

Análisis Funcional - 1° cuatrimestre 2012

PRÁCTICA 3

FUNCIONALES LINEALES - TEOREMA DE HAHN-BANACH

- Sean E un espacio de Banach, $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$, $y \in E$, $y \notin \ker \varphi$. Probar que:
 - $E = \ker \varphi \oplus \langle y \rangle$, donde $\langle y \rangle$ significa el subespacio generado por y .
 - $d(y, \ker \varphi) = \frac{|\varphi(y)|}{\|\varphi\|}$
 - Si $H = \{x \in E : \varphi(x) = c\}$ entonces $d(0, H) = \frac{|c|}{\|\varphi\|}$.
- Demostrar que en un espacio vectorial normado de dimensión finita toda funcional lineal es continua.
 - Sea $L_0(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $\exists [a, b] \subset \mathbb{R}$ con $f(t) = 0 \forall t \notin [a, b]$. Demostrar que $(L_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio vectorial normado. Además, si definimos $\varphi : L_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(f) = \int f(t) dt$ probar que φ resulta una funcional lineal no acotada.
- Sea en c_0 la familia $\{e^n\}_{n \geq 1}$ de sucesiones definidas por $e_i^n = \delta_{ni}$ y sea x^0 la sucesión dada por $x_i^0 = \frac{1}{i}$
 - Verificar que $A = \{x^0, e^1, e^2, \dots, e^n, \dots\}$ es un conjunto l.i. de c_0
 - Sea B una base algebraica de c_0 que contenga a A ; $S = A \cup \{b^j\}_{j \in J}$ con $b^j \notin A$ para todo j

Luego todo $x \in c_0$ se escribe de manera única como

$$x = \alpha_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^n + \sum_{i \in J} \alpha_j b^j$$

donde los coeficientes son nulos salvo finitos.

Si $f : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ se define por $f(x) = \alpha_0$, probar que f es una funcional lineal no continua.

- Sean E un espacio vectorial normado, $\varphi, \psi \in E^*$ tales que $\varphi \cdot \psi \equiv 0$, entonces $\varphi \equiv 0$ ó $\psi \equiv 0$.
- Sea $y \in \ell^1$. Si definimos $\varphi : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

resulta $\varphi \in c_0^*$ con $\|\varphi\|_{c_0^*} = \|y\|_1$.

- Recíprocamente, dada $\varphi \in c_0^*$, mostrar que la sucesión dada por $y_n = \varphi(e_n)$, donde $e_n = (\delta_k^n)_{k \geq 1}$ pertenece a ℓ^1 .
- Probar que las aplicaciones definidas en (i) y (ii) son una la inversa de la otra, y deducir que $c_0^* \cong \ell^1$ (isomorfismo isométrico).
- De manera análoga, probar que $(\ell^1)^* \cong \ell^\infty$ y que $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, si $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

6. Sea E un espacio de Banach y $S \subset E$ un subespacio cerrado.

- a) Si S tiene dimensión finita, probar que S es complementado.
- b) idem (a) si S tiene codimensión finita.

7. a) Sea E un espacio vectorial normado, entonces $\forall x \in E$

$$\|x\| = \text{máx}\{|\varphi(x)| : \varphi \in E^*, \|\varphi\| = 1\}$$

- b) Sea E un espacio vectorial normado, sean $x, y \in E$ tales que $\varphi(x) = \varphi(y) \forall \varphi \in E^*$, entonces $x = y$.

(Sug: Sea $H = \langle F, x \rangle$, definir $\psi : H \rightarrow \mathbb{C}$ por $\psi(\lambda x + y) = \lambda d, \forall y \in F \forall \lambda \in \mathbb{C}$)

8. Sea E un espacio vectorial normado, $(x_n)_n \subset E$. Un punto y_0 es límite de combinaciones lineales $\sum_{j=1}^N c_j x_j$ si y sólo si $\forall \varphi \in E^*$ que verifique que $\varphi(x_n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, vale que $\varphi(y_0) = 0$.

9. Sea E un espacio de Banach y sea $S \subset E$ un subespacio cerrado. Sea x_0 tal que

$$\inf_{y \in S} \|x_0 - y\| = d > 0$$

Probar que existe un funcional $\phi \in E^*$ tal que

$$\phi(x_0) = 1, \quad \|\phi\| = 1/d, \quad \phi|_S \equiv 0.$$

10. Probar que existe una funcional lineal $L : \ell^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

- a) $\|L\| = 1$.
- b) Si $x \in \ell^\infty$ y $T(x) = (x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, \dots)$, entonces $L(x) = L(Tx)$.
- c) Si $x \in c$, entonces $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- d) Si $x \in \ell^\infty$ y $x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $L(x) \geq 0$.

Sugerencia: Definir L inicialmente sobre el subespacio $S \oplus \langle u \rangle$, siendo $S = \{x - T(x) : x \in \ell^\infty\}$ y $u = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$, y extenderla.

11. Sea S un subespacio de E un espacio de Banach. Si S no es denso en E entonces existe $\phi \in E^*, \phi \neq 0$ tal que $\phi|_S \equiv 0$.

12. Sean E y F espacios vectoriales normados, probar que existe un isomorfismo entre $(E \times F)^*$ y $E^* \times F^*$.

13. Sea E un Banach y S un subespacio de E , probar que

$$\overline{S} = \bigcap \{\ker(\phi) / \phi \in E^* \text{ } S \subset \ker(\phi)\}.$$