Medida de Hausdorff.

Ejercicio 1 Dado $A \subset \mathbb{R}^N$ y $0 \leq s < \infty$ probar que
$$\lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Ejercicio 2 Mostrar que

(a) $\mathcal{H}^0$ es la medida de contar.

(b) $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}$ en $\mathbb{R}$.

(c) $\mathcal{H}^s \equiv 0$ en $\mathbb{R}^N$ para todo $s > N$.

(d) $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ para todo $\lambda > 0$ y $A \subset \mathbb{R}^N$.

(e) $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ para toda isometría afín $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ y $A \subset \mathbb{R}^N$.

Ejercicio 3 Probar que si $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$ están a distancia estrictamente positiva, entonces $\mathcal{H}^s(E \cup F) = \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$.

Ejercicio 4 Probar que si $s \geq 0$, entonces todo boreliano de $\mathbb{R}^n$ es $\mathcal{H}^s$-medible.

Ejercicio 5 Probar que:

(a) Si $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subconjuntos de $\mathbb{R}^N$ com dimensión de Hausdorff d, entonces $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ también tiene dimensión de Hausdorff d.

(b) Un conjunto numerable tiene dimensión de Hausdorff 0.

Ejercicio 6 Sean μ una medida de Borel finita sobre $\mathbb{R}^N$, $F \subset \mathbb{R}$ boreliano y $0 < c < \infty$. Probar que si
$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} < c \quad \forall x \in F$$
entonces $\mathcal{H}^s(F) \geq \frac{\mu(F)}{c}$.

Ejercicio 7 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^k$ con $k \in \mathbb{N}$, y sea E un boreliano de $\mathbb{R}$.

(a) Probar que si $\mathcal{H}^s(E) = 0$ para algún s, entonces $\mathcal{H}^s(f(E)) = 0$.

(b) Probar que $dim_{\mathcal{H}}(E) = dim_{\mathcal{H}}(f(E))$.

Ejercicio 8 Probar que un conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ con $\dim_{\mathcal{H}}(E) < 1$ es totalmente disconexo.

Ejercicio 9 Sea $0 < \xi < 1$ un número real, y sea $\mathcal{C}_\xi$ el conjunto que se contruye en $[0,1]$ de forma análoga al Cantor pero removiendo en cada paso intervalos de proporción ξ. Probar que $\mathcal{C}_\xi$ tiene dimensión de Hausdorff $\log 2 / \log(2/(1-\xi))$.

Ejercicio 10 Sean $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ y $A \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\mathcal{L}^N(A) > 0$ entonces

(a) $\dim_{\mathcal{H}} G(f, A)) \geq N$ donde $G(f, A)$ es el gráfico de f sobre A.

(b) Si f es Lipschitz, $\dim_{\mathcal{H}}(G(f, A)) = N$.

Ejercicio 11 Si $E \subset \mathbb{R}^N$, $F \subset \mathbb{R}^M$ son borelianos con $\mathcal{H}^s(E)$, $\mathcal{H}^t(E) < \infty$, entonces
$$\mathcal{H}^{s+t}(E \times F) \geq c\mathcal{H}^s(E)\mathcal{H}^t(F)$$
donde $c > 0$ es una constante que depende sólo de s y t.