El orden de un producto de elementos en un grupo abeliano

Vimos en clase que dados dos elementos a, b de un grupo abeliano G con $ord(a) = n$ y $ord(b) = m$, al tenerse

$$(a \cdot b)^{[n,m]} = a^{[n,m]} \cdot b^{[n,m]} = 1 \cdot 1 = 1,$$

el orden de $a \cdot b$ divide a $[n, m]$ (Recordar que el orden de un elemento x siempre divide a los exponentes k que cumplen $x^k = 1$.)

Nos preguntamos si sería siempre $[n, m]$ el orden del producto, pero vimos que no (tomando a de orden $n > 1$ y $b = a^{-1}$).
Nos fijamos si sería $[n, m]/(n, m)$, pero tampoco (tomando $a = (1, 0)$ y $b = (0, 1)$ en $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6$).
Algo que sí vale es lo siguiente (ver: Teoría de Grupos, de Paul Dubreil ISBN 84-291-5071-4, página 51).

En el caso en que $(n, m) = 1$, se tiene $ord(a \cdot b) = [n, m] = n \cdot m$.

Veamos que $n|ord(a \cdot b)$ y $m|ord(a \cdot b)$.
Como $(a \cdot b)^m = a^m$, se tiene que $ord((a \cdot b)^m) = ord(a^m) = n/(n, m) = n$. Como una potencia del elemento $(a \cdot b)$ tiene orden n, se deduce que n divide al orden del grupo generado por $a \cdot b$, que es $ord(a \cdot b)$.
Análogamente se ve que $m|ord(a \cdot b)$, y luego $[n, m] = n \cdot m \mid ord(a \cdot b)$. Como siempre vale $ord(a \cdot b)|[m, n]$, se sigue que $ord(a \cdot b) = [n, m]$.