Álgebra 1

Primer Cuatrimestre 2012

Práctica 4 - Enteros (primera parte)

1. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas $\forall\, a, b, c \in \mathbb{Z}$

i) $a\,b \mid c \Rightarrow a \mid c$ y $b \mid c$

ii) $4 \mid a^2 \Rightarrow 2 \mid a$

iii) $2 \mid a\,b \Rightarrow 2 \mid a$ ó $2 \mid b$

iv) $9 \mid a\,b \Rightarrow 9 \mid a$ ó $9 \mid b$

v) $a \mid b + c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$

vi) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a\,b \mid c$

vii) $a \mid b \Rightarrow a \leq b$

viii) $a \mid b \Rightarrow |a| \leq |b|$

ix) $a \mid b + a^2 \Rightarrow a \mid b$

2. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ tales que

i) $3n - 1 \mid n + 7$

ii) $3n - 2 \mid 5n - 8$

iii) $2n + 1 \mid n^2 + 5$

iv) $n - 2 \mid n^3 - 8$

3. Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$

i) $99 \mid 10^{2n} + 197$

ii) $9 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 2^{4n+1}$

iii) $56 \mid 13^{2n} + 28n^2 - 84n - 1$

iv) $256 \mid 7^{2n} + 208n - 1$

4. i) Probar que $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii) Probar que si n es un número natural par entonces $a + b \mid a^n - b^n$.

iii) Probar que si n es un número natural impar entonces $a + b \mid a^n + b^n$.

5. Hallar todos los primos positivos menores o iguales que 100

6. i) Probar que un número natural n es compuesto si y sólo si es divisible por algún primo positivo $p \leq \sqrt{n}$

ii) Determinar cuáles de los siguientes enteros son primos: 91, 209, 307, 791, 1001, 3001

7. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) si n es compuesto, entonces $2^n - 1$ es compuesto

ii) si $2^n + 1$ es primo, entonces n es una potencia de 2

8. Calcular el cociente y el resto de la división de a por b en los casos

i) $a = 133, \quad b = -14$

ii) $a = 13, \quad b = 111$

iii) $a = 3b + 7, \quad b \neq 0$

iv) $a = b^2 - 6, \quad b \neq 0$

v) $a = n^2 + 5, \quad b = n + 2$ $(n \in \mathbb{N})$

vi) $a = n + 3, \quad b = n^2 + 1$ $(n \in \mathbb{N})$

9. Sabiendo que el resto de la división de un entero a por 18 es 5, calcular el resto de

i) la división de $a^2 - 3a + 11$ por 18

ii) la división de a por 3

iii) la división de $4a + 1$ por 9

iv) la división de $a^2 + 7$ por 36

v) la división de $7a^2 + 12$ por 28

vi) la división de $1 - 3a$ por 27

10. Hallar todos los $n \in \mathbb{N}$ para los cuales $n^3 + 4n + 5 \equiv n - 1\ (n^2 + 1)$

11. i) Si $a \equiv 22\ (14)$, hallar el resto de dividir a a por 2, por 7 y por 14

ii) Si $a \equiv 13\ (5)$, hallar el resto de dividir a $33a^3 + 3a^2 - 197a + 2$ por 5

iii) Hallar, para cada $n \in \mathbb{N}$, el resto de la división de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \cdot i!$ por 36

12. i) Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 \equiv 3\ (11)$

ii) Probar que no existe ningún entero a tal que $a^3 \equiv -3\ (13)$

iii) Probar que $a^2 \equiv -1\ (5) \Leftrightarrow a \equiv 2\ (5)$ ó $a \equiv 3\ (5)$

iv) Probar que $a^7 \equiv a\ (7)$ para todo $a \in \mathbb{Z}$

v) Probar que $7 \mid a^2 + b^2 \Leftrightarrow 7 \mid a$ y $7 \mid b$

vi) Probar que $5 \mid a^2 + b^2 + 1 \Rightarrow 5 \mid a$ ó $5 \mid b$

vii) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a^2 + b^2 = c^2$. Probar que $3 \mid a$ ó $3 \mid b$

13. Enunciar y demostrar criterios de divisibilidad por 8, 9 y 11

14. Sea a un entero impar que no es divisible por 5

i) Probar que $a^4 \equiv 1\ (10)$

ii) Probar que a y a^{45321} tienen el mismo resto en la división por 10

15. i) Probar que $2^{5n} \equiv 1\ (31)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Hallar el resto de la división de 2^{51833} por 31

iii) Sea $k \in \mathbb{N}$. Sabiendo que $2^k \equiv 39\ (31)$, hallar el resto de la división de k por 5

iv) Hallar el resto de la división de $43 \cdot 2^{163} + 11 \cdot 5^{221} + 61^{999}$ por 31

