

Medida e Integración.

Ejercicio 1 Sean μ una medida regular, E un espacio μ -medible de medida finita y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones μ -medibles de E a $[-\infty, \infty]$. Supongamos que $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada para μ -a.e. $x \in E$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un conjunto medible $E_\varepsilon \subset E$ y un número positivo k_ε tal que

$$\mu(E \setminus E_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad \text{y} \quad |f_n| \leq k_\varepsilon \text{ en } E_\varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio 2 Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ \mathcal{L}^n -medible y acotado y sea \mathcal{F} un cubrimiento de Vitali para E . Probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una familia de cubos

$$\mathcal{F}_\varepsilon \equiv \{Q_1, Q_2, \dots, Q_{n_\varepsilon}\} \quad (Q_n \in \mathcal{F})$$

con interiores disjuntos de E tal que

$$\sum \mathcal{L}^n(Q_n) - \varepsilon \leq \mathcal{L}^n(E) \leq \mathcal{L}^n\left(\bigcup_{n=1}^{n_\varepsilon} E \cap Q_n\right) + \varepsilon.$$

Ejercicio 3 Sean $E \subset \mathbb{R}^N$ μ -medible de medida finita y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones μ -medibles de E a $[-\infty, \infty]$. Probar que, si $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es finita μ -a.e. en E , entonces existe una sucesión de números positivos $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n k_n^{-1} \rightarrow 0$ μ -a.e. en E .

Ejercicio 4 Sean μ una medida de Radon sobre \mathbb{R}^n invariante por traslaciones y $A \subset \mathbb{R}^n$ μ -medible con $\mu(A) > 0$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(0, \varepsilon) \subset A - A = \{a - b : a, b \in A\}.$$

Ejercicio 5 Sea $E \subset \mathbb{R}$ un conjunto medible Lebesgue, sea

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{|E \cap [-n, n]|}{2n} \right).$$

(a) Probar que μ es una medida de probabilidad.

(b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible Lebesgue, $f \geq 0$. Probar que

$$\int_{\mathbb{R}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{\int_{-n}^n f dx}{2n} \right).$$

Ejercicio 6 Sean $g, \{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μ -sumable y $f, \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μ -medibles. Supongamos $|f_n| \leq g_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $f_n \rightarrow f$ μ -a.e., $g_n \rightarrow g$ μ -a.e. y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int g d\mu.$$

Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0.$$

Ejercicio 7 Sean f una función μ -medible y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un sucesión de funciones μ -medibles tales que $f_n \rightarrow f$ en medida. Probar que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \limsup \mu(f_n > t) &\leq \mu(f > t - \varepsilon), \\ \liminf \mu(f_n > t) &\geq \mu(f > t + \varepsilon). \end{aligned}$$

Concluir que $\mu(f_n > t) \rightarrow \mu(f > t)$ en los valores de t donde la función distribución de f es continua.

Ejercicio 8 Sea μ una medida sobre X y $f : X \rightarrow [0, \infty]$ μ -medible. Entonces

$$\int_X |f|^p d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(f > t) dt.$$

Ejercicio 9 Sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ μ -medible tal que $\mu(f < t) < \infty$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Dado $G > 0$ definimos una clase de funciones medibles sobre E por

$$\mathcal{C} = \left\{ g : 0 \leq g(x) \leq 1 \text{ para todo } x, \text{ y } \int_E g d\mu = G \right\}.$$

Probar que el problema de minimización

$$I = \inf_{g \in \mathcal{C}} \int_E fg d\mu.$$

se resuelve con

$$g(x) = \chi_{\{f < s\}}(x) + c\chi_{\{f = s\}}(x)$$

donde

$$\begin{aligned} s &= \sup\{t : \mu(f < t) \leq G\}, \\ c\mu(f = s) &= G - \mu(f < s). \end{aligned}$$

Ejercicio 10 Sea μ la medida definida en el Ejercicio 5. Para cada $E \subset \mathbb{R}$ medible Lebesgue y $x \in \mathbb{R}$, sea $\mu_x(E) = \mu(E + x)$. Probar que, $\mu_x \ll \mu$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y que

$$\frac{d\mu_x}{d\mu}(y) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n 2^n} \chi_{[-n, n]}(y + x)}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n 2^n} \chi_{[-n, n]}(y)}.$$

Ejercicio 11 Sean ν y μ dos medidas de Radon sobre \mathbb{R}^N , con $\nu \ll \mu$. Si g es ν -integrable, $g(D_\mu \nu)$ es μ -integrable probar que

$$\int_E g d\nu = \int_E g D_\mu \nu d\mu$$

para todo $E \subset \mathbb{R}^N$ μ -medible.

Ejercicio 12 Si μ, ν y η son medidas de Radon sobre \mathbb{R}^N .

(a) Si μ y ν son absolutamente continuas con respecto a η , probar que

$$D_\eta(\mu + \nu) = D_\eta \mu + D_\eta \nu \quad \eta - a.e.$$

(b) Si $\nu \ll \mu$ y $\mu \ll \eta$, demostrar que

$$D_\eta \nu = D_\mu \nu D_\eta \mu \quad \eta - a.e.$$

(c) Si μ y ν son mutuamente absolutamente continuas y no son idénticamente cero, mostrar que

$$D_\mu \nu \neq 0 \quad \text{y} \quad D_\nu \mu = D_\mu \nu^{-1}.$$