in \mathcal{L}(X)$, $\|A\| < 1$. Probar que $(I + A)$ es inversible, $(I + A)^{-1} \in (X)$ y que su inversa viene dada por
$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n,$$
donde la serie es absolutamente convergente en $\mathcal{L}(X)$. Probar tambien que
$$\|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

3. Sea X un espacio de Banach y sea T, $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Probar que si $S \in \mathcal{L}(X)$ y $\|S - T\| < 1/\|T^{-1}\|$, entonces S es inversible, $S^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, y
$$\|S^{-1} - T^{-1}\| < \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|S - T\|\|T^{-1}\|}.$$

4. Sean E y F espacios de Banach y sean $x_n, x \in E$, $A_n, A \in \mathcal{L}(E, F)$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Si $x_n \to x$ y $A_n \to A$ entonces $A_n x_n \to Ax$

5. Sea E un espacio de Banach, sean $A_n, A, B_n, B \in \mathcal{L}(E)$.

   (i) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$

   (ii) Si $A_n \to A$ y $B_n \to B$ entonces $A_n B_n \to AB$

6. Sea E un espacio de Banach, sea $P : E \to E$ lineal tal que $P^2 = P$, sean $S = \ker(P)$, $T = R(P)$. Probar que $P \in \mathcal{L}(E)$ si y sólo si S y T son cerrados.

7. Sean E un espacio de Banach, $A_n \in \mathcal{L}(E)$ inversibles, $A \in \mathcal{L}(E)$ no inversible tales que $A_n \to A$, entonces $\|A_n^{-1}\| \to \infty$.

8. Sean E un espacio vectorial normado, $S \subset E$ un subespacio de dimensión finita, entonces $\exists\, Q \in \mathcal{L}(E) /\ Q^2 = Q$, $R(Q) = S$.

9. Sea E el espacio de Banach real $L^1((1, +\infty))$, sea $T : E \to E$ dado por $Tf(t) = \frac{1}{t} f(t)$. Probar que T es acotado pero no abierto.

   (Sug: $0 \in T(B(0, 1))$ no es punto interior)

10. (i) Si $1 \leq p < \infty$, S y T son los shifts, calcular S^* y T^*.

    (ii) Si $J : \ell^2 \to c_0$, $J(x) = x$, probar que $J \in \mathcal{L}(\ell^2, c_0)$ y calcular J^*.

11. **Operadores de Multiplicación:**

    Para $X = C[0, 1]$ ó $L_p[0, 1]$ y $\varphi \in X$, sea $M_\varphi : X \to X$ definida por
$$M_\varphi(f) = \varphi f$$
    Caracterizar M_φ^* (Tener en cuenta las caracterizaciones del dual de $C([0, 1])$ y L^p)

12. Sea E un espacio vectorial normado, sean $A, B \in \mathcal{L}(E)$ entonces $(AB)^* = B^*A^*$.

13. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

    a) $\|A\| = \|A^*\|$
    b) Si A es inversible entonces A^* es inversible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
    c) La aplicación $\Phi : \mathcal{L}(E, F) \to \mathcal{L}(F^*, E^*)$ dada por $\Phi(A) = A^*$ es continua.

14. Sean $\Omega \subset \tilde{\Omega}$ dos conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$. Se definen los operadores

$$\rho : L^p(\tilde{\Omega}) \to L^p(\Omega), \qquad e : L^p(\Omega) \to L^p(\tilde{\Omega}),$$

    dados por $\rho(u) = u\,|_\Omega$ y $e(u)(t) = u(t)$ si $t \in \Omega$ y 0 en otro caso. Probar que ρ y e son acotados, calcular sus normas y calcular ρ^*, e^*.

