OPTIMIZACIÓN - 1er Cuatrimestre 2011

Práctica 5

Grafos

Ejercicio 1 Sea $G = (V, E)$ donde $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ y $E = \{(0, 1), (1, 2), ...$
$...(2, 3), (3, 4), (0, 4), (0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9), (5, 9)\}$.

- Dibujar G y hallar la tabla de adyacencia y la matriz de adyacencia.
- Hallar el grado de los vértices $\{3\}$ y $\{7\}$ y hallar tres caminos simples que los unan. Hallar dos ciclos que los unan.
- Decidir si es G conexo, hallar un camino hamiltoniano y un circuito hamiltoniano.
- Sea G_1 el grafo inducido por el conjunto $U = \{3, 4, 5, 6, 8, 9\}$. Decidir si G_1 es conexo y si tiene algún ciclo.
- Sea G_2 el grafo que resulta de extraer a V los nodos $\{3, 8\}$ y las ramas que inciden en esos dos vértices. Decidir qué tipo de grafo es G_2.
- Hallar un Spanning Tree de G.
- Decidir cual es el máximo orden de un subgrafo de G que sea completo. Agregando una rama construir un subgrafo completo de mayor orden.

Ejercicio 2 Probar las siguientes afirmaciones:

- Un grafo tiene al menos dos vértices cuyos grados son iguales.
- La suma de los grados de los vértices es igual al doble del número de ramas.
- Un grafo es bipartito si y solo si todo circuito tiene un número par de ramas.
- Todo árbol de al menos una rama tiene al menos dos vértices de grado 1.
- $G = (V, E)$ es un árbol si y solo si G es conexo y $|E| = |V| - 1$.

Problemas $NP-$hard y $NP-$completos

Ejercicio 3 La expresión booleana $(x_1 + x_2 + x_3)(x_1' + x_2)(x_2' + x3)(x_3' + x_1)(x_1' + x_2' + x_3')$ no tiene una asignación que la satisfaga.

Ejercicio 4 Probar que SAT se reduce a Programación Lineal Entera ILP.

Ejercicio 5 Sean los siguientes problemas:

i)$CLIQUE$: Sea $G = (V, E)$ un grafo. Decimos que $A \subset V$ forma un clique si $u, v \in A$ implica que $(u, v) \in E$. El problema es, dado un k, hallar un clique A tal que $|A| = k$.

ii)$INDEPENDIENTE$: Decimos que $A \subset V$ es independiente si $u, v \in A$ implica que $(u, v) \notin A$. El problema es, dado un k, hallar un conjunto independiente A, tal que $|A| = k$.

iii)$CUBRIMIENTO$: Decimos que $A \subset V$ forma un cubrimiento por vértices si $(u, v) \in E$ implica $u \in A$ o bien $v \in A$. El problema es, dado un k, hallar un cubriemiento A, tal que $|A| = k$.

- Mostrar que los tres problemas anteriores equivalentes.
- Mostrar que los tres son $NP-$completos. Sugerencia, probar que $3SAT$ se reduce a $INDEPENDIENTE$.

Backtraking y Branch and Bound

Ejercicio 6 Aplicar Backtraking al problema SAT.

Ejercicio 7 Se trata de colocar en un tablero de ajedrez de $n \times n$, n reinas que no se ataquen entre sí. Hacer un algoritmo de Backtraking que resuelva este problema.

Ejercicio 8 Usando Backtraking listar todos los cliques de un grafo.

Ejercicio 9 Aplicar Branch and Bound al problema del viajante de comercio TSP.

Ejercicio 10 Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido y $c : E \to \mathbb{R}^+$ una función de costo. Sean $u, v \in V$, se trata de hallar un camino dirigido de u a v de mínimo costo. Plantear este problema por Branch and Bound.

