Álgebra II - Primer Cuatrimestre de 2012

Práctica 3

Acciones y ecuación de clases

1. En cada uno de los siguientes casos probar que $\cdot$ es una acción del grupo G sobre el conjunto X. En cada caso calcular $X^G := \{x \in X : g \cdot x = x \ \forall g \in G\}$, las G-órbitas O_x y los estabilizadores E_x de cada elemento de X.
   (a) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ con } a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f \cdot x = f(x)$.
   (b) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a \cdot x = x^a$ con $a \in \mathbb{R}^\times$ y $x \in \mathbb{R}_{>0}$.
   (c) $G = SL_2(\mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

2. Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y sea $S \triangleleft G$. Determinar la condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/S en X tal que $\bar{a} \cdot x = a \cdot x \quad \forall\, a \in G$ y $x \in X$.

3. Sea X un conjunto finito. Determinar el número de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X.

4. Sea G un grupo.
   (a) Probar que si $|G| = p^n$ con p primo y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\mathcal{Z}(G) \neq 1$.
   (b) Probar que si $G/\mathcal{Z}(G)$ es cíclico entonces G es abeliano.
   (c) Probar que si $|G| = p^2$ con p primo entonces G es abeliano.
   (d) Caracterizar todos los grupos de orden p^2.
   (e) Dar un ejemplo de un grupo G no abeliano tal que $G/\mathcal{Z}(G)$ sea abeliano.

5. Sea p un primo.
   (a) Sea G un grupo no abeliano tal que $|G| = p^3$. Probar que $\mathcal{Z}(G) = [G; G]$ y calcular $|\mathcal{Z}(G)|$.
   (b) Calcular $[G, G]$ con $G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) : \ a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$.

6. Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes forman un subgrupo H. Probar que entonces n es impar y $H \triangleleft G$.

7. Sea G un grupo finito y $p \in \mathbb{N}$ un primo. Probar que $|G|$ es una potencia de p sii todos los elementos de G tienen por orden alguna potencia de p.

8. Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tal que q no divide a $p - 1$. Probar que G es cíclico. ¿Qué pasa si p divide a q ?

Teoremas de Sylow

9. Calcular todos los p-subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_{12}\,, \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}\,, \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_3\,, \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3.$$

10. Sean p, q primos, $|G| = p^2 q$. Probar que G no es simple.

11. Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes: 30, 36, 56, 96, 200, 204, 260, 2540.

12. Sea G un grupo finito y sean $p < q$ primos tales que p^2 no divide a $|G|$. Sean H_p y H_q subgrupos de Sylow de G con $H_p \triangleleft G$. Probar que:

    (a) $H_p H_q$ es subgrupo de G.

    (b) $H_p H_q \triangleleft G \Rightarrow H_q \triangleleft G$.

Productos directo y semidirecto

Recordar que dados dos grupos M y N se define el *producto directo* entre M y N como el que tiene por conjunto subyacente al producto cartesiano $M \times N$, y por operación:

$$(x,y)(x',y') = (xx', yy').$$

13. Sean M y N dos subgrupos normales de un grupo G tales que $M \cap N = 1$ y $MN = G$. Probar que $G \simeq M \times N$.

    Cuando esto se cumple, se dice que G es el *producto directo interno* entre M y N.

14. Sea G un grupo de orden mn con $(m,n) = 1$. Probar que si G tiene un único subgrupo M de orden m y un único subgrupo N de orden n, entonces $G \simeq M \times N$.

15. Sean N y K dos grupos y sea $\theta : K \to Aut(N)$ un morfismo de grupos. Se define en el conjunto $N \times K$ la operación:

$$(n,k)(n',k') = (n\theta(k)(n'), kk').$$

    Probar que esto define un grupo. A este grupo se lo nota $N \rtimes_\theta K$ y se lo llama *producto semidirecto* de N por K con respecto a θ.

16. Sean N y K dos grupos y sea $\theta : K \to Aut(N)$ un morfismo de grupos. Hallar morfismos $I : N \to N \rtimes_\theta K$ y $Q : N \rtimes_\theta K \to K$ tales que I es monomorfismo, Q es epimorfismo, e $\operatorname{im} I = \ker Q$.

