

# Álgebra 1

Primer Cuatrimestre 2012

## Práctica 5 - Enteros (segunda parte)

- Determinar cuántos divisores positivos tienen 9000,  $15^4 \cdot 42^3 \cdot 56^5$  y  $10^n \cdot 11^{n+1}$ . ¿ Y cuántos divisores en total ?
- Hallar la suma de los divisores positivos de  $2^4 \cdot 5^{123}$  y de  $10^n \cdot 11^{n+1}$
- Hallar el menor número natural  $n$  tal que  $6552n$  sea un cuadrado.
- Decidir si existen enteros  $a$  y  $b$  no nulos que satisfagan
  - $a^2 = 8b^2$
  - $a^2 = 3b^3$
  - $7a^2 = 11b^2$
- Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Probar que si  $p$  es un primo positivo entonces  $\sqrt[n]{p} \notin \mathbb{Q}$
- Calcular las máximas potencias de 3 y de 9 que dividen a 77!
  - Calcular la máxima potencia de 20 que divide a 81!
  - Determinar en cuántos ceros termina el desarrollo en base 16 de 20!
- Sea  $p$  primo positivo. Probar que si  $0 < k < p$ , entonces  $p$  divide a  $\binom{p}{k}$
- Probar que existen infinitos primos congruentes a 3 módulo 4.  
Sugerencia: probar primero que si  $a \neq \pm 1$  satisface  $a \equiv 3 \pmod{4}$ , entonces existe  $p$  primo,  $p \equiv 3 \pmod{4}$  tal que  $p | a$ . Luego probar que si existieran sólo finitos primos congruentes a 3 módulo 4, digamos  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , entonces  $a = -1 + 4 \cdot \prod_{i=1}^n p_i$  sería un entero distinto de 1 y  $-1$  que no es divisible por ningún primo congruente a 3 módulo 4.
- Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Probar que si  $a^n | b^n$  entonces  $a | b$
- Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que
  - $(n : 945) = 63$ ,  $(n : 1176) = 84$  y  $n \leq 2800$
  - $(n : 1260) = 70$  y  $n$  tiene 30 divisores positivos
  - $[n : 130] = 260$
- Hallar todos los  $a, b \in \mathbb{Z}$  tales que  $(a : b) = 10$  y  $[a : b] = 1500$
- Calcular  $(18^n - 1 : 1292)$  para cada  $n \in \mathbb{N}$
  - Probar que  $(2^n + 7^{n+1} : 2^{n+1} + 7^n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$
- Sea  $a \in \mathbb{Z}$  tal que  $(a : 25) = 5$ . Calcular  $(a^4 + 3a + 5^{232} : 150)$
  - Sean  $a, b \in \mathbb{Z}$  tales que  $(a : b) = 3$ . Calcular  $(a^2b : 9a + 9b)$
- Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $((a^2 + 3)(7a - 2) : 15) = 5$

15. Hallar, cuando existan, todos los enteros  $a$  que satisfacen simultáneamente:

$$\text{i) } \begin{cases} a \equiv 0 & (8) \\ a \equiv 2 & (5) \\ a \equiv 1 & (21) \end{cases}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} a \equiv 3 & (10) \\ a \equiv 2 & (7) \\ a \equiv 5 & (9) \end{cases}$$

$$\text{iii) } \begin{cases} a \equiv 1 & (6) \\ a \equiv 2 & (20) \end{cases}$$

$$\text{iv) } \begin{cases} a \equiv 1 & (12) \\ a \equiv 7 & (10) \\ a \equiv 4 & (9) \end{cases}$$

16. i) ¿Existe algún entero  $a$  cuyo resto en la división por 15 sea 2 y cuyo resto en la división por 18 sea 8?

ii) ¿Existe algún entero  $a$  cuyo resto en la división por 15 sea 13 y cuyo resto en la división por 35 sea 22?

17. i) Hallar el menor entero positivo  $a$  tal que el resto de la división de  $a$  por 21 es 13 y el resto de la división de  $6a$  por 15 es 9.

ii) Hallar un entero  $a$  entre 60 y 90 tal que el resto de la división de  $2a$  por 3 es 1 y el resto de la división de  $7a$  por 10 es 8.

18. Hallar el resto de la división de  $a$  por  $p$  en los casos

i)  $a = 33^{1427}$ ,  $p = 5$

ii)  $a = 71^{22283}$ ,  $p = 11$

iii)  $a = 5 \cdot 7^{2451} + 3 \cdot 65^{2345} - 23 \cdot 8^{138}$ ,  $p = 13$

19. i) Resolver la ecuación de congruencia  $7^{13}X \equiv 5 \pmod{11}$

ii) Resolver la ecuación de congruencia  $2^{94}X \equiv 7 \pmod{97}$

20. Sean  $p$  y  $q$  dos primos positivos distintos y  $a \in \mathbb{Z}$ . Probar que si  $a$  es un entero coprimo con  $pq$  entonces  $pq \mid a^{(p-1)(q-1)} - 1$ , y que para todo  $a$  vale  $a \equiv a^{(p-1)(q-1)+1} \pmod{pq}$

21. Probar que si  $a$  es un entero coprimo con 561 entonces  $561 \mid a^{560} - 1$

22. Probar que para todo  $a \in \mathbb{Z}$  vale i)  $728 \mid a^{27} - a^3$  ii)  $\frac{2a^7}{35} + \frac{a}{7} - \frac{a^3}{5} \in \mathbb{Z}$

23. Hallar el resto de la división de

i)  $3 \cdot 7^{135} + 24^{78} + 11^{222}$  por 70

ii)  $3^{385}$  por 400

iii)  $\sum_{i=1}^{1759} i^{42}$  por 56

24. Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que i)  $539 \mid 3^{253}a + 5^{44}$  ii)  $a^{236} \equiv 6 \pmod{19}$

25. Hallar todos los  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $3^n \equiv 53 \pmod{77}$

26. Hallar el resto de la división de  $2^{2^n}$  por 13 para cada  $n \in \mathbb{N}$

27. Hallar todos los divisores positivos de  $25^{70}$  que sean congruentes a 2 módulo 9 y a 3 módulo 11.

28. i) Probar que  $(3a^6 - 3 : 5a^6 + 2) = 1$  ó  $7$ . Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  para los cuales vale 7

ii) Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(3a^7 - 3 : 5a^7 + 2) = 7$

iii) Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(11a^6 + 1 : 90) = 5$

iv) Sea  $a \in \mathbb{Z}$  tal que  $(9a^{25} + 10 : 280) = 35$ . Hallar el resto de la división de  $a$  por 70

v) Hallar todos los  $a \in \mathbb{Z}$  tales que  $(3a^{98} - 5a^{50} + 4 : 140a) = 14$