15. Sean E un espacio de Banach, F un subespacio de E, S un subespacio de E^*. Probar que:

    a) $F^\perp = \{\gamma \in E^* : \gamma(x) = 0\ \forall\, x \in F\}$ es un subespacio cerrado de E^*.
    b) ${}^\perp S = \{x \in E : \gamma(x) = 0\ \forall\, \gamma \in S\}$ es un subespacio cerrado de E.
    c) ${}^\perp(F^\perp) = \overline{F}$
    d) $({}^\perp S)^\perp \supset \overline{S}$

16. Sean E, F espacios de Banach, $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Probar que:

    a) $R(A)^\perp = \ker(A^*)$
    b) ${}^\perp R(A^*) = \ker(A)$
    c) $\overline{R(A)} = {}^\perp \ker(A^*)$
    d) $R(A^*) \subseteq (\ker(A))^\perp$

17. Sean E, F espacios vectoriales normados, $T \in \mathcal{L}(E, F)$, $x \in E$, entonces

$$\operatorname{dist}(x, \ker(T)) = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in (\ker(T))^\perp,\ \|\varphi\| \leq 1\}$$

18. Sean E un espacio de Banach, $F \subset E$ un subespacio y $\Phi : E^* \to F^*$ dada por $\Phi(\varphi) = \varphi|_F$. Probar que $\Phi \in \mathcal{L}(E^*, F^*)$, Φ es suryectiva y calcular $\ker(\Phi)$.

19. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ entonces $\widehat{T} : E/\ker(T) \to F$, dado por $\widehat{T}([x]) = T(x)$, es lineal, continuo y $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.

20. Si E y F son espacios de Banach, $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con $R(T)$ cerrado, entonces $R(T^*)$ es cerrado y

$$R(T^*) = (\ker(T))^\perp$$

21. Sean E un espacio de Banach, $S \subset E$ un subespacio cerrado. Entonces se dan los siguientes isomorfismos isométricos:

$$(E/S)^* \cong S^\perp$$
$$E^*/S^\perp \cong S^*$$

    Definición: Sea E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$ se dice acotado inferiormente si y sólo si $\exists c > 0 /\ \|Tx\| \geq c\,\|x\|\ \ \forall x \in E$.

22. Sean E un espacio de Banach, $T \in \mathcal{L}(E)$. Probar que:

    a) Si T es acotado inferiormente entonces $R(T)$ es cerrado.

    b) T acotado inferiormente y suryectivo si y sólo si T inversible.

23. Sea $V : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ el operador de Volterra, dado por

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

    a) Probar que V no es acotado inferiormente.

    b) Caracterizar V^*.

Definición: Sea E, F dos espacios de Banach, $T_n, T \in \mathcal{L}(E, F)$. Decimos que T_n converge fuertemente a T si para cualquier $x \in E$ se tiene que $T_n(x) \to T(x)$.

24. Si T_n tiende fuertemente a T y x_n tiende a x entonces $T_n(x_n) \to T(x)$.

25. Si T_n tiende a T fuertemente y S_n tiende a S fuertemente, entonces T_nS_n tiende a TS fuertemente.

26. Sean E, F dos espacios de Banach. Sean $A_n \in \mathcal{L}(E, F)$ tales que $A_n(x)$ es de Cauchy para todo $x \in E$. Probar que existe un $A \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $A_n \to A$ fuertemente.

27. En el espacio ℓ^2 se definen las siguientes sucesiones operadores

$$A_n x = (x_1/n, \ldots, x_k/n, \ldots)$$

$$B_n x = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$$

Decidir en cada caso si la sucesión tiende a cero en norma o fuertemente.

28. Sea X un espacio de Banach con cualquiera de las dos normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Si $\|x_n\|_1 \to 0$ implica que $\|x_n\|_2 \to 0$, entonces las normas son equivalentes.

Definición: Sea E, F dos espacios de Banach, $T : D(T) \subset E \to F$ un operador lineal no acotado (donde $D(T)$ denota el dominio de T). Decimos que T es cerrado si $x_n \in D(T)$, $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$, implican que $x \in D(T)$ y $T(x) = y$.

29. *a*) T es cerrado si y sólo si $G(T) = \{(x, T(x)) : x \in D(T)\}$ es cerrado en $E \times F$.

    b) T es cerrado si y sólo si $D(T)$ resulta un espacio de Banach con la norma $\|x\|_T = \|x\|_E + \|Tx\|_F$.

    c) Si T es cerrado y $D(T)$ es cerrado, entonces $T \in \mathcal{L}(D(T), F)$.

    d) Probar que el operador $T : D(T) = C^1[0,1] \subset C[0,1] \to C[0,1]$ dado por $T(x) = x'$ es cerrado.