Álgebra II - Primer Cuatrimestre de 2012

Práctica 8

1. Ver si las sucesiones de A-módulos dadas son complejos y, en caso afirmativo, calcular su homología.
   (a) $A = \mathbb{Z}$, $C_i = 0$ para los $i < 0$, $C_i = \mathbb{Z}_8$ para los $i \geq 0$, $d_i : C_i \to C_{i-1}$ dados por $d_i(x) = 2x$.
   (b) Igual que el inciso anterior, pero con $d_i(x) = 4x$.
   (c) $A = \mathbb{R}$,
   $$C: \quad \cdots \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \to \cdots,$$
   $d_n : C_n \to C_{n-1}$ dados por $d_{2i}(p) = p(0)$ y $d_{2i+1}(p) = Xp$.
   (d) $A = \mathbb{Z}$,
   $$C: \quad \cdots \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{Z}^{\mathbb{N}} \to \cdots,$$
   $d_n : C_n \to C_{n-1}$ dados por $d_{2i}((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (0, a_2, a_3, \dots)$, y $d_{2i}((a_1, a_2, a_3, \dots)) = (5a_1, 0, 0, \dots)$.
   (e) $A = \mathbb{Z}$,
   $$C: \quad \cdots \to \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\mu_3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\mu_3} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_6 \xrightarrow{\mu_2} \mathbb{Z}_4 \to \cdots$$
   (f) $A = \mathbb{Z}$,
   $$C: \quad \cdots \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \cdots$$
   con $d_{2i}(x) = nx, d_{2i-1}(x) = 0$.

2. Ver si son morfismos de complejos.
   (a) $C = C'$ el primer complejo del ejercicio 1, $\{f_i\}$ dada por $f_{2i}(x) = 2x$, $f_{2i+1}(x) = 4x$.
   (b) Los mismos complejos, pero con $f_{2i}(x) = x$, $f_{2i+1}(x) = 3x$.

3. *Lema de los 5*. Considerar el siguiente diagrama de A-módulos de filas exactas.
   $$\begin{tikzcd}
   M_1 \arrow[r] \arrow[d, "a"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "c"] & M_4 \arrow[r] \arrow[d, "d"] & M_5 \arrow[d, "e"] \\
   N_1 \arrow[r] & N_2 \arrow[r] & N_3 \arrow[r] & N_4 \arrow[r] & N_5
   \end{tikzcd}$$
   Probar lo siguiente.
   (a) Si b y d son monomorfismos y a es epimorfismo, entonces c es monomorfismo.
   (b) Si b y d son epimorfismos y e es monomorfismo, entonces c es epimorfismo.
   (c) Si a, b, d, e son isomorfismos, entonces c es isomorfismo.

4. Dados dos complejos de A-módulos $C = (C_i, d_i)$ y $C' = (C'_i, d'_i)$, probar que $C \oplus C' = (C_i \oplus C'_i, d_i \oplus d'_i)$ es un complejo, y que $H_*(C \oplus C') = H_*(C) \oplus H_*(C')$.

5. *Homología de un grafo*. Sea Γ un grafo orientado finito con vértices $V = \{v_0, \dots, v_m\}$ y aristas $X = \{a_0, \dots, a_n\}$. Dado un anillo A, se considera el siguiente complejo C. C_0 es el A-módulo libre con base V, C_1 es el A-módulo libre con base X, $C_k = 0$ para $k \neq 0, 1$, d_1 definido en la base por $d_1(a_s) = a_s^f - a_s^i$, donde a_s^i y a_s^f denotan respectivamente el vértice inicial y final de la arista a_s.

   Probar que si Γ es conexo, la homología del complejo C es 0 salvo $H_0(C)$ y $H_1(C)$ que son A-módulos libres de dimensiones 1 y $1 - m + n$ respectivamente.

6. Se dice que un complejo de A-módulos C *se parte* si existe una familia de morfismos $s_n : C_n \to C_{n+1}$ tales que $d = dsd$.

   (a) Sea C el siguiente complejo de $\mathbb{Z}_4$-módulos
   $$\cdots \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \cdots,$$
   donde los morfismos son todos la multiplicación por 2. Probar que el complejo es acíclico pero no se parte.

   (b) Probar que todo complejo acíclico de A-módulos libres acotado inferiormente se parte.

   (c) Probar que todo complejo acíclico de $\mathbb{Z}$-módulos libres de tipo finito se parte.

   (Un complejo C se dice *acotado inferiormente* si $\exists\, n_0 : C_n = 0 \ \forall\, n \leq n_0$.)

7. Un complejo se dice *contráctil* si el morfismo identidad es homotópico al morfismo nulo. Probar que un complejo C es contráctil sii es acíclico y se parte.

8. Dado un morfismo de complejos $f : C \to C'$, se define el *cono* de f de la siguiente manera. $M_n = C_{n-1} \oplus C'_n$, $\delta_n : C_{n-1} \oplus C'_n \to C_{n-2} \oplus C'_{n-1}$, $\delta_n(c, c') = (-d_{n-1}(c), d'_n(c') - f_{n-1}(c))$. Probar lo siguiente.

   (a) $M(f) = (M_n, \delta_n)$ es un complejo para todo morfismo f.

   (b) $M(1)$ es acíclico y se parte, donde 1 es la identidad de un complejo C. Sugerencia: tomar $s_n(c, c') = (-c', 0)$.

9. Sea $f : C \to C'$ un morfismo de complejos. Probar que $f \simeq 0$ sii f se extiende a un morfismo $(-s, f) : M(1_C) \to C'$, donde 1_C es la identidad del complejo C.

10. Dado $f : C \to C'$ un morfismo de complejos, considerar la sucesión exacta corta de complejos
   $$0 \to C' \xrightarrow{\alpha} M(f) \xrightarrow{\beta} C[-1] \to 0,$$
   donde $\alpha(c') = (0, c')$, $\beta(c, c') = -c$. Teniendo en cuenta que $H_{n+1}(C[-1]) \simeq H_n(C)$, la sucesión larga de homología inducida es de la forma
   $$\cdots \to H_{n+1}(M(f)) \xrightarrow{\beta_*} H_n(C) \xrightarrow{\partial} H_n(C') \xrightarrow{\alpha_*} H_n(M(f)) \xrightarrow{\beta_*} H_{n-1}(C) \to \cdots$$
   Probar que ∂ es el morfismo inducido por f en la homología.

11. Sea P_* un complejo de A-módulos proyectivos, con $P_i = 0$ para todo $i < 0$. Probar que dar morfismo $\varepsilon : P_0 \to M$ tal que $(P_i)_{i \geq 0}$ es una resolución proyectiva de M es lo mismo que dar un morfismo de complejos $P_* \to M_*$ que induce isomorfismos en las homologías, donde M_* es el complejo que tiene módulos nulos salvo en $M_0 = M$.

12. Sea $P_* \xrightarrow{\varepsilon} M$ una resolución proyectiva de un A-módulo M y sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos.

   (a) Probar que para toda resolución $Q_* \xrightarrow{\eta} N$ de N existe un morfismo de complejos $f_* : P_* \to Q_*$ tal que $f\varepsilon = \eta f_0$.

   (b) Probar que f_* es único salvo homotopía.