Álgebra II - Primer Cuatrimestre de 2012

Práctica 6

---

1. En cada caso, probar que M es un A-módulo (a izquierda).
   (a) $A = \mathbb{Z}$, $M = G$ un grupo abeliano, con la única acción posible.
   (b) $A = \mathbb{R}$, $M = C(\mathbb{R})$, $(rf)(x) := r\,f(x)$.
   (c) A un anillo, $M = I$ un ideal de A, con la acción dada por el producto en el anillo A.
   (d) A un anillo, $M = A/I$ el cociente de A por un ideal bilátero I, con la acción inducida por el producto de A.

2. Sea K un cuerpo.
   (a) Dado V un K-espacio vectorial y $f : V \to V$ una transformación lineal, probar que hay una acción de $K[X]$ en V tal que $Xv = f(v)\ \forall v \in V$ fue hace de V un $K[X]$-módulo.
   (b) Dado un $K[X]$-módulo M, probar que M es un K-espacio vectorial con la acción inducida, y que $f : M \to M, v \mapsto Xv$ resulta una transformación lineal.

3. Sea M un A-módulo y sea $\varphi : B \to A$ un morfismo de anillos. Probar que M es un B-módulo con la acción inducida por φ, $bx := \varphi(b)x$.

4. Determinar en cada caso si N es un submódulo de M.
   (a) $A = \mathbb{R}, M = C(\mathbb{R})$, y $N = \{f \in M\ :\ f(3) = 0\}$.
   (b) $A = K[X], M = K^n$ como en el ejercicio 2, y N un subespacio de K^n.
   (c) $A = \mathbb{R}, M = \mathbb{C}$ con la acción dada por el producto, y $N = \mathbb{R}i$.
   (d) A un anillo cualquiera, $M = A^n$, y $N = \{(a_1, \dots, a_n) \in M : a_1 + \cdots + a_n = 0\}$.
   (e) A un dominio íntegro, $M = A[X]$, y $N = \{p \in M : \deg(p) \leq k\}$ para un k fijo.

5. Sean M, N A-módulos y $f : M \to N$ una función. Probar que f es un morfismo sii el gráfico de f, $\Gamma(f) = \{(x, f(x))\ :\ x \in M\}$ es un submódulo de $M \oplus N$.

6. Sea M un A-módulo y sea $S \subseteq M$ un subconjunto. Se define el *anulador* de S como
$$\mathrm{Ann}(S) = \{a \in A :\ as = 0\ \forall s \in S\}.$$
   Probar lo siguiente.
   (a) $\mathrm{Ann}(S)$ es un ideal a izquierda de A.
   (b) $\mathrm{Ann}(S) = A$ sii $S \subseteq \{0\}$.
   (c) Si $S \subseteq T$, entonces $\mathrm{Ann}(S) \supseteq \mathrm{Ann}(T)$.
   (d) $\mathrm{Ann}(M^I) = \mathrm{Ann}(M^{(I)}) = \mathrm{Ann}(M)$ para cualquier $I \neq \emptyset$.

7. Determinar si son morfismos de A-módulos.
   (a) $f : A^n \to A^{n+k}, (a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, a_n, 0, \dots, 0)$.
   (b) $f : A[X] \to A, p \mapsto p(0)$.
   (c) $A = \mathbb{R}, f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \bar{z}$.

8. Sean M y N dos A-módulos. Probar lo siguiente.
   (a) $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ tiene estructura de $\mathcal{Z}(A)$-módulo a izquierda vía: $(a \cdot f)(m) = a \cdot f(m)$.
   (b) $\mathrm{Hom}_A(A,N) \simeq N$ como $\mathcal{Z}(A)$-módulos.
   (c) Si además M es un *bimódulo* - es decir M es también un A-módulo a derecha y $(am)b = a(mb)$ $\forall a,b \in A, m \in M$ - entonces $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ tiene estructura de A-módulo a izquierda mediante la acción $(a * f)(m) = f(ma)$.
   (d) Observar que A es un A-bimódulo y probar que la acción de A en $\mathrm{Hom}_A(A,N)$ mediante $*$ extiende a la acción de $\mathcal{Z}(A)$ del ítem (a).
   (e) $\mathrm{Hom}_A(A,N) \simeq N$ como A-módulos.

9. Sea $\varphi : A \to B$ un morfismo de anillos y sea M un A-módulo.
   (a) B es un A-módulo con la acción inducida por φ. Probar que $\mathrm{Hom}_A(B,M)$ tiene una estructura de B-módulo dada por la acción $(bf)(x) = f(xb)$.
   (b) El B-módulo $\mathrm{Hom}_A(B,M)$ se puede ver como A-módulo a través de φ. Probar que si A y B son conmutativos, esta estructura es la definida en 8 (a).

10. Sea A un anillo conmutativo. Dado un A-módulo M, se llama *dual* de M al A-módulo $M^* = \mathrm{Hom}_A(M,A)$. Probar que la aplicación $e : M \to M^{**}$ definida por
$$e(x)(f) = f(x)$$
es un morfismo de A-módulos y que $\ker e = \cap_{f \in M^*} \ker f$.

11. Probar que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q}) \simeq \mathbb{Q}$.

12. Un A-módulo M se dice *simple* si $M \neq 0$ y sus únicos submódulos son 0 y M. Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos, $f \neq 0$. Probar lo siguiente.
    (a) Si M es simple, f es un monomorfismo.
    (b) Si N es simple, f es un epimorfismo.
    (c) Si M y N son simples, f es un isomorfismo.