Programación Dinámica

Ejercicio 11 Sea el grafo dirigido $G = (V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 4), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$ con las siguientes longitudes de las ramas: $c_{12} = 2; c_{13} = 3; c_{14} = 6; c_{24} = 7; c_{25} = 8; c_{34} = 2; c_{36} = 9; c_{56} = 1$.

- Para cada vertice u sea $v(u) :=$ el vértice más próximo a u. A v la llamamos política miope. Hallar un camino del nodo $\{1\}$ al nodo $\{6\}$ usando la política miope.
- Hacer un planteo de Programación Dinámica para encontrar un camino de longitud máxima entre el nodo $\{1\}$ y el nodo $\{6\}$.

Ejercicio 12 Se tienen monedas de $5, 10, 25, 50$ y 100 centavos. Sea x entero múltiplo de 5. Llamemos $f(x)$ al mínimo número de monedas que suman x. Escriba la ecuación funcional de f según la Programación Dinámica. Usando el algoritmo de Programación Dinámica hallar la manera de juntar 165 centavos con un mínimo número de monedas.

Ejercicio 13 Hacer el planteo de Programación Dinámica para el problema de la mochila (knapsack).

Ejercicio 14 Para obtener el título de Doctor en Matemática uno de los requisitos es juntar por lo menos 20 puntos en materias optativas. Sea p_i el puntaje de la materia $i = 1, ..., N$, donde N es el número total de materias optativas. Los doctorandos han estimado un costo difcultad de las materias que contiene aspectos como la modalidad de examen, carga horaria, entre otras cosas. Sea c_i el costo de la materia i. Hacer el planteo de Programación Dinámica para los siguientes problemas, ambos con el objetivo común de sumar al menos 20 puntos.

- Que la suma de las difcultades sea mínima.
- Que la difcultad más alta sea mínima.

Ejercicio 15 La Ciudad de Buenos Aires tiene P habitantes distribuidos en 15 comunas con p_i habitantes en cada comuna i. Se desea formar un concejo de R representantes ($R > 15$) y se pretende que cada comuna tenga un número de representantes proporcional a p_i. Sea $r_i = \frac{Rp_i}{P}$. Sea x_i el número de representantes de la comuna i. Hacer el planteo de Programación Dinámica con el objetivo de que sea mínima la mayor de las diferencias $|x_i - r_i|$.

Métodos Heurísticos

Ejercicio 16 Considerar el problema general de minimizar $f : S \to \mathbb{R}$. Para los siguientes problemas, proponer entornos para realizar Búsqueda Local o Recocido Simulado.

- TSP, dónde $S = \{\text{circuitos hamiltonianos en } G\}$.
- Spanning Tree Mínimo. $S = \{\text{spanning trees en } G\}$.

Ejercicio 17 Considere el siguiente problema. Se quiere maximizar la siguiente función: $f(x) = x\sin(10\pi x) + 1$ en $[-1, 2]$. Se divide al intervalo en 3 millones de partes, cada uno de medida 10^{-6}, ($2^{21} < 3\,10^6 < 2^{22}$). Sea la siguiente representación de un número x en el intervalo. $\alpha = (\alpha_0, ...\alpha_{21}) \sim x$

$$x = -1 + \sum_{i=0}^{21} \alpha_i 2^i \frac{3}{2^{22} - 1}$$

Consideramos ahora una población inicial de 48 individuos elegidos al azar, es decir 48 vectores binarios de 22 componentes donde los ceros y los unos son elegidos al azar.

La mutación de cada individuo se hace cambiando al azar cada una de sus 22 componentes con una probabilidad pequeña de cambio p. La cruza consiste en seleccionar pares de individuos de la población (padres) e intercambiar componentes para obtener otros dos individuos (hijos). Por ejemplo tomando las primeras $1 < i < 22$ componentes y separando en dos porciones, formamos un hijo con la primera porción del primero y la segunda del segundo y el otro hijo a la inversa. Describir en este caso el algoritmo genético.