Álgebra II - Primer Cuatrimestre de 2012

Práctica 1

---

1. En cada uno de los siguientes casos determinar si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, determinar si es abeliano.

   (a) $G = S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \ \ a * b = a \cdot b.$

   (b) $G = \mathbb{N}_0, \quad a * b = [a, b]$ (mínimo múltiplo común).

   (c) $G = M_3(\mathbb{Z}), \quad a * b = a \cdot b.$

   (d) $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) : det\ a = 1\}, \quad a * b = a \cdot b.$

   (e) $G = End_K(V)$, con V un K-espacio vectorial, $\quad f * g = f \circ g.$

   (f) $G = \mathbb{S}(X) = \{f{:}X \to X{:}f$ es biyectiva$\}$, donde X es un conjunto no vacío y $f * g = f \circ g$.
   Notación: Cuando $X = \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{S}(X)$ será notado $\mathbb{S}_n$.

   (g) $G = \mathbb{Z}_n = \{a \in \mathbb{Z} : 0 \leq a < n\}, \quad a * b = r_n(a + b).$

   (h) $G = \mathcal{U}_n = \{a \in \mathbb{Z}_n : (a, n) = 1\}, \quad a * b = r_n(a \cdot b).$

   (i) $G = G_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} G_n, \quad a * b = a \cdot b, \quad$ donde $G_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}.$

2. Probar que todos los grupos de 4 elementos son abelianos.
   (Sugerencia: hacer todas las posibles tablas de operaciones).

3. Sea $(G, \cdot)$ un grupo. Sea $(G, *)$ el grupo cuyo conjunto subyacente es G, y con la operación dada por $g * h = h \cdot g$. Mostrar que $(G, *)$ es un grupo.
   Este grupo se llama *grupo opuesto de G* y se nota G^{op}.

4. Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación $\cdot$ sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$. Mostrar que $(K, \cdot)$ es un grupo.
   Este grupo se llama *producto directo de G y H* y se nota $G \times H$.

5. (a) Sea $(G, +)$ un grupo abeliano finito. Probar que

   $$\sum_{g \in G} g = \sum_{g \in G:\ 2g = 0} g.$$

   (b) Calcular $\displaystyle\sum_{a \in \mathbb{Z}_n} a \quad$ y $\quad \displaystyle\prod_{w \in G_n} w.$

6. Sea $(G, \cdot)$ un grupo y sea $S \subseteq G$ un subconjunto no vacío.

   (a) Probar que S es un subgrupo si y sólo si $x \cdot y^{-1} \in S \ \ \forall x, y \in S$.

   (b) Probar que si G es finito, S es un subgrupo si y sólo si $x \cdot y \in S \ \ \forall x, y \in S$.

7. Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G.

   (a) Probar que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo.

   (b) Probar que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.

   (c) ¿Es cierto que si $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ es un subgrupo de G, entonces $\exists i, j$ con $i \neq j$ y $H_i \subset H_j$?

8. Hallar todos los subgrupos cíclicos de: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

9. Probar que

   $$\mathcal{H} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

   es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$.

10. Probar que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n \cdot \mathbb{Z}$.

11. Probar que si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^\times$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = G_n$.

12. Dado $n \in \mathbb{N}$, sean $r \in GL_2(\mathbb{R})$ la matriz que representa la rotación en sentido antihorario de ángulo $2\pi/n$ y s la simetría alrededor del eje x. Se llama *n-grupo Diedral* al subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ que generan r y s y lo denotamos con $\mathbb{D}_n$. Calcular el orden de $\mathbb{D}_n$.

13. Calcular $ord(x)$ en los casos.

    (a) $G = \mathbb{S}_8, \qquad x = (1\,2\,3\,5)(1\,3\,7\,8).$

    (b) $G = \mathcal{H}, \qquad x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$

    (c) $G = S^1, \qquad x = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{n}).$

14. Sea $x \in \mathbb{Z}_n$. Probar que $ord(x) = n$ si y sólo si $(x, n) = 1$.

15. Probar que si G_1 y G_2 son grupos y $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ son elementos de orden finito, entonces el orden de (g_1, g_2) en $G_1 \times G_2$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de g_1 y g_2.

16. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m. Probar que existe un elemento de orden p en G.

17. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $a, b \in G$

    (a) Probar que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas.

    i. $x \mapsto a \cdot x$
    ii. $x \mapsto a \cdot x \cdot b$
    iii. $x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1}$
    iv. $x \mapsto x^{-1}$
    v. $x \mapsto a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$

    (b) Determinar cuáles de estas aplicaciones son morfismos.