13. Sea M un A-móulo. Probar que $\mathrm{End}_A(M) = \mathrm{Hom}_A(M,M)$ con la suma definida por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y la composición de funciones es un anillo y que, cuando M es simple, $\mathrm{End}_A(M)$ es un anillo de división.

14. Caracterizar en cada caso el cociente M/N.
    (a) $M = A^n$, $N = \{(a_1, \ldots, a_n) \in M : a_1 + \cdots + a_n = 0\}$.
    (b) $M = A[X]$, $N = \{p \in M \ : \ p(1) = 0\}$.
    (c) $M = M_n(A)$, $N = \{X \in M \ : \ x_{ii} = 0 : \forall\, 1 \leq i \leq n\}$.
    (d) $M = L^I$ con L un A-módulo, $N = \{x \in M : \ x_i = 0 \; \forall\, i \in J\}$, con $J \subseteq I$ un subconjunto.

15. Sea M un A-módulo no nulo finitamente generado. Probar que si S es un sistema de generadores de M, entonces existen $x_1, \ldots, x_n \in S$ tales que $M = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

16. Sea M un A-módulo finitamente generado. Probar que todo submódulo propio está contenido en un submódulo maximal.

17. Sea $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar lo siguiente.
    (a) f es sección sii f es monomorfismo e $\mathrm{im} f$ es un sumando directo de N.
    (b) f es retracción sii f es un epimorfismo y $\ker f$ es un sumando directo de M.

18. Sea

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "f"] & M'' \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\gamma"] & N \arrow[r, "\delta"] & N'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de A-módulos, con filas exactas. Probar que existe un único morfismo $f'' : M'' \to N''$ que completa el diagrama conmutativo y que, si f' y f son isomorfismos, entonces f'' es un isomorfismo.

19. Sea $0 \to M \to N \to Q \to 0$ una sucesión exacta de A-móulos. Probar que lo siguiente.
    (a) Si N es finitamente generado, entonces Q es finitamente generado.
    (b) Si M y Q son finitamente generados, entonces N es finitamente generado.
    (c) N es noetheriano sii M y Q son noetherianos.

20. Sea

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

una sucesión de módulos tal que para todo módulo M la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_3, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(M_2, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(M_1, M) \longrightarrow 0$$

es exacta. Probar que la sucesión original es exacta.

21. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto central y multiplicativo. Sea M un A-módulo a izquierda finitamente generado. Probar que $S^{-1}M = 0$ sii existe $s \in S$ tal que $sM = 0$.

22. Sean A un anillo y $S \subseteq A$ un subconjunto central y multiplicativo. Probar que si

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} Q \to 0$$

es una sucesión exacta de A-módulos, entonces

$$0 \longrightarrow S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}N \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}Q \to 0$$

también es exacta.

23. Sean $S \subseteq A$ un conjunto multiplicativo, M un A-módulo, N un $S^{-1}A$-módulo, y $f : M \to N$ un morfismo de A-módulos. Probar que existe un único morfismo de $S^{-1}A$-módulos $\overline{f} : S^{-1}M \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \\ S^{-1}M \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

24. Sea A un dominio íntegro y M un A-módulo. Decidir si cada afirmación es verdadera o falsa.

   (a) Si M es libre, entonces es sin torsión.

   (b) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-móduos y M es de torsión, entonces $\mathrm{im} f$ es de torsión.

   (c) Si $f : M \to N$ es un morfismo de A-móduos y M es sin torsión, entonces $\mathrm{im} f$ es sin torsión.

   (d) Si N es sin torsión, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ es sin torsión.

   (e) Si M es de torsión y N es sin torsión, entonces $\mathrm{Hom}_A(M, N) = 0$.

25. Calcular la torsión de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}$-módulo.

26. Sea A un dominio principal que no es un cuerpo y sea M un A-módulo. Probar lo siguiente.

   (a) Sea $p \in A$ un irreducible, y $a \in A - \{0\}$. Entonces $(A/\langle a\rangle)[p] \simeq A/\langle p^n\rangle$, donde $n = \text{máx}\{k \,:\, p^k|a\}$.

   (b) M es simple sii existe $p \in A$ irreducible tal que $M \simeq A/\langle p\rangle$.

   (c) M es sin torsión sii $\mathrm{Hom}_A(S, M) = 0$ para todo A-módulo simple S.

27. Sean A un dominio íntegro $v_1, \ldots, v_n \in A^n$ y P la matriz que tiene a los v_i por columnas. Probar lo siguiente.

   (a) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es linealmente independiente sii $\det P \neq 0$.

   (b) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ genera A^n sii $\det P$ es una unidad de A.

28. Sean A un anillo, M un A-módulo (a izquierda) y $N \subseteq M$ un submódulo. Probar que son equivalentes:

   (a) N es un sumando directo de M.

   (b) La inclusión $N \to M$ es una sección.

   (c) La proyección $M \to M/N$ es una retracción.

29. Sea $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$. Probar que $\langle(a_1, \ldots, a_n)\rangle$ es sumando directo de $\mathbb{Z}^n$ sii $\mathrm{mcd}\{a_i\} = 1$.

30. Sea A un anillo e I un ideal bilátero. Probar que si A es Noetheriano, A/I también lo es.

31. Dar ejemplos de:

   (a) Un módulo finitamente generado y no Noetheriano.

   (b) Un módulo M tal que todo submódulo propio de M es finitamente generado, pero M no es Noetheriano.

32. Probar lo siguiente.

   (a) Un K-espacio vectorial V es Noetheriano sii es de dimensión finita.

   (b) Todo anillo principal a izquierda es Noetheriano a izquierda.

   (c) $\mathbb{Z}$ y $K[X]$ son Noetherianos (K es un cuerpo).

33. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados. Probar que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ es Noetheriano.