Álgebra II - Primer Cuatrimestre de 2012

Práctica 7

---

1. Probar que $\mathbb{Z}_3$ es sumando directo de $\mathbb{Z}_6$, pero no es libre como $\mathbb{Z}_6$-módulo.
2. Probar que $M = \mathbb{Z}_6$ no es proyectivo como $\mathbb{Z}_{12}$-módulo.
3. Sea M un A-módulo y sea N un submódulo de M. Probar que si M/N es proyectivo, existe un submódulo T de M tal que $T \simeq M/N$ y $M = N \oplus T$.
4. Sea $\{P_i\}$ una familia de A-módulos. Probar que P_i es proyectivo para todo $i \in I$ si y sólo si $\oplus_I P_i$ es proyectivo.
5. Sean
$$0 \to K \to P \to M \to 0 \quad \text{y} \quad 0 \to K' \to P' \to M \to 0$$
dos sucesiones exactas de A-módulos, con P y P' proyectivos. Probar que existe un isomorfismo $K \oplus P' \simeq K' \oplus P$.
6. Sea A un dip y sea M un A-módulo de tipo finito. Probar las siguientes afirmaciones.
   (a) M es de torsión sii $\mathrm{Hom}_A(M, A) = 0$.
   (b) M es indescomponible (es decir, no tiene sumandos directos propios no triviales) sii $M \simeq A$ o $M \simeq A/\langle p^n \rangle$ para un primo $p \in A$ y un $n \in \mathbb{N}$.
7. Sea A un dip y sea M un A-módulo. Probar las siguientes afirmaciones.
   (a) Si M es de tipo finito y S es un submódulo libre de M tal que M/S es sin torsión, entonces M es libre.
   (b) Si M no es de torsión y M/S es de tipo finito con torsión para todo submódulo $S \neq 0$ de M, entonces $M \simeq A$. Análogamente, si G es un grupo abeliano infinito tal que todo subgrupo no nulo tiene índice finito, entonces $G \simeq \mathbb{Z}$.
8. Sea p un primo positivo. Clasificar todos los grupos abelianos de orden p^3, p^4 y p^5.
9. Clasificar todos los grupos abelianos de orden 18, 45, 100 y 180.
10. Sea G un grupo abeliano finito.
    (a) Si un primo p divide al orden de G, probar que la cantidad de elementos de G de orden p es comprima con p.
    (b) Si G tiene orden p^2q^2 (con p y q primos distintos) determinar la cantidad de elementos de orden pq y la cantidad de elementos de orden pq^2 que hay en G.
11. Para cada una de las siguientes propiedades, caracterizar todos los grupos abelianos finitamente generados que la cumplen.
    (a) Todo subgrupo propio de G es cíclico.
    (b) Todo subgrupo propio de G es de orden primo.
    (c) G tiene exactamente dos subgrupos propios no nulos.
    (d) G tiene exactamente tres subgrupos propios no nulos.
    (e) Todo subgrupo propio no nulo de G es maximal.
    (f) Para todo par de subgrupos S y T de G, se tiene que $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

(g) El orden de todo elemento no nulo de G es primo.

(h) Todo cociente G/S de G por un subgrupo no nulo es cíclico.

(i) Todo par de subgrupos propios no nulos de G son isomorfos.

12. Calcular los factores invariantes de los siguentes grupos abelianos.

(a) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_9$.

(b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{14}$.

(c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{49} \oplus \mathbb{Z}$.

(d) $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{20} \oplus \mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_7$.

(e) G abeliano de orden 36 que tiene exactamente 2 elementos de orden 3 y que no tien elementos de orden 4.

(f) G abeliano de orden 225 que tiene por lo menos 40 elementos de orden 15 y tal que todos subgrupo de orden 9 de G es isomorfo a $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$.

