

## Práctica 1

1. A partir de los axiomas de cuerpo de los números reales demostrar las siguientes propiedades cualesquiera sean  $a, b, c$  y  $d$  en  $\mathbb{R}$ :
  - (a)  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ .
  - (b) Si  $ab = ac$  y  $a \neq 0$  entonces  $b = c$ .
  - (c) Si  $ab = 0$  entonces  $a = 0$  o  $b = 0$ .
  - (d)  $(-a)b = -(ab)$  y  $(-a)(-b) = ab$ .
  - (e)  $(a/b)(c/d) = (ac)/(bd)$  si  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ .
  
2. A partir de los axiomas de orden de los números reales probar las siguientes propiedades cualesquiera sean  $a, b$  y  $c$  en  $\mathbb{R}$ :
  - (a) Si  $a < b$  y  $c > 0$ , entonces  $ac < bc$ .
  - (b) Si  $a < b$  entonces  $-b < -a$ .
  - (c) Si  $a \neq 0$  entonces  $a^2 > 0$ .
  - (d) Si  $ab > 0$  entonces  $a$  y  $b$  son ambos positivos o ambos negativos.
  - (e) Si  $a^2 + b^2 = 0$ , entonces se tiene que  $a = b = 0$ .
  - (f) Si  $a \leq b$  y  $b \leq a$  entonces  $a = b$ .
  
3. Sea  $A$  un subconjunto no vacío de  $\mathbb{R}$  acotado superiormente. Probar que son equivalentes las siguientes definiciones alternativas del supremo de  $A$ .
  - (a)  $s$  verifica que:
    - i.  $\forall a \in A$  se tiene  $s \geq a$ ;
    - ii. si  $t \geq a$  para todo  $a \in A$ , entonces  $t \geq s$ .
  - (b)  $s$  verifica que:
    - i.  $\forall a \in A$ , se tiene  $s \geq a$ ;
    - ii.  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists a_\varepsilon \in A$  tal que  $s - \varepsilon < a_\varepsilon$ .
  - (c)  $s$  verifica que:
    - i.  $\forall a \in A$ , se tiene  $s \geq a$ ;
    - ii. existe una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  contenida en  $A$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$ .

Pensar equivalencias análogas para el ínfimo.
  
4. Sean  $A$  y  $B \subseteq \mathbb{R}$  dos conjuntos no vacíos tales que  $A \subseteq B$ .

- (a) Suponiendo que  $A$  y  $B$  están acotados superior e inferiormente, establecer y demostrar las relaciones de orden entre los números  $\sup(A)$ ,  $\inf(A)$ ,  $\sup(B)$ ,  $\inf(B)$ .
- (b) ¿Qué sucede cuando  $A$  o  $B$  no está acotado superior o inferiormente?
5. Hallar supremo e ínfimo de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}$ . ¿Son, respectivamente, máximo y mínimo?
- (a)  $A_1 = (a, b]$ .
- (b)  $A_2 = \left\{ \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$ .
- (c)  $A_3 = A_2 \cup \{0\}$ .
- (d)  $A_4 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$ .
- (e)  $A_5 = \{x^2 - x - 1 : x \in \mathbb{R}\}$ .
- (f)  $A_6 = \left\{ \frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ .
- (g)  $A_7 = \{x^2 - 5x + 4 : x \in [2, 4]\}$ .
6. Dados  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío y  $c \in \mathbb{R}$  se definen  $c.A = \{c.x : x \in A\}$  y  $-A = (-1).A$ .
- (a) Probar que si  $A$  está acotado superiormente, entonces  $-A$  está acotado inferiormente y vale  $\inf(-A) = -\sup A$ .
- (b) Probar que si  $c > 0$  y  $A$  está acotado superiormente, entonces  $c.A$  también lo está y  $\sup(c.A) = c \sup A$ .
- (c) ¿Qué se puede decir en el caso que  $c < 0$ ?
- (d) Pensar resultados análogos a los anteriores para  $\inf(c.A)$  (y demostrar alguno(s) si tiene ganas).
7. Dados  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  ambos no vacíos se definen
- $$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$
- $$A.B = \{ab : a \in A, b \in B\}$$
- (a) ¿Qué condiciones deben verificar  $A$  y  $B$  para que exista  $\sup(A + B)$ ? Estudiar la relación entre  $\sup(A + B)$  y  $\sup(A) + \sup(B)$ .
- (b) ¿Es posible dar resultados parecidos a los de la parte (a) para  $A.B$  y los números  $\sup(A.B)$  y  $\sup(A) \cdot \sup(B)$ ? ¿Cuáles?
8. Si  $x$  es un número real arbitrario, probar que existe un único entero  $n$  tal que  $n \leq x < n + 1$ . Este  $n$  se denomina la *parte entera* de  $x$  y se designa por  $[x]$ .
9. Sea  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de números reales tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ .
- (a) Probar que

