Práctica 4.5 - Lógica de 1^{er} orden
(ejercicios adicionales - opcionales)

Ejercicio 1. Extensión de órdenes parciales a órdenes totales:

1. Mostrar, usando el teorema de compacidad, que si $(A, \trianglelefteq)$ es un modelo finito[1] de la teoría de órdenes parciales, existe un orden total $\preceq \subset A \times A$ que extiende a $\trianglelefteq$ (*i.e.*, $\trianglelefteq \subseteq \preceq$).

2. Supongamos ahora que $(A, \trianglelefteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y consideremos la fórmula φ_{Tot} (*cf.* Práctica 3) cuyos modelos son los órdenes totales. Extendamos la signatura $\langle \leq, = \rangle$ con un símbolo de constante c_a para cada elemento $a \in A$. Consideremos el siguiente conjunto de sentencias del lenguaje extendido:

$$\Sigma := \{c_a \leq c_b \mid a, b \in A \text{ y } a \trianglelefteq b\} \cup \{\varphi_{Tot}\}.$$

   Probar, usando el punto anterior, que todo subconjunto finito de Σ es satisfacible.

3. Finalmente, deducir[2] que para todo orden parcial, existe un orden total que lo extiende.

Ejercicio[3] 2. Teorema de Löwenheim - Skolem[4] ascendente: Sea T una teoría sobre un lenguaje de primer orden L que tiene modelos finitos arbitrariamente grandes o (al menos) un modelo infinito. Sea X un conjunto no vacío y sea $\{c_x \mid x \in X\}$ un conjunto de nuevos[5] símbolos de constante. Probar que el conjunto de enunciados $T \cup \{c_x \neq c_y \mid x, y \in X, x \neq y\}$ tiene un modelo.

Deducir que el Teorema de Löwenheim - Skolem ascendente: Toda teoría que admite modelos finitos arbitrariamente grandes o (al menos) un modelo infinito, admite también modelos de cualquier cardinal infinito.

Ejercicio 3. Principio de Robinson: Si un enunciado de primer orden vale en todo cuerpo de característica cero entonces existe una constante p tal que el enunciado vale en todo cuerpo de característica mayor que p.

---

[1] O sea: el universo, A, tiene finitos elementos.

[2] Esta demostración es mejor que aquella basada en el lema de Zorn pues el teorema de compacidad es más débil que el lema de Zorn (equivalente al axioma de elección).

[3] Para aquellos que conozcan algo sobre la teoría de números cardinales.

[4] Cuenta la leyenda que Thoralf Skolem consideraba un escándalo que se asociara su nombre con un resultado de este tipo, que él consideraba absurdo, ya que los conjuntos no numerables serían objetos ficticios, sin existencia real (*cf.* Poizat (2000)).

[5] Símbolos que no aparecen en la signatura de L.