OPTIMIZACIÓN - 1ER CUATRIMESTRE 2011

Práctica 2

Ejercicio 1 Consideremos el análogo unidimensional del problema de superficies mínimas, aproximado por el método de diferencias finitas. En este caso, dado un entero $N > 0$, definimos el funcional $J : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}$:

$$J(v) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left(1 + N^2 |v_{i+1} - v_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1}$$

i) Analizar la convexidad (y la convexidad estricta) del funcional.

ii) Analizar la existencia y unicidad de soluciones de los problemas asociados con el funcional J y los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^{N+1}$:

a) $U_1 = \{v : v_0 = v_N = 0\}$.
b) $U_2 = \{v : v_0 = 0, v_N = 1\}$.
c) $U_3 = \{v : v_0 = v_N = 0, v_i \geq a_i, 1 \leq i \leq N-1\}$, donde $\{a_i\}_{i=1}^{N-1}$ son dato.

Describir, donde sea posible, las soluciones de cada caso.

Teorema de Convergencia Global

Ejercicio 2 Sea la función punto a conjunto en $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{A}(x) = \{y : y^T x \leq b$$

en dónde b es una constante fija. ¿Es $\mathbf{A}$ cerrada?

Ejercicio 3 Dadas $\mathbf{A} : X \to Y$ y $\mathbf{B} : Y \to Z$ funciones punto a conjunto. Si $\mathbf{A}$ es cerrada en x, $\mathbf{B}$ es cerrada en $\mathbf{A}(x)$ e Y es compacto, entonces la composición $\mathbf{C}$=$\mathbf{BA}$ es cerrada en x.

Ejercicio 4 Dadas $\mathbf{A} : X \to Y$ una función punto a punto y $\mathbf{B} : Y \to Z$ una funcion punto a conjunto. Si $\mathbf{A}$ es continua en x, $\mathbf{B}$ es cerrada en $\mathbf{A}(x)$ y Y es compacto, entonces la composición $\mathbf{C}$=$\mathbf{BA}$ es cerrada en x.

Ejercicio 5 Muestre que si $\mathbf{A}$ es continua punto a punto, el Teorema de Convergencia Global es válido aun sin la hipótesis que todos los puntos x_k están contenidos en un conjunto S compacto.

Métodos de Descenso

Ejercicio 6 Sea el algoritmo básico de descenso para minimizar una función f sin reestricciones: Dado $x_k \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(x_k) \neq 0$, elegir $d_k \in \mathbb{R}^n$ dirección de descenso y $t_k > 0$ tales que

$$f(x_k + t_k d_k) < f(x_k)$$

Tomar $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$

a) Mostrar que el algoritmo está bien definido. Es decir que cada vez que $\nabla f(x_k) \neq 0$, es posible encontrar t_k que satisface la condicion de descenso.

b) Mostrar que si $\nabla f(x_k)^t d_k < 0$ entonces d_k es de descenso. Concluir que $d_k = -\nabla f(x_k)$ es dirección de descenso.

c) Implementar el algoritmo en Matlab.

Ejercicio 7 Si un método de descenso con búsqueda lineal exacta es utilizado para minimizar una función cuadrática $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, mostrar que el paso óptimo está dado por:

$$t_k = -\frac{d^k \nabla q(x_k}{d_k^t \nabla^2 q(x_k) d_k}$$

Ejercicio 8 Para $\delta > 0$ sea la función punto a conjunto $\mathbf{S}^\delta : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{S}^\delta(x, d) = \{y : y = x + \alpha d, \quad 0 \leq \alpha \leq \delta; \quad f(y) = \min_{0 \leq \beta \leq \delta} f(x + \beta d)\}$$

Explicar lo que hace $\mathbf{S}^\delta$ y probar que si f es continua entonces $\mathbf{S}^\delta(x, d)$ es cerrada para todo (x, d).

Ejercicio 9 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g \in C^2(\mathbb{R})$, $g'(0) < 0$ y $g''(x) < 0$ para todo x. Sea $\alpha \in (0, 1)$, probar que si $x > 0$ $g(x) \leq g(0) + \alpha x g'(0)$.

Ejercicio 10 Para Entregar Sea el algoritmo de descenso con la condición de Armijo y backtracking: Dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in (0, 1)$, $\beta > 0$ y $\theta \in (0, 1)$.

Dado x_k, el siguiente elemento en la sucesión es elegido de la siguiente manera:

(1) Si $\nabla f(x_k) = 0$ Parar.

(2) Elegir $d_k \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|d_k\| \geq \beta \|\nabla f(x_k)\|$$
$$\nabla f(x_k)^t d_k \leq -\theta \|\nabla f(x_k)\| \|d_k\|$$

(3) t=1.

(4) Mientras $f(x_k + t d_k) > f(x_k) + \alpha t \nabla f(x_k)^t d_k$, elegir un nuevo $t \in [\frac{t}{10}, \frac{9t}{10}]$.

(5) $x_{k+1} = x_k + t d_k$. Volver a (1).

Mostrar que el Algoritmo está bien definido e implementarlo en Matlab.