    (c) Idem en el caso en que G sea abeliano.

18. Dados los grupos $\quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4, \quad \mathbb{Z}_2 \oplus G_4, \quad \mathbb{Z}_8, \quad \mathbb{D}_4, \quad G_8, \quad \mathcal{H}, \quad \mathcal{K}$
    decidir cuáles son abelianos, cuáles son cíclicos y cuáles son isomorfos entre sí.
    ($\mathcal{K} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ con $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = k = -ji, (-1)x = -x\ \forall x \in \{-1, i, j, k\}$.)

19. Determinar si G y K son isomorfos en los casos.

    (a) $G = \mathbb{Z}_n, \qquad K = G_n.$
    (b) $G = \mathbb{Z}_{10}, \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5.$
    (c) $G = \mathbb{Q}, \qquad K = \mathbb{R}.$
    (d) $G = \mathcal{U}_{16}, \qquad K = \mathcal{H}.$
    (e) $G = \mathbb{A}_4, \qquad K = \mathbb{D}_6.$

20. Sea $f : G \longrightarrow G$ un morfismo de grupos. Probar que $ord(f(x))$ divide a $ord(x)$ si $ord(x)$ es finito.

21. Sea $f : G \longrightarrow L$ un epimorfismo. Decidir para cuáles P_i vale:
    "G verifica $P_i \Rightarrow L$ verifica P_i"

    (P_1) tener n elementos.
    (P_2) ser finito.
    (P_3) ser conmutativo.
    (P_4) ser no conmutativo.
    (P_5) ser cíclico.
    (P_6) todo elemento tiene orden finito.
    (P_7) todo elemento tiene orden infinito.

22. Sea $f : G \longrightarrow L$ un monomorfismo. Decidir para cuáles P_i del ejercicio anterior vale: "L verifica $P_i \Rightarrow G$ verifica P_i".

23. (a) Probar que $Aut(\mathbb{Z}) \simeq G_2$.
    (b) Hallar $Hom(G_n\,,\,\mathbb{Z})$.
    (c) Hallar $Hom(G\,,\,\mathbb{Z})$ para G un grupo de orden finito.

24. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7, \text{ con } a \neq 0 \right\}$.
    (a) Hallar el orden de G.
    (b) Para cada primo p divisor del orden de G hallar todos los elementos de G de orden p.

25. Sea p un número primo mayor que 2. Se considera el conjunto

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

Probar que G es un grupo no abeliano tal que todo elemento distinto de la identidad tiene orden p. ¿Qué pasa si $p = 2$?

26. (a) Hallar $\mathcal{Z}(G)$ en cada caso.
    i. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$.
    ii. $G = \mathbb{S}_4$.
    iii. $G = SL_n(\mathbb{R})$.
    (b) ¿Es $\mathcal{Z}(G)$ un subgrupo normal de G para todo grupo G?

27. (a) Hallar $[G, G]$ en cada caso.
    i. $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.
    ii. $G = \mathbb{S}_n$.
    iii. $G = \mathcal{H}$.
    (b) ¿Es $[G, G]$ un subgrupo normal de G para todo grupo G?

28. (a) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\{a, b\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{Z}$ si y sólo si $(a, b) = 1$.
    (b) Probar que $\mathbb{Z}$ tiene sistemas de generadores minimales de n elementos $\forall n \in \mathbb{N}$.

29. Sea $G = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Hallar $|G|$ y encontrar subgrupos de G de orden 2, 4, 8.

30. (a) Probar que son equivalentes:
    i. G es abeliano.
    ii. La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.
    iii. La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.
    (b) Probar que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$ entonces G es abeliano.

31. Probar que
    (a) $Hom(\mathbb{Z}\,,\,\mathbb{Z}_n) \neq 0$.
    (b) $Hom(\mathbb{Q}\,,\,\mathbb{Z}) = 0$.
    (c) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
    (d) $Hom(\mathbb{Z}_m\,,\,\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_{(m,n)}$.

32. Hallar dos grupos G y K no isomorfos tales que $Aut(G) \simeq Aut(K)$.

33. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_4, \text{ con } (a, 4) = 1 \right\}$. Probar que G es un grupo no abeliano de orden 8. ¿Es $G \simeq \mathcal{H}$? ¿Es $G \simeq \mathbb{D}_4$?