

OPTIMIZACIÓN - 1^{er} CUATRIMESTRE 2011

Práctica 0

Repaso de Análisis

Ejercicio 1 Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.

a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$ b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$

Ejercicio 2 Sea $f(x, y) = xe^y$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (1, 0)$. Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0,98; 0,02)$. Estimar el error cometido.

Ejercicio 3 Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^4$ y de $g(x, y) = x^4 - y^4$ y sus hessianos en dichos en dichos puntos. ¿Son máximos, mínimos?

Ejercicio 4 Sea $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ tal que tiene un extremo estricto en $m \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

Ejercicio 5 Determinar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = xy(x - y)^2$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$.

b) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $A = \mathbb{R}^2$.

c) $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

Ejercicio 6 La temperatura de una placa en un punto cualquiera (x, y) viene dada por la función $T(x, y) = 25 + 4x^2 - 4xy + y^2$. Una alarma térmica, situada sobre los puntos de la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, se dispara a temperaturas superiores a 180 grados o inferiores a 20 grados. ¿Se disparará la alarma?

Repaso Cálculo Numérico

Ejercicio 7 Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones y justificar:

a) n es $O(n)$

b) $3n^2 + 7n + 4$ es $O(n^2)$

c) n^i es $O(n^j)$ si $i < j$

Ejercicio 8 Mostrar que $n!$ no es $O(r^n)$, cualquiera sea el entero positivo r . Concluir que una complejidad de $O(n!)$ es "peor" que exponencial de cualquier base.

Ejercicio 9 Decir cual es la complejidad de los siguientes algoritmos y explicarlos:

a) Dado un número natural n :

```
function F(n)
  if n = 0 devolver 1
  else devolver n × F(n - 1)
end function
```

b) Dado un vector v , y su dimensión d :

```
para i desde 1 hasta d hacer
    para j desde i hasta d hacer
        si v(j) < v(min)
            poner min = j
        fin si
    poner a = v(i)
    poner v(i) = v(min)
    poner v(min) = a
fin para
fin para
```

Ejercicio 10 Escribir algoritmos en Matlab para realizar suma, resta y multiplicación de matrices. Determinar la complejidad y expresarla en función de la dimensión de las matrices.

Ejercicio 11 Escribir en Matlab y determinar la complejidad del algoritmo de Cholesky para resolver un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas simétrico y definido positivo.

Ejercicio 12 Dada una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^2 tal que se anula solamente una vez en el intervalo. Escribir en Matlab el algoritmo de Newton para aproximar la raíz.

Ejercicio 13 Escribir en Matlab un algoritmo para el siguiente problema de Cuadrados Mínimos: Dados puntos distintos en el plano $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$, hallar el polinomio $p \in \mathcal{P}_k$ que mejor aproxime en el sentido de cuadrados mínimos, es decir que sea mínima la siguiente expresión: $\sum_{i=1}^n |y_i - p(x_i)|^2$

Ejercicio 14 - Para Entregar: Considerar $\text{erf} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

a) Aproximar la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con polinomios de grado 1, 3 y 5; considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto con estos polinomios en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que la aproximación es mala fuera del intervalo $[-10, 10]$.

b) Se quiere aproximar nuevamente la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con una combinación lineal de funciones que compartan con erf la propiedad de ser acotada e impar. Para ello, ajustar la función erf con una función del tipo

$$c_1 x e^{-x^2} + c_2 \arctan(x) + c_3 \frac{x}{x^2 + 1},$$

considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto a esta aproximación en el intervalo $[-15, 15]$ y comparar con el ítem anterior.