Teorema de Fermat - Práctica 3

1er. Cuatrimestre 2011

Notaremos por K un cuerpo arbitrario.

1. Sea $\mathcal{P}_\Lambda(z)$ la función de Weierstrass. Probar que el desarrollo de Laurant en el punto $z = 0$ esta dado por

$$\mathcal{P}_\Lambda(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2}(\Lambda)z^{2n},$$

   donde para $n \geq 4$, $G_n(\Lambda) = \sum_{\substack{w\in\Lambda \\ w\neq 0}} \frac{1}{w^n}$.

2. Usando el desarrollo anterior, probar que $\mathcal{P}_\Lambda(z)$ y su derivada satisfacen la ecuación

$$\mathcal{P}'_\Lambda(z)^2 = 4\mathcal{P}_\Lambda(z)^3 - 60G_4(\Lambda)\mathcal{P}_\Lambda(z) - 140G_6(\Lambda).$$

3. Sea $E/\mathbb{Q}$ una curva elíptica dada por un modelo entero (i.e. una ecuación con coeficientes en $\mathbb{Z}$) y sea p un número primo. Probar que si E tiene reducción multiplicativa en p, entonces el modelo es minimal en p.

4. Dados A, B, C enteros no nulos, que satisfacen $A+B = C$ y $\gcd(A, B) = 1$, definimos la curva elíptica

$$E_{A,B,C} : y^2 = x(x + A)(x - B).$$

   Probar que el discriminante de una ecuación minimal de $E_{A,B,C}$ es $2^4(ANB)^2$ o $2^{-8}(ABC)^2$. (sugerencia: considerar los posibles cambios de variables $x = u^2x' + r$, $y = u^3y' + u^2sx' + t$ que manden la ecuación de Weierstrass en otra ecuación de Weierstrass. Estos satisfacen que $u^4 \mid c_4$ y $u^6 \mid c_6$. Encontrar una combinación lineal de c_4 y c_6 tal que $u^4 \mid 2^5 3^2$).

5. En este ejercicio probaremos que la conjetura ABC implica la conjetura de Szpiro. Sea $E/\mathbb{Q}$ una curva elíptica, y sean c_4 y c_6 los respectivos coeficientes (al cancelar términos en un modelo minimal). Luego $1728\Delta(E) = c_4^3 - c_6^2$. Supongamos $\gcd(c_4, c_6) = 1$.

   Tomando $A = c_4^3$, $B = -c_6^2$ y $C = \Delta$, y usando la conjetura ABC, tenemos que

$$\text{máx}\{|c_4|^3, |c_6|^2, |\Delta|\} \leq \kappa_\epsilon \prod_{p\mid c_4c_6\Delta} p^{1+\epsilon}.$$

Claramente el producto de la derecha es menor que $|c_4 c_6 N_E|^{1+\epsilon}$. Utilizando una combinación lineal apropiada de estas 3 desigualdades, concluir que entonces

$$|\Delta|^{1-5\epsilon} \leq \kappa_\epsilon^6 N_E^{6+6\epsilon}.$$

6. Sea $E/\mathbb{Q}$ una curva elíptica en modelo minimal, y sea p un número primo. Probar que $|j(E)|_p > 1$ si y sólo si E tiene reducción potencialmente multiplicativa en p (o sea un nodo).

7. Recordar que definimos las curvas de Tate como:

$$E_q : y^2 + xy = x^3 + a_4 x + a_6,$$

donde los coeficientes a_4 y a_6 estaban dados por las series:

$$a_4(q) = -5 \sum_{n \geq 1} \frac{n^3 p^n}{(1-q^n)}, \qquad a_6(q) = 1\frac{1}{12} \sum_{n \geq 1} \frac{(7n^5 + 5n^3)q^n}{1-q^n}.$$

Probar que tomando $q = e^{2\pi i z}$, este es el desarrollo de Fourier de las respectivas formas modulares complejas (usando el desarrollo de Fourier de $G_{2k}(z)$ calculado en la teórica).