# Álgebra II - Primer Cuatrimestre de 2012

## Práctica 4

---

1. Probar que son anillos.

   (a) $M_n(A)$, con la suma y el producto de matrices, donde $A$ es un anillo.

   (b) $A[X_1, \ldots, X_n]$, los polinomios en $n$ variables con coeficientes en el anillo $A$.

   (c) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$, con $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados; con la suma y el producto de números complejos.

   (d) $(\mathcal{P}(X), \triangle, \cap)$, con $X$ un conjunto, $\mathcal{P}(X)$ el conjunto de subconjuntos de $X$ y $\triangle$ la diferencia simétrica.

   (e) $(Hom(G, G), +, \circ)$, con $G$ un grupo abeliano.

   (f) $\mathbb{Z}[G] = \{\sum_{g \in G} a_g \cdot g \mid a_g \in \mathbb{Z},\ a_g \neq 0, \text{ sólo para finitos } g \in G\}$, con $G$ un grupo;

   $$\left(\sum a_g \cdot g\right) + \left(\sum b_g \cdot g\right) = \sum (a_g + b_g) \cdot g\,; \quad \left(\sum a_g \cdot g\right) \cdot \left(\sum b_g \cdot g\right) = \sum \Big( \sum_{g_1 g_2 = g} a_{g_1} b_{g_2} \Big) \cdot g.$$

2. Decidir cuáles de los anillos del ejercicio anterior son conmutativos, dominios íntegros, anillos de división o cuerpos.

3. Dar ejemplos de un anillo que no sea dominio íntegro y de un dominio íntegro que no sea anillo de división.

4. Sea $A$ un anillo. El *grupo de unidades* de $A$ es el conjunto

   $$A^* = \{u \in A : u \text{ es inversible }\}.$$

   - Probar que la multiplicación de $A$ hace de $A^*$ un grupo.
   - Probar que $\mathcal{U}_n := \mathbb{Z}_n^* = \{m \in \mathbb{Z}_n : \operatorname{mcd}(m, n) = 1\}$. Deducir que $\mathbb{Z}_n$ es cuerpo si y sólo si $n$ es primo.
   - Sea $G$ un grupo. Probar que $1 \cdot G \subset \mathbb{Z}[G]^*$.

5. Hallar las unidades de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}[X]$.

6. Hallar los divisores de cero y las unidades del anillo $A = \mathcal{C}[0, 1]$ de funciones continuas definidas de $[0, 1]$ en $\mathbb{R}$.

7. Sea $x \in A$ un elemento nilpotente. Probar que $1 + x$ y $1 - x$ son unidades.

8. Sea $A$ un dominio íntegro finito. Probar que $A$ es un cuerpo.

9. En cada uno de los siguientes casos, decidir si $B$ es un subanillo de $A$:

   (a) $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{Q}$.

   (b) $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{N}$.

   (c) $A = \mathbb{C}$ y $B = \mathbb{Z}[i]$.

   (d) $A = \mathbb{Z}[X]$ y $B = \{f = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in A \mid a_1 = 0\}$.

10. Sea $B$ un subanillo de un anillo $A$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    (a) $A$ dominio íntegro $\Rightarrow$ $B$ dominio íntegro.

(b) $B$ dominio íntegro $\Rightarrow$ $A$ dominio íntegro.

(c) $A$ cuerpo $\Rightarrow$ $B$ cuerpo.

(d) $B$ cuerpo $\Rightarrow$ $A$ cuerpo.

11. Sean $K$ un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Probar lo siguiente.
    - Sean $V \subseteq K^n$ un subespacio vectorial e $I_V$ el subconjunto de $M_n(K)$ formado por todas las matrices cuyas filas pertenecen a $V$. Probar que $I_V$ es un ideal a izquierda de $M_n(K)$.
    - Probar que todo ideal a izquierda de $M_n(K)$ es de la forma del definido en el ítem anterior. (Sugerencia: tomar $V$ como el conjunto formado por todas las filas de todas las matrices del ideal y probar que es un subespacio).
    - Probar que $M_n(K)$ es *simple* (i.e. no tiene ideales biláteros propios).
    - Probar que $\mathcal{Z}(M_n(K)) = K \cdot I$.

12. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\langle a, b\rangle = \langle \operatorname{mcd}(a, b)\rangle$.

13. Sea $d \in \mathbb{Z}$ libre de cuadrados.

    (a) Probar que si $a + b\sqrt{d} = a' + b'\sqrt{d}$ con $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$, entonces $a = a'$ y $b = b'$.

    (b) Probar que si $d$ es impar, $\{a + b\sqrt{d} \mid a \equiv b \pmod 2\}$ es un ideal de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

14. Consideremos el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

    (a) Sea $N : \mathbb{Z}[\sqrt{3}] \to \mathbb{Z}$ la función dada por $a + b\sqrt{3} \mapsto a^2 - 3b^2$. Probar que $N$ es multiplicativa. $N$ se llama *norma*.