- i. Si  $r < L$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n > r \forall n \geq n_0$ .  
 ii. Si  $r > L$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n < r \forall n \geq n_0$ .
- (b) ¿Puede reformularse (a) i. si se sabe que  $r \leq L$ ?  
 (c) ¿Qué puede decirse de  $L$  si se sabe que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n > r \forall n \geq n_0$ ?
10. Probar que para cada  $x \in \mathbb{R}$  existe una sucesión  $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}$  estrictamente decreciente tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ .
11. Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números positivos. Si  $\lim a_n = A$  probar que  $\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$ .
12. Definir una sucesión por  $b_{n+1} = \sqrt{2 + b_n}$ , para  $n \geq 0$ , con  $b_1 = \sqrt{2}$ . Probar que  $\{b_n\}$  es monótona, acotada, y  $b_n < 2$ . Calcular  $\lim b_n$ .
13. Sean  $x_1 > y_1 > 0$ , y para  $n \geq 0$ , sean  $x_{n+1} = (x_n + y_n)/2$ ,  $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ . Mostrar que  $y_n < y_{n+1} < x_1$ ,  $y_1 < x_{n+1} < x_n$ ,  $0 < x_{n+1} - y_{n+1} < (x_1 - y_1)/2^n$ . Deducir entonces que  $\lim x_n = \lim y_n$ .
14. Dada una sucesión de números reales  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y un número  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se dice que  $\alpha$  es un *punto límite de*  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  si y sólo si existe una subsucesión  $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \alpha$ . Hallar los puntos límites de las sucesiones:

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad 1 - \frac{1}{n} & \text{(b)} \quad (-1)^n & \text{(c)} \quad \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\
 \text{(d)} \quad (-1)^n \left(2 + \frac{3}{n}\right) & \text{(e)} \quad \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots & \text{(f)} \quad \frac{n + (-1)^n (2n + 1)}{n}
 \end{array}$$

15. Hallar los límites superior e inferior de las sucesiones del ejercicio anterior.
16. Se tienen sucesiones acotadas de números reales  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  y  $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ .  
 Enunciar y demostrar las relaciones de orden entre los cuatro números que siguen:
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$
  - $\limsup_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)$
  - $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n$
  - $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
17. (a) Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de términos positivos tal que  $\limsup(a_{n+1}/a_n) = \Theta < 1$ . Probar que  $\lim a_n = 0$ .  
 (b) Usar el ítem anterior para probar que
- i. Si  $\alpha > 0$  entonces  $\lim(\alpha^n/n!) = 0$ .
  - ii.  $\lim(n!/n^n) = 0$ .
  - iii. Si  $0 < \alpha < 1$  y  $k$  es un entero, entonces  $\lim n^k \alpha^n = 0$ .

18. Sea  $x_{n+1} = a/(1 + x_n)$  donde  $x_1 > 0$  y  $a > x_1^2 + x_1$ . Probar que los intervalos  $[x_1, x_2], [x_3, x_4], \dots$  forman un encaje de intervalos, y que el único punto  $\xi$  común a todos ellos es una raíz de  $x^2 + x = a$ .  
*Sugerencia.* Mostrar que  $x_{n+1} - x_n$  y  $x_n - x_{n-1}$  tienen diferentes signos, y  $|x_{n+1} - x_n| \leq \theta |x_n - x_{n-1}|$  para algún  $\theta < 1$ .
19. Sea  $\{I_n\}$  una sucesión de intervalos cerrados, y sea  $\lambda_n$  la longitud de  $I_n$ . Supongamos que  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$ . Mostrar que (i)  $\lim \lambda_n$  existe; (ii) Si  $\lim \lambda_n > 0$  entonces  $\bigcap I_n$  es un intervalo cerrado de longitud  $\lim \lambda_n$ .
20. Probar la siguiente proposición: Un número  $M$  es el límite superior de una sucesión  $\{a_n\}$  acotada superiormente si, y sólo si, para todo  $\varepsilon > 0$  las siguientes propiedades valen:
- (a) Existen infinitos  $n$  para los que  $a_n > M - \varepsilon$ ;
  - (b) Existe solamente una cantidad finita de  $n$  para los que  $a_n > M + \varepsilon$ .

21. Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales y  $\{\sigma_n\}$  la sucesión de las medias aritméticas (promedios) definida como

$$\sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

- (a) Si  $\lim a_n = 0$ , demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$ .
- (b) Deducir de (a) que si  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de números reales que converge a  $L$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)/n = L$ .
- (c) Construir una sucesión  $\{a_n\}$  que no converge, para la que  $\lim \sigma_n = 0$ .
- (d) ¿Puede suceder que  $\limsup a_n = \infty$  mientras que  $\lim \sigma_n = 0$ ?
- (e) Sea  $b_n = a_{n+1} - a_n$ . Demostrar que si  $\lim \sigma_n = L$  y  $\lim nb_n = 0$ , entonces  $\lim a_n = L$ .  
*Sugerencia.* Verificar que

$$a_n - \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} kb_k.$$