PRÁCTICA 7 -FUNCIONES NO-COMPUTABLES Y CONJUNTOS C.E.-

Ejercicio 1. Probar, usando una diagonalización, que las siguientes funciones no son computables:

$$f_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si Halt}(x,y) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_2(\#p,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_p(y) = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_3(\#p,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_p(y) > z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad f_4(\#p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_p(\#p) \neq \#p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 2. Probar, reduciendo cualquier función del Ejercicio 1, que las siguientes funciones no son computables:

$$g_1(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \neg\text{Halt}(y,x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g_2(\#p,\#q,z,w) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_p(z) > \Psi_q(w) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_3(\#p,y,z) = \begin{cases} z+1 & \text{si } \Psi_p(y) \neq z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g_4(\#p,\#q,z) = \begin{cases} (\Psi_p \circ \Psi_q)(z) & \text{si } \Psi_q(z)\downarrow \text{ y } (\Psi_p \circ \Psi_q)(z)\downarrow \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 3. Probar que la siguiente función no es computable reduciendo la función f_4 del Ej. 1.

$$g_3'(\#p,y,z) = \begin{cases} z & \text{si } \Psi_p(y) \neq z \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sugerencia: Revisar que la reducción maneje correctamente el caso $f_4(0)$.

Ejercicio 4. Decimos que una función parcial computable f es *extensible* si existe g computable tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in \text{dom } f$. Probar que existe una función parcial computable que no es extensible (*Sugerencia*: considerar una función tal que para todo punto se pueda decidir si fue extendida o no).

Ejercicio 5. Dada una funcion $f : \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ y un número k, llamamos *aplicación parcial del i-ésimo parámetro* a obtener una nueva función $g : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ tal que $g(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, k, \ldots, x_n)$ dónde k aparece en el lugar del i-ésimo parámetro. Por ejemplo a partir de la función suma(x, y) se puede obtener incrementar$(x) =$ suma$(x, 1)$.

a. Mostrar que dada una función parcial computable $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y un número $1 \leq i \leq n$ existe una función parcial computable $f_i'(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n, x_i) = f(x_1, \ldots, x_n)$, es decir, en la cual el i-ésimo parámetro se mueve hacia el final.

b. Demostrar que, dada una función parcial computable $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ y un número $1 \leq i \leq n$ existe una función *primitiva recursiva* $A_{f,i} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que toma un número y devuelve un programa que computa a la función resultante luego de aplicar el i-ésimo parámetro. Es decir $A_{f,i}(k) = \#p$ implica $\Psi_p(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, k, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. *Sugerencia*: Usar el teorema del parámetro.

Ejercicio 6. Probar, reduciendo cualquier función del Ejercicio 1 y usando el teorema del parámetro, que las siguientes funciones no son computables:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si Halt}(1337,x) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g_2(\#p,\#q,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_p(z) > \Psi_q(z) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_3(\#p) = \begin{cases} 13 & \text{si } \Psi_p^{(0)} = 7 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g_4(\#p) = \begin{cases} 1 & \text{si } 5 \in \text{Dom } \Psi_p^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 7. Demostrar que existe un programa p tal que $\Psi_p(x)\downarrow$ si y sólo si $x = \#p$.

Ejercicio 8. Demostrar, usando el teorema de la recursión, que las siguientes funciones no son computables:

$$h_1(\#p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \#p \in \operatorname{Im} \Psi_p^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h_2(\#p, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Psi_p(y) > \#p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$h_3(\#p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Im} \Psi_p^{(1)} \text{ es infinita} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad h_4(\#p) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\operatorname{Dom} \Psi_p^{(1)}| = \#p \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejercicio 9. Sean $C_1, \ldots, C_k$ conjuntos de índices de programas y sea $D = C_1 \cap \ldots \cap C_k$.

a. Demostrar que D es un conjunto de índices de programas.

b. Proponer un conjunto, que no sea un conjunto de índices de programas y no sea computable.

Ejercicio 10. Probar que son equivalentes

I. D es un conjunto de índices de programas ($D = \{\#p : \Psi_p \in \mathcal{C}\}$, con $\mathcal{C}$ una clase de funciones).

II. Para todo par de programas p y q, si $\#p \in D$ y $\Psi_p = \Psi_q$ entonces $\#q \in D$.

Ejercicio 11. Demostrar, usando reducciones y el teorema de Rice, que las siguientes funciones no son computables:

$$g_1(\#p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Dom} \Psi_p^{(1)} = \emptyset \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g_2(\#p, \#q) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Dom} \Psi_p^{(1)} \cup \operatorname{Dom} \Psi_q^{(1)} = \mathbb{N} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$g_3(\langle \#p, y \rangle) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in \operatorname{Dom} \Psi_p^{(1)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad g_4(\langle \#p, \#q \rangle) = \begin{cases} \Psi_p(\Psi_q(72)) & \text{si } \Psi_p^{(1)} \circ \Psi_q^{(1)} \text{ es total} \\ 73 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observación: Notar que la composición de dos funciones parciales puede ser una función parcial.

