Práctica 3 -Lógica de primer orden-

Ejercicio 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con signatura compuesta por un símbolo de predicado binario P, dos símbolos de función f_1, f_2, donde f_1 es unario y f_2 es binario, y un símbolo de constante c.

a. Si x, y denotan variables, decidir cuáles de las siguientes expresiones son términos y cuáles son fórmulas del lenguaje $\mathcal{L}$:

1) $\exists f_2(x)P(f_2(x))$.
2) $f_2(f_1(x), f_1(y))$.
3) $\forall x \exists c P(x, c)$.
4) $\forall \exists P(\exists, \exists)$.
5) $\forall c \exists x P(x, c)$.
6) $\exists x P(x, y) \to \exists y P(y, z)$.
7) $f_2(f_1(x), f_2(c, c))$.
8) $\exists x \exists y \exists x P(f_2(x, y), f_1(y))$.
9) $\forall z(\forall x P(z, x)) \vee P(c, z)$.
10) $P(x, c)$.
11) $\exists f_1(\forall x(f_1(x) = x))$.
12) $f_2(x)$.

b. Para cada fórmula de la lista anterior, encontrar las apariciones libres y ligadas de las variables de dicha fórmula.

c. Elija dos términos y dos fórmulas de la lista anterior y desarrolle una cadena de formación para cada uno de ellos.

Ejercicio 2. Decidir si las siguientes interpretaciones son apropiadas sobre las signaturas dadas, en donde f es un símbolo unario y g es binario:

a. $\mathcal{C} = \emptyset$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}, f_I(n) = \sqrt{n}, g_I(n, m) = n + m$.

b. $\mathcal{C} = \{c\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}, f_I(n) = n^2, g_I(n, m) = n + m$, $c_I = 2$.

c. $\mathcal{C} = \{c, d\}$, $\mathcal{F} = \{f, g\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$, $U_I = \mathbb{N}$, $g_I(n, n) = n^2 - n$, $c_I = d_I = 0$,

$$f_I(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ es primo} \\ 2 & \text{si } n \text{ no es primo} \end{cases}$$

Ejercicio 3. En cada uno de los siguientes ejemplos, describir la propiedad que determinan los siguientes enunciados. Cuando sea posible determinar si el enunciado es verdadero o falso en la interpretación correspondiente.

a. $\forall x \forall y(P(x, y) \to \exists z((Q(z) \wedge P(x, z)) \wedge P(z, y)))$, donde P y Q son símbolos de predicados binario y unario respectivamente, el universo de la interpretación son los números reales, $P_I = <$, $Q_I(x)$ significa x es un número racional.

b. $\forall x(Q(x) \to \exists y(R(y) \wedge P(y, x)))$, donde P es un símbolo de predicado binario, Q y R son símbolos de predicados unarios, el universo de la interpretación es el conjunto de los días y las personas, $P_I(x, y)$ significa x nace en el día y, $Q_I(x)$ significa x es un día, y $R_I(x)$ significa x es un hombre libre.

c. $\forall x \forall y((Q(x) \wedge Q(y)) \to P(f(x, y)))$, donde Q y P son símbolos de predicados unarios, f es un símbolo de función binario, el universo de la interpretación son los números enteros, $Q_I(x)$ significa x es par, $P_I(x)$ significa x es impar, y $f_I(x, y) = x + y$.

d. Para los siguientes enunciados, el universo de interpretación es el conjunto de personas, el predicado binario $P(x, y)$ se interpreta como 'x quiere a y' y el símbolo de constante g se interpreta como *Kurt Gödel*:

a. $\exists x \forall y \neg P(x, y)$.
b. $\forall y \exists x P(x, y)$.
c. $\exists y P(y, g)$.
d. $\exists x \forall z(P(z, g) \to P(x, z))$.
e. $\exists x \exists y((\forall z P(y, z)) \to P(x, y))$.
f. $\forall y(P(g, y) \to y = g)$.

Ejercicio 4. Supongamos dados los siguiente predicados:

- $H(x)$: x es un humano;
- $C(x)$: x es un auto;
- $T(x)$: x es un camión;
- $D(x, y)$: x maneja a y.

