Análisis Funcional - Primer cuatrimestre de 2012

Práctica 2 - Espacios de Hilbert

1. Probar que son espacios de Hilbert:

   a) $\mathbb{C}^n$, con producto escalar $\quad \langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$

   b) ℓ^2, con producto escalar $\quad \langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$

   c) $L^2(X)$, donde $(X, \sum, \mu)$ es un espacio de medida, con producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu$$

2. Si H es un espacio vectorial y $a : H \times H \to \mathbb{C}$ es sesquilineal y hermitiana, vale la fórmula de polarización, $\forall x, y \in H$:

$$a(x,y) = \frac{1}{4}\Big\{a(x+y,x+y) - a(x-y,x-y) + i\Big[a(x+iy,x+iy) - a(x-iy,x-iy)\Big]\Big\}$$

   En particular, en H Hilbert, $\quad \forall x, y \in H$:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\Big(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2\Big)\Big\}$$

3. *a*) Sea $(E, \|\ \|)$ un espacio de Banach. Probar que existe un producto escalar que induce la norma de E (y que hace de E un espacio de Hilbert) si y sólo si $\|\ \|$ verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \qquad \forall x, y \in E$$

   b) $(\ell^p, \|\ \|_p)$, si $p \neq 2$ y $(C[0,1], \|\ \|_\infty)$ no son espacios de Hilbert.

4. Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{e_n\}_n$ un conjunto ortonormal. Son equivalentes:

   a) $\{e_n\}_n$ es ortonormal maximal.

   b) Si $x \in H$, $x \perp e_n \quad \forall n$, entonces $x = 0$.

5. Ortogonalización de Gram-Schmidt: Sea H un espacio de Hilbert y supongamos que $\{b_n\}_n$ es un subconjunto linealmente independiente de H que genera un subespacio denso en H.

   a) Definamos $e_1 = \frac{b_1}{\|b_1\|}$ y, una vez definido e_n,

$$e_{n+1} = \frac{b_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\langle b_{n+1}, e_k\rangle\, e_k}{\|b_{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\langle b_{n+1}, e_k\rangle\, e_k\|}$$

   Probar que $\{e_n\}_n$ es una base de H.

b) Si $\{f_n\}_n$ es un conjunto ortonormal tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, con $\lambda_n \neq 0$, tales que $f_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, b_i$ entonces $f_n = \alpha_n \, e_n$, con $\alpha_n \in \mathbb{C}$, $|\alpha_n| = 1 \;\; \forall n$.

6. Desigualdad de Bessel: Sea H un espacio de Hilbert y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ un conjunto ortonormal. Probar que

   a) $\forall x \in H$ y para cada $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

   b) $\forall x \in H$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2$ converge y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

7. Sea H un espacio de Hilbert, si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de H entonces $\forall x \in H$ vale:

   a) $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$

   b) $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$

   c) Si $y \in H$, $\quad \langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, \overline{\langle y, e_n \rangle}$

8. a) Probar que $\{e^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^2$ dado por $(e^n)_k = \delta_k^n$ es una base de ℓ^2.

   b) Probar que $\{\frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}} : n \in \mathbb{Z}\}$ es una base de $L^2[-\pi, \pi]$.

   c) Probar que $\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(n\pi x), \sin(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de $L^2[-1, 1]$ considerado como $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

9. a) El conjunto $\{1, x, x^2, \ldots\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2[-1, 1]$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que

   $$e_n(x) = \left(\frac{2n+1}{2}\right)^{1/2} P_n(x)$$

   donde $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \, (\frac{d}{dx})^n (x^2 - 1)^n$ son los polinomios de Legendre.

   b) El conjunto $\{x^n e^{-x^2/2} : n \geq 0\}$ es linealmente independiente y genera un subespacio denso en el espacio de Hilbert real $L^2(-\infty, \infty)$. Su ortogonalización de Gram-Schmidt $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ satisface que

   $$h_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi 2^n n!}} \, H_n(x) \, e^{-x^2/2}$$

   donde $H_n(x) = (-1)^n \, e^{x^2} \, (\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$ son los polinomios de Hermite y $H_n' = 2n \, H_{n-1}$. Las funciones $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son conocidas como las funciones de Hermite.

10. Sean H y K espacios de Hilbert. En $H \times K$ definimos

$$\langle (h_1, k_1), (h_2, k_2) \rangle = \langle h_1, h_2 \rangle_H + \langle k_1, k_2 \rangle_K$$

Probar que $(H \times K, \langle \ , \ \rangle)$ es un espacio de Hilbert, y que $H \times \{0\}$ y $\{0\} \times K$ son cerrados y ortogonales en $H \times K$.