Ejercicio 12. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

a. Si B es computable entonces es c.e.

b. Si B es c.e. entonces B es computable o su complemento lo es.

c. Si B es c.e. entonces su complemento es c.e.

Ejercicio 13. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son p.r., cuáles son computables, cuáles son c.e., cuáles son co-c.e. y demostrar en cada caso:

$C_1 = \{\#p : \Psi_p^{(1)}(\#p) = 2 * \#p\}$ $\quad$ $C_4 = \{\langle \#p, \#q \rangle : \forall x \in (\operatorname{Dom} \Psi_p \cap \operatorname{Dom} \Psi_q)\ \Psi_p(x) < \Psi_q(x)\}$

$C_2 = \{\#p : 1 \in \operatorname{Dom} \Psi_p^{(1)}\}$ $\quad$ $C_5 = \{\langle x, y, t, i \rangle : \exists \sigma. \mathrm{SNAP}^{(1)}(x, y, t) = \langle i, \sigma \rangle\}$

$C_3 = \{\#p : \operatorname{Dom} \Psi_p^{(1)} \subseteq \{0, \ldots, \#p\}\}$ $\quad$ $C_6 = \{\langle x, y, i \rangle : \exists \sigma, t. \mathrm{SNAP}^{(1)}(x, y, t) = \langle i, \sigma \rangle\}$

Ejercicio 14. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

a. Si $B_1, \ldots, B_k$ son c.e. entonces $\bigcup_{n \in \{1,\ldots,k\}} B_n$ es c.e.

b. Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos c.e. entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ es c.e.

c. Si $B_1, \ldots, B_k$ son c.e. entonces $\bigcap_{n \in \{1,\ldots,k\}} B_n$ es c.e.

d. Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de conjuntos c.e. entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ es c.e.

Ejercicio 15. Sea B un conjunto *infinito*.

a. Probar que B es c.e. sii existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ inyectiva y computable tal que $\operatorname{Im} f = B$ (o sea, f es una *enumeración computable* de los elementos de B).

b. Probar que B es computable sii existe una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ computable y estrictamente creciente tal que $\operatorname{Im} f = B$ (o sea, f es una *enumeración ordenada y computable* de los elementos de B).

c. Probar que si B es c.e. entonces B contiene un subconjunto computable infinito.

Ejercicio 16. Sea $\text{TOT} = \{\#p : \Psi_p^{(1)} \text{ es una función total}\}$.

a. Demostrar que TOT no es co-c.e.

b. Demostrar que TOT no es c.e. (*Sugerencia*: considerar la función $g(x) = \Phi_{f(x)}(x) + 9$ donde f es una enumeración computable de TOT).

Ejercicio 17. Exhibir un conjunto *no vacío* $C \subseteq \mathbb{N}$ tal que, para toda función f primitiva recursiva, exista un k que cumpla $k \in (C \cup \operatorname{Im} f)$ pero $k \notin (C \cap \operatorname{Im} f)$. Justificar apropiadamente.

Ejercicio 18. Demostrar o refutar cada una de las siguientes afirmaciones.

a. Para toda funcion computable y total $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existe una función primitiva recursiva $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ son primitivas recursivas.

b. Sea C un conjunto infinito. Si para todo $x \in C$ vale $\neg\text{Halt}(x, x)$ entonces C no es computable.

c. Si C y D son conjuntos c.e. infinitos, entonces existe $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, total, computable, inyectiva, y tal que $\operatorname{Im} f = C \cup D$.

d. Si $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ es una función tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la función $g_n(x) = f(n, x)$ es total y computable, entonces f es total y computable.

e. La siguiente función es primitiva recursiva:

$$f(\#p) = \begin{cases} 1 & \text{si } \operatorname{Im} \Psi_p \text{ es un conjunto c.e.} \\ \uparrow & \text{en otro caso} \end{cases}$$

f. Sea e un número fijo, la siguiente función no es computable:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si Halt}(e, e) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

g. Existe una función computable f tal que para todo programa p, la función computada por el programa con número $f(\#p)$ es *distinta* a la computada por p, es decir, $\Psi_p^{(1)} \neq \Phi_{f(\#p)}^{(1)}$.