Escribir fórmulas representando las siguientes obviedades: *(a)* nungún humano es un auto, *(b)* sólo las personas manejan, *(c)* los autos existen. Escriba fórmulas que representen las siguientes propiedades: *(a)* todos los humanos manejan un camión o un auto, *(b)* algunas personas no manejan ninguno, *(c)* algunas personas manejan ambos, *(d)* nadie maneja ambos.

Supongamos que además tenemos el siguiente predicado

- $I(x, y)$: x e y son idénticos.

Escriba fórmulas que expresen las siguientes propiedades: *(a)* todo auto tiene a lo sumo un conductor, *(b)* todo camión tiene exactamente dos conductores, *(c)* toda persona maneja exáctamente un vehículo (auto o camión), *(d)* todo auto es conducido por alguien, *(e)* nadie maneja dos camiones.

Ejercicio 5. Sea P un símbolo de relación unario y sea f un símbolo de función binario. Para cada una de las fórmulas $\forall x \forall y\ f(x, y) = x$, $\exists x \forall y\ f(x, y) = y$, $\exists x(P(x) \wedge \forall y\ P(f(x, y)))$ hallar una interpretación que la satisfaga y otra que no la satisfaga.

Ejercicio 6. Usando el predicado $R(x, y)$ (x es un ancestro de y), traduzca el siguiente argumento a una sentencia del cálculo de predicados.

> *Todo ancestro de un ancestro de una persona es un ancestro de esa persona. Nadie es su propio ancestro. Por lo tanto, existe una persona que no tiene ancestro.*

¿Es válido este razonamiento? Justifique su respuesta encontrando una interpretación apropiada de su traducción del razonamiento.

Ejercicio 7. En la lógica de primer orden sobre la signatura compuesta por un símbolo de relación binario $\leq$, consideremos las siguientes fórmulas.

- $\varphi_T = \forall x \forall y \forall z\ (x \leq y \wedge y \leq z \to x \leq z)$
- $\varphi_A = \forall x \forall y\ (x \leq y \wedge y \leq x \to x = y)$
- $\varphi_R = \forall x\ (x \leq x)$
- $\varphi_L = \forall x \forall y\ (x \leq y \vee y \leq x)$
- $\varphi_D = \exists x \exists y\ (x \neq y) \wedge \forall x \forall y\ ((x \leq y \wedge x \neq y) \to \exists z(x \leq z \wedge x \neq z \wedge z \leq y \wedge z \neq y)))$
- $\varphi_{SE} = \forall x \exists y\ (x \leq y \wedge x \neq y) \wedge \forall x \exists y\ (y \leq x \wedge x \neq y)$.

Una interpretación de dicho lenguaje que satisface $\varphi_{Ord} = \varphi_T \wedge \varphi_A \wedge \varphi_R$ (*i.e.*, un modelo de φ_{Ord}) se llama un *orden parcial* y la clase de todos los modelos de φ_{Ord} se llama *la clase de los órdenes parciales* y la clase de los modelos de $\varphi_{Tot} := \varphi_{Ord} \wedge \varphi_L$ se llama *la clase de los órdenes totales* o *cadenas*. Para cada fórmula en $C = \{\varphi_L, \varphi_D, \varphi_{SE}\}$ construir un orden parcial que satisfaga dicha fórmula y que no satisfaga a las dos restantes fórmulas de C.

Ejercicio 8. Considerar un lenguaje con un símbolo de función f binario. Escribir una fórmula φ que cumpla $\mathcal{A} \models \varphi$ sii $f_{\mathcal{A}}$ es inyectiva. Escribir una fórmula ψ que cumpla $\mathcal{A} \models \psi$ sii $f_{\mathcal{A}}$ es sobreyectiva.

Hallar un modelo de $\varphi \wedge \neg\psi$ y otro de $\psi \wedge \neg\varphi$. ¿Es posible encontrar un modelo finito de $\varphi \wedge \neg\psi$?

Ejercicio 9. Una fórmula que no contiene $\neg$, $\to$ ni $\leftrightarrow$ se llama *positiva*. Mostrar que para toda fórmula positiva hay una interpretación que la satisface.

Definición. Decimos que un elemento e del universo de una interpretación $\mathcal{I}$ es *distinguible* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x)$ con una sola variable libre x tal que $\mathcal{I} \models \varphi(x)[v]$ si y sólo si $v(x) = e$.