17. Probar que si θ es el morfismo trivial, entonces $N \rtimes_\theta K \simeq N \times K$.

18. Sean N y K dos subgrupos de G, $N \triangleleft G$. Probar que son equivalentes:

    (a) $N \cap K = 1$ y $NK = G$.

    (b) $N \cap K = 1$ y $KN = G$.

    (c) Para todo $x \in G$ existen únicos $n \in N, k \in K$ tales que $x = nk$.

    (d) Para todo $x \in G$ existen únicos $n \in N, k \in K$ tales que $x = kn$.

    (e) Si i_K es la inclusión $K \hookrightarrow G$ y q_N es la proyección al cociente $G \twoheadrightarrow G/N$, la composición $q_N i_K$ es un isomorfismo.

    Cuando se cumplen estas condiciones, se dice que G es el *producto semidirecto interno* de N por K.

19. Si G es el producto semidirecto interno de N por K, existe un morfismo $\theta : K \to Aut(N)$ y un isomorfismo $\phi : N \rtimes_\theta K \to G$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "I"] \arrow[d, "id"] & N \rtimes_\theta K \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "\phi"] & K \arrow[d, "q_N i_K"] \\
N \arrow[r, "i_N"] & G \arrow[r, "q_N"] & G/N
\end{tikzcd}$$

    donde los morfismos I, Q, q_N, i_K son los de los ejercicios anteriores, e i_N es la inclusión.

20. Hallar un $\theta : \mathbb{Z}_2 \to Aut(\mathbb{Z}_3)$ tal que $\mathbb{S}_3 \simeq \mathbb{Z}_3 \rtimes_\theta \mathbb{Z}_2$.

21. Mostrar que $\mathbb{S}_n$ es el producto semidirecto (interno) de $\mathbb{A}_n$ por $\langle(12)\rangle$.

22. Sea G un grupo y sean N y K subgrupos de G tales que $G = N \rtimes K$.
    (a) Probar que si $K \triangleleft G$ entonces $kn = nk$, $\forall n \in N$, $\forall k \in K$.
    (b) Deducir que G es abeliano si y sólo si N y K son abelianos y $K \triangleleft G$.

23. Determinar si existe un grupo K tal que G sea el producto semidirecto de N por K en cada uno de los siguientes casos.
    (a) $G = \mathbb{C}^\times, \quad N = S^1$
    (b) $G = G_{12}, \quad N = G_3$
    (c) $G = G_{12}, \quad N = G_2$
    (d) $G = \mathbb{C}, \quad H = \mathbb{R}$
    (e) $G = GL(n, \mathbb{C}), \quad N = SL(n, \mathbb{C})$
    (f) $G = \mathbb{S}_4, \quad N = \{1, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$

24. Sean $N = \mathbb{Z}_3$ y $K = \mathbb{Z}_4$.
    (a) Describir todos los posibles productos semidirectos $G = N \rtimes_\theta K$.
    (b) Mostrar que uno de estos es no abeliano y no isomorfo a $\mathbb{A}_4$.

Presentaciones de grupos

25. Caracterizar el grupo presentado en cada caso.
    (a) $\langle x | x \rangle$
    (b) $\langle x | x^n \rangle$
    (c) $\langle x, y | xyx^{-1}y^{-1} \rangle$
    (d) $\langle x, y | x^n, xyx^{-1}y^{-1} \rangle$
    (e) $\langle x, y | x^2, y^4, xyxy \rangle$
    (f) $\langle x, y | x^2, y^2, xyxyxyxy \rangle$

26. Considerar la presentación $\langle a, b | a^7, b^3, a^{-1}b^{-1}a^r b \rangle$, con $1 \leq r \leq 6$.
    (a) Probar que el cardinal del grupo G presentado es menor o igual a 21.
    (b) Probar que para $r \in \{3, 5, 6\}$ se tiene que $G \simeq \mathbb{Z}_3$.
    (c) Probar que para $r = 1$ se tiene que $G \simeq \mathbb{Z}_{21}$.
    (d) Probar que para $r \in \{2, 4\}$, G es un grupo no abeliano de orden 21.

27. Probar que $\langle a, b | a^4, abab^{-1}, a^2b^{-2} \rangle$ es una presentación de $\mathcal{H}$.