16. i) Sea a un entero impar. Probar que $2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Hallar el resto de la división de 5^{2267} por 32

17. Probar que existen infinitos primos congruentes a 3 módulo 4

Sugerencia: probar primero que un número congruente a 3 módulo 4 distinto de 1 y -1 necesariamente es divisible por un primo congruente a 3 módulo 4. Luego probar que si existieran finitos primos congruentes a 3 módulo 4, digamos $p_1, p_2, \ldots, p_n$, entonces $a = -1 + 4.\displaystyle\prod_{i=1}^{n} p_i$ sería un entero distinto de 1 y -1 que no es divisible por ningún primo congruente a 3 módulo 4.

18. i) Hallar el desarrollo en base 2 de 1365, 2800, $3 \cdot 2^{13}$ y $13 \cdot 2^n + 5 \cdot 2^{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

ii) Hallar el desarrollo en base 16 de 2800

19. Sea a un entero. Probar que si el desarrollo en base 10 de a termina en n ceros entonces el desarrollo en base 5 de a termina en por lo menos n ceros.

20. En cada uno de los siguientes casos calcular el máximo común divisor entre a y b y escribirlo como combinación lineal entera de a y b

i) $a = 2532, b = 63$

ii) $a = 5335, b = 110$

iii) $a = 131, b = 23$

iv) $a = n^2 + 1, b = n + 2$ ($n \in \mathbb{N}$)

21. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Sabiendo que el resto de dividir a a por b es 27 y que el resto de dividir b por 27 es 21, calcular $(a : b)$

22. Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$.

i) Probar que si r es el resto de la división de n por m, entonces el resto de la división de $a^n - 1$ por $a^m - 1$ es $a^r - 1$

ii) Probar que $(a^n - 1 : a^m - 1) = a^{(n:m)} - 1$

23. Sea $a \in \mathbb{Z}$.

i) Probar que $(5a + 8 : 7a + 3) = 1$ o 41, y dar un ejemplo para cada caso

ii) Probar que $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) = 1$ o 43, y dar un ejemplo para cada caso

24. i) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{b+4}{a} + \dfrac{5}{b} \in \mathbb{Z}$

ii) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$

iii) Determinar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $\dfrac{2a+3}{a+1} + \dfrac{a+2}{4} \in \mathbb{Z}$

25. Sean p y q primos positivos distintos y sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que si $p\,q \mid a^n$ entonces $p\,q \mid a$

26. i) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c > 0$. Probar que $(c\,a : c\,b) = c\,(a : b)$

ii) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Probar que

(a) si $(a : b) = 1$ entonces $(a^n : b^n) = 1$

(b) si $(a : b) = d$ entonces $(a^n : b^n) = d^n$

27. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que

i) si $(a : b) = 1$ entonces $(7a - 3b : 2a - b) = 1$

ii) si $(a : b) = 1$ entonces $(2a - 3b : 5a + 2b) = 1$ ó 19, y dar un ejemplo para cada caso

iii) si $(a : b) = 2$ entonces $(5a - 3b : 4a + b) = 2$ ó 34, y dar un ejemplo para cada caso

28. Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que

i) $(2^n + 7^n : 2^n - 7^n) = 1$

ii) $(2^n + 5^{n+1} : 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9, y dar un ejemplo para cada caso

iii) $(3^n + 5^{n+1} : 3^{n+1} + 5^n) = 2$ ó 14, y dar un ejemplo para cada caso

29. Determinar, cuando existan, todos los $a, b \in \mathbb{Z}$ que satisfacen

i) $5a + 8b = 3$ ii) $24a + 14b = 7$ iii) $39a - 24b = 6$

30. Si se sabe que cada unidad de un cierto producto A cuesta 39 pesos y que cada unidad de un cierto producto B cuesta 48 pesos, ¿cuántas unidades de cada producto se pueden comprar con 135 pesos?

31. Hallar, cuando existan, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones de congruencia

i) $17X \equiv 3\ (11)$ ii) $56X \equiv 28\ (35)$ iii) $56X \equiv 2\ (884)$ iv) $33X \equiv 27\ (45)$

32. Hallar el resto de la división de un entero a por 18, sabiendo que el resto de la división de $7a$ por 18 es 5

33. Retomando el ejercicio 21, determinar para qué valores de $a \in \mathbb{Z}$ se tiene

i) $(5a + 8 : 7a + 3) = 1$ y $(5a + 8 : 7a + 3) = 41$

ii) $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) = 1$ y $(2a^2 + 3a - 1 : 5a + 6) = 43$

34. Hallar todos los $a \in \mathbb{Z}$ tales que $(7a + 1 : 5a + 4) \neq 1$