11. Sean H un espacio de Hilbert, $S \subset H$ un subespacio cerrado propio.

    a) Probar que existe $x \in H - S$ tal que $x \perp S$.

    b) Si $S^\perp = \{x \in H : x \perp S\}$ entonces $S^\perp$ es un subespacio cerrado y $S \oplus S^\perp = H$.

    c) $(S^\perp)^\perp = S$

    d) Dar contraejemplos de (b) y (c) si S no es cerrado.

12. *a*) Sean H un espacio de Hilbert, $D \subset H$ un subconjunto. El subespacio generado por D es denso en H si y sólo si se verifica

    $$\langle x, y \rangle = 0 \ \ \forall y \in D \Rightarrow x = 0$$

    b) En ℓ^2 sea $S = \left\{ x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0 \right\}$. Probar que S es denso en ℓ^2.

13. Sean S y T subespacios cerrados y ortogonales de un espacio de Hilbert H. Probar que $S \oplus T$ es cerrado.

14. Sea $A = \{(x_n) \in \ell^2 : 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}\}$. Calcular $Pr_A(x)$.
    ¿Cuánto vale $\lim_{k \to \infty} d(e_k, A)$?

15. Sea H un espacio de Hilbert separable y $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.

    a) Decimos que una función $f : X \to H$ es medible si $x \mapsto \langle f(x), v \rangle$ es una función medible (a valores en $\mathbb{C}$) para todo $v \in H$. Probar que si f es medible, entonces $\|f\|$ es medible.

    b) Si $f : X \to H$ es medible y $\int_X \|f(x)\| \, d\mu < \infty$, definimos la integral $I = \int_X f(x) \, d\mu$, como el único vector $I \in H$ que verifica

    $$\langle I, v \rangle = \int_X \langle f(x), v \rangle \, d\mu \ \forall \ v \in H$$

    Probar que la integral está bien definida, es lineal como función de f, y que se verifica

    $$\left\| \int_X f(x) \, d\mu \right\| \leq \int_X \|f(x)\| \, d\mu$$

16. Sean H un espacio de Hilbert. Diremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge debilmente a x y lo notamos $x_n \xrightarrow{w} x$ si

    $$\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle \quad \forall y \in H.$$

    Probar las siguientes afirmaciones:

    a) Si $\{e_n\}_n$ es una base de H entonces $e_n \xrightarrow{w} 0$.

b) Si $x_n \xrightarrow{w} x$ y $\|x_n\| \to \|x\|$ entonces $x_n \to x$.

c) Si $\{e_n\}_n$ es una base de H entonces $x_n \xrightarrow{w} x$ si y sólo si $(x_n)_n$ está acotada y $\langle x_n, e_m\rangle \to \langle x, e_m\rangle \quad \forall m \in\mathbb{N}$.

d) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, entonces existe una subsucesión x_{n_k} tal que su media aritmética $z_k = \frac{1}{k}(x_{n_1} + \cdots + x_{n_k})$ verifica que $z_k \to x$.

17. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortogonal en un espacio de Hilbert H, son equivalentes:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge débilmente.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2$ converge.

18. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortogonal completo en un espacio de Hilbert H y $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortogonal en H que verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2 < 1,$$

entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también completo.

19. Sean $f, g \in L^2[a, b]$, decimos que $f' = g$ en sentido débil si

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx = -\int_a^b g(x)\varphi(x)dx \;\forall\; \varphi \in C_0^1[a, b]$$

Definimos el espacio de Sóbolev $H^1[a, b]$

$$H^1[a, b] = \{f \in L^2[a, b] :\; \exists\; g \in L^2[a, b] \text{ tal que } f' = g \text{ en sentido débil } \}$$

a) Probar que $H^1[a, b]$ es un espacio de Hilbert si definimos el producto escalar

$$\langle f, g\rangle_{H^1[a,b]} = \langle f, g\rangle_{L^2[a,b]} + \langle f', g'\rangle_{L^2[a,b]}$$

b) Probar que si $f' = 0$ en sentido débil, entonces f es constante en casi todo punto.

c) Probar que si $f \in H^1[a, b]$ y $F(x) = \int_a^x f'(x)$ entonces $f - F'(x)$ es constante en casi todo punto.

d) Concluir $H^1[a, b]$ puede identificarse con el conjunto de las funciones f que son absolutamente continuas en $[a, b]$ tales que $f'(x)$ (que existe en casi todo punto) está en $L^2[a, b]$.

e) Sea $H^1_{per}[-\pi, \pi]$ el subespacio de las funciones de $H^1[-\pi, \pi]$ tales que

$$f(0) = f(2\pi).$$

Probar que $f \in H^1_{per}[-\pi, \pi]$ si y sólo si sus coeficientes de Fourier $\hat{f}(n)$ (los coeficientes del desarrollo en el sistema ortogonal del ejercicio 8 b)) verifican que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^2 |\hat{f}(n)|^2 < \infty.$$

Sugerencia: Para una de las implicaciones probar que la serie de Fourier de f converge absoluta y uniformemente en $[-\pi, \pi]$.