Álgebra II - Primer Cuatrimestre de 2012

Práctica 5

En esta práctica, los anillos son conmutativos y con $1 \neq 0$.

1. Probar que si A es un DIP, todo ideal primo no nulo de A es maximal.

2. Sea A un DIP y sean $a_1, \dots, a_n \in A$ no nulos. Probar que d es un máximo común divisor de $\{a_1, \dots, a_n\}$ sii $\langle d \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.

3. Sean $P_1, \dots, P_n$ ideales primos de un anillo A y sea I un ideal de A contenido en $\cup_{i=1}^n P_i$. Probar que existe un $1 \leq i \leq n$ tal que $I \subseteq P_i$.

4. Sean $I_1, \dots, I_n$ ideales de un anillo A y sea P un ideal primo de A que contiene a $\cap_{i=1}^n I_i$.
   (a) Probar que existe un $1 \leq i \leq n$ tal que $I_i \subseteq P$.
   (b) Probar que si $P = \cap_{i=1}^n I_i$, entonces $P = I_i$ para algún $1 \leq i \leq n$.

5. Dados I, J ideales de un anillo A se define el *ideal cociente* de I y J como
$$(I : J) = \{x \in A : xJ \subseteq I\}.$$
   Probar las siguientes afirmaciones.
   (a) $(I : J)$ es un ideal.
   (b) $I \subseteq (I : J)$.
   (c) $(I : J)J \subseteq I$.
   (d) $((I : J) : K) = (I : JK) = ((I : K) : J)$.
   (e) $(\cap_i I_i : J) = \cap_i (I_i : J)$.
   (f) $(I : \sum_i J_i) = \cap_i (I : J_i)$.
   (g) Si $A = \mathbb{Z}$, $(\langle m \rangle : \langle n \rangle) = \langle m/(m : n) \rangle$.

6. Sea I un ideal del anillo A. Se define el *radical* de I como
$$r(I) = \{x \in A : \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$
   Probar las siguientes afirmaciones.
   (a) $r(I)$ es un ideal. (Recordar el ejercicio 32 de la práctica 4.)
   (b) $I \subseteq r(I)$.
   (c) $r(r(I)) = r(I)$.
   (d) $r(IJ) = r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$.
   (e) $r(I) = A$ sii $I = A$.
   (f) $r(I + J) = r(r(I) + r(J))$.
   (g) Si I es primo, $r(I^n) = I$ para todo $n > 0$.
   (h) $r(I)$ es la intersección de los ideales primos que contienen a I. (Usar el ejercicio 33 de la práctica 4.)

7. Sea S un subconjunto multiplicativo del anillo A que no tiene al 0 y sea P un elemento maximal del conjunto $\{I \text{ ideal de } A \text{ tal que } I \cap S = \emptyset\}$. Probar que P es primo.

8. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos sobreyectivo. Probar que si A es local, entonces B también.

9. Sea S un subconjunto multiplicativo de un anillo A que no tiene al 0. Probar que si A es principal, también lo es $S^{-1}A$.

10. Sea A un DFU y sea $p \in A$ primo. Probar que el anillo local $A_{\langle p \rangle}$ es principal.