OPTIMIZACIÓN - 1ER CUATRIMESTRE 2011

Práctica 1

Minimización sin restricciones

Ejercicio 1 Encontrar ejemplos donde todos los puntos de Ω sean minimizadores locales pero $f(x) \neq f(y)$ para $x \neq y$.

Ejercicio 2 Mostrar con ejemplos qué pasa cuando se eliminan de las hipótesis del teorema de Bolzano-Weierstrass las condiciones de continuidad o compacidad.

Ejercicio 3 Probar que si f es continua en $\mathbb{R}^n$ y $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$ entonces f tiene un minimizador global en $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 4 Sea $f(x) = (x_1 - x_2^2)(x_1 - \frac{1}{2}x_2^2)$. Verificar que, para $x = (0,0)$, $\lambda = 0$ es un minimizador local de $\phi(\lambda) = f(x + \lambda d)$ para todo $d \in \mathbb{R}^2$, pero x no es un minimizador local de f.

Ejercicio 5 Sea $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 - 6x - 7y - 8z + 9$,

a) Usando las condiciones de primer orden, encuentre un punto mínimo de f.

b) Verifique que el punto es un mínimo relativo verificando que se cumplen las condiciones de segundo orden.

c) Pruebe que el punto es un mínimo global.

Ejercicio 6 Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una función cuadrática, $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x + c$. Escribir un programa en Matlab que, de existir (y que se asegure que así sea), encuentre el mínimo de f resolviendo un sistema de ecuaciones. Pruébelo para el ejemplo del Ejercicio 5.

Ejercicio 7 - Para Entregar: Sea $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$ tal que x^* es el único minimizante y que $Hf(x^*)$ es definida positiva. Escribir en Matlab un programa que dado un punto inicial x_0 aproxime usando el método de Newton a x^*. Pruébelo para el caso del Ejercicio 5 y para la función $f(x, y) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 6x + y^4 + 8y^3 + 25y^2 + 36y + 22$.

Ejercicio 8 Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función estrictamente creciente y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Probar que minimizar $f(x)$ es equivalente a minimizar $g(f(x))$.

Ejercicio 9 Sea $\{f_i\}_{i \in I}$ un conjunto de funciones convexas definidas sobre un conjunto convexo Ω. Muestre que la función $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ es convexa en la región en la cual es finita.

Ejercicio 10 Sea γ un función monótona no decreciente de una variable, es decir $r' > r$ implica $\gamma(r') \geq \gamma(r)$, que además es convexa y sea f una función convexa definida en un conjunto convexo. Muestre que la función $\gamma(f)$ definida como $\gamma(f)(x) = \gamma(f(x))$ es convexa sobre Ω.

Ejercicio 11 Sea $f \in C^2$ en una región Ω. Muestre que una condición necesaria y suficiente para que un punto x^* en el interior de Ω sea un mínimo relativo de f es que $\nabla f(x^*) = 0$ y que f sea localmente convexa en x^*.