13. Determinar los factores invariantes de los siguientes grupos abelianos dados por generadores y relaciones.

(a) $G = \langle a, b, c \rangle;\ \ 2a + 3b = 0,\ 2a + 4c = 0.$

(b) $G = \langle a, b, c \rangle;\ \ a = 3b,\ a = 3c.$

(c) $G = \langle a, b, c \rangle;\ \ 3a = -c,\ 3a = 3c - 8b.$

(d) $G = \langle a, b, c \rangle;\ \ 3a = b,\ b = 3c.$

14. Calcular los coeficientes de estructura de los siguientes cocientes.

(a) $\mathbb{Z}^4/S$, con $S = \{x \in \mathbb{Z}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$.

(b) $\mathbb{Z}^3/S$, con $S = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x_1 \text{ es par},\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0\}$.

(c) $\mathbb{Z}^3/S$, con $S = \{x \in \mathbb{Z}^3 : x_1 = x_2 + x_3 \text{ es par},\ 3 \mid x_3\}$.

15. Sean p, q, r primos distintos. Determinar la cantidad de grupos no isomorfos de orden n en cada caso.

(a) $n = p^6 q^3 r$.

(b) $n = p^2 q^4 r^5$.

(c) $n = p^3 q^4$.

16. (a) Sea G un grupo abeliano de orden n. Probar que si d divide a n, entonces G tiene subgrupos y cocientes de orden d.

(b) Sea $n \in \mathbb{N}$. Determinar para qué divisores d de n existe un grupo abeliano de orden n y exponente d.

(c) Caracterizar los grupos abelianos finitos de orden menor o igual a 100 de exponente 9, 10 y 21.

(d) Sea G un grupo abeliano y sea $x \in G$ un elemento de orden $\exp(G)$. Probar que $\langle x \rangle$ es un sumando directo de G.

17. Caracterizar los $\mathbb{Z}[i]$-módulos de 5, 6, 21 y 65 elementos.

18. Sea M un A-módulo. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

    (a) Todo diagrama exacto

    $$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[u] \arrow[r] & N \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

    se completa.

    (b) El funtor $\mathrm{Hom}_A(-, E)$ es exacto.

    (c) Toda sucesión exacta de A-módulos

    $$0 \to E \to N \to M \to 0$$

    se parte.

19. Sea M un A-módulo inyectivo. Probar que si M es un submódulo de un módulo N, entonces es un sumando directo.

20. Probar que todo sumando directo de un A-módulo inyectivo es inyectivo.

21. Sea $\{E_i \ : i \in I\}$ una familia de A-módulos inyectivos. Probar que $\Pi_I E_i$ es un módulo inyectivo. Deducir que toda suma directa finita de inyectivos es inyectivo.

22. Sea A un anillo conmutativo e íntegro. Probar que si A es un A-módulo inyectivo, entonces es un cuerpo.

23. Sea A un anillo conmutativo e íntegro que no es un cuerpo, y sea M un A-módulo inyectivo y proyectivo. Probar que $M = 0$.

24. Probar que $\mathbb{Z}_6$ es inyectivo y proyectivo sobre sí mismo.

25. Probar que $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n = 0$ si $(m; n) = 1$.

26. Probar que $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{(n;m)}$.

27. Probar que $\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Q} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

28. Probar que $K[X] \otimes_K K[Y] \simeq K[X, Y]$.

29. Probar que todo anillo A es playo como A-módulo.

30. Probar que $S^{-1}A$ es un A-módulo playo para todo $S \subseteq A$ multiplicativo.

31. Sea $\{P_i\}$ una familia de A-módulos. Probar que P_i es playo para todo $i \in I$ si y sólo si $\oplus_I P_i$ es playo.

32. Probar que si M y N son A-módulos playos, también lo es $M \otimes_A N$.

33. Probar que si M y N son A-módulos proyectivos, también lo es $M \otimes_A N$.

34. Probar que todo módulo proyectivo es playo.

35. Sea A un dip. Probar que un A-módulo M es playo sii es sin torisón.

36. Probar que si A es un dominio íntegro y M es un A-módulo con torsión, entonces M no es playo.