    (b) Probar que $2 + \sqrt{3}$ es una unidad.

    (c) Probar que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ es una unidad sii $N(z) = \pm 1$.

    (d) Encontrar otras unidades de $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

15. Probar que si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, $\mathbb{K}[X]$ es un dominio principal.
    ¿Es $\mathbb{Z}[X]$ un dominio principal?

16. Sea $A$ un anillo. Probar que $A$ es un anillo de división si y sólo si los únicos ideales a izquierda de $A$ son $0$ y $A$.

17. Sea $A$ un anillo conmutativo e $I$ un ideal de $A$. Probar que $A$ es un ideal primo de $A$ sii $A/I$ es un dominio íntegro.

18. Sea $A$ un anillo conmutativo. Probar que todo ideal maximal de $A$ es primo.

19. Sea $A$ un anillo conmutativo y sea $M$ un ideal de $A$. Probar que $M$ es maximal sii $A/M$ es un cuerpo.

20. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y sea $f \in \mathbb{K}[X]$. Probar que $\mathbb{K}[X]/\langle f\rangle$ es un cuerpo sii $f$ es irreducible. ¿Sigue valiendo la afirmación si se reemplaza el cuerpo por un anillo conmutativo?

21. Sea $n \in \mathbb{N}$. En cada uno de los siguientes casos, decidir si $f$ es un morfismo de anillos:

    (a) $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$, $f(g) = g(1)$.

    (b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$.

    (c) $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(C) = \det(C)$.

    (d) $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $f(m) = m^p$, con $p$ un número primo.

22. Sea $f : A \to B$ un morfismo de anillos. Probar las siguientes afirmaciones.
    (a) $\mathrm{im} f$ es un subanillo de $B$.
    (b) $\ker f$ es un ideal de $A$.
    (c) $A/\ker f \simeq \mathrm{im} f$ como anillos.
23. Determine la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones.
    (a) Todo morfismo de anillos no nulo que sale de un anillo de división es inyectivo.
    (b) Si $A$ es un anillo conmutativo tal que todo morfismo de anillos no nulo que sale de $A$ es inyectivo, entonces $A$ es un cuerpo.
    (c) Si $A$ es un anillo tal que todo morfismo no nulo que sale de $A$ es inyectivo, entonces $A$ es un anillo de división.
24. Probar que el único morfismo de anillos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función identidad.
25. Hallar todos los morfismos de anillos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$.
26. Probar que $\mathbb{R}[X]/\langle X^2 - 1\rangle$ y $\mathbb{R}[X,Y]/\langle XY\rangle$ no son cuerpos.
27. Sea $p \in \mathbb{Z}$ un primo. Probar que $\mathbb{Z}[X]/\langle p\rangle \simeq \mathbb{Z}_p[X]$.
28. Hallar los divisores de cero y las unidades de $\mathbb{Z}[X]/\langle X^3\rangle$.
29. Sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar isomorfismos entre los siguientes anillos.
    (a) $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+2i\rangle$ y $\mathbb{Z}_5$.
    (b) $\mathbb{R}[X,Y,Z]/\langle Y - X^5, Z - Y^5\rangle$ y $\mathbb{R}[X]$.
    (c) $\mathbb{Q}[X]/\langle X^3 + X\rangle$ y $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}(i)$.
    (d) $\mathbb{Z}[X]/\langle X^n - 1\rangle$ y $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_n]$.
    (e) $\mathbb{Z}[X]/\langle X^2 + 1\rangle$ y $\mathbb{Z}[i]$.

Un anillo conmutativo se dice *local* si tiene un único ideal maximal.

30. Sea $A$ un anillo conmutativo y sea $M$ un ideal propio de $A$ tal que todo elemento de $A - M$ es una unidad de $A$. Probar que $A$ es un anillo local, con $M$ su ideal maximal.
31. Sea $A$ un anillo conmutativo y sea $M$ un ideal maximal de $A$ tal que todo elemento de $1 + M$ es una unidad de $A$. Probar que $A$ es un anillo local.
32. Sea $A$ un anillo conmutativo. Sea $R$ el conjunto de los elementos nilpotentes de $A$. Probar que $R$ es un ideal y que $A/R$ no tiene elementos nilpotentes no nulos.

    A $R$ se lo llama *nilradical* de $A$.
33. Sea $A$ un anillo conmutativo. Probar que el $R = \bigcap\{I : I \text{ es un ideal primo}\}$.

    Sugerencia: para la inclusión difícil, considerar un elemento $x$ no nilpotente, aplicar el lema de Zorn al conjunto $\Sigma = \{I : \text{ es un ideal y } x^n \notin I \ \ \forall n > 0\}$, y ver que un elemento maximal de $\Sigma$ es un ideal primo que no tiene a $x$.