Ejercicio 10. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje con igualdad y un símbolo de función binario, y sean $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$ las siguientes interpretaciones:

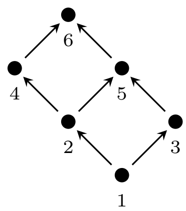
$$\mathcal{I}_1 = (\mathbb{N}, +), \mathcal{I}_2 = (\mathbb{N}, \cdot).$$

Probar que 1 es un elemento distinguido en ambas interpretaciones. ¿Qué ocurre con el 2? Dar una fórmula que sea verdadera en una interpretación y falsa en la otra.

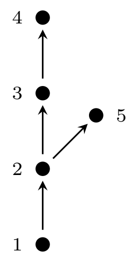
Ejercicio 11. Dar un ejemplo de un lenguaje (sin constantes) y una interpretación de dicho lenguaje con universo infinito tal que todo elemento del universo de la interpretación dada sea distinguible.

Ejercicio 12. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden y con un símbolo de predicado binario $\leq$. Probar que todos los elementos del universo de la siguientes interpretaciones son distinguibles,

a)



b)



Definición. Dada una interpretación $\mathcal{I}$ con universo $|\mathcal{I}|$, decimos que una relación $R \subseteq |\mathcal{I}|^n$ es *expresable* con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ con n variables libres tal que para toda valuación v

$$\mathcal{I} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)[v] \text{ sii } (v(x_1), \ldots, v(x_n)) \in R.$$

Ejercicio 13. Demostrar que las siguientes relaciones son expresables.

a. $\mathcal{I}_1 = \langle \mathbb{N}, \times, = \rangle$ con $\times$ el producto de naturales.
$R_1 = \{(n, m) : n \text{ divide a } m\}$.
$P_1 = \{n : n \text{ es primo}\}$.

b. $\mathcal{I}_2 = \langle \mathbb{N}, +, =, 0, 1 \rangle$ con $+$ la suma de naturales.
$R_2 = \{(n, m) : n < m\}$.

c. $\mathcal{I}_3 = \langle L, \circ, = \rangle$ con L el conjunto de todas las listas, $\circ$ la concatenación de listas.
$R_3 = \{(a, b) : a \text{ es sublista de } b\}$.

d. $\mathcal{I}_4 = \langle \mathbb{R}, +, \times, =, 0, 1 \rangle$, donde $+$ y $\times$ son la suma y producto respectivamente.
$R_4 = \{(x, y) : x < y\}$.

*. [1] $\mathcal{I}_5 = \langle \mathbb{N}, +, \times, =, 0, 1 \rangle$ con $+$ y $\times$ la suma y el producto de naturales respectivamente.
$R_5 = \{(i, j, k) : i^j = k\}$.

[1] Muy difícil!

Ejercicio 14. Demostrar que, en cambio, las siguientes relaciones no son expresables:

e. $\mathcal{J}_1 = \langle \mathbb{R}, +, =, 0 \rangle$, donde $+$ es la suma de números reales.
$Q_1 = \{(x, y) : x < y\}$.

f. $\mathcal{J}_2 = \langle \mathbb{N}, P \rangle$, donde P es el predicado unario *ser par*.
$Q_2 = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ es múltiplo de } 3\}$.

g. $\mathcal{J}_3 = \langle \mathbb{N}, \times \rangle$, donde $\times$ es el producto de naturales.
$Q_3 = \{(i, j, k) \in \mathbb{N}^3 : i + j = k\}$.

Definición. Decimos que una clase de modelos K es *definible*[2] con el lenguaje $\mathcal{L}$ si existe un conjunto finito de $\mathcal{L}$-sentencias $\varphi_1, ..., \varphi_s$ tal que para toda interpretación $\mathcal{I}$ de $\mathcal{L}$

$$\mathcal{I} \models \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_s \text{ sii } \mathcal{I} \in \mathsf{K}.$$

Si esto ocurre, llamamos a $\varphi_1, ..., \varphi_s$ los *axiomas* de la *teoría*[3] de K.

Ejercicio 15. Demostrar que las siguientes clases de modelos son definibles en sus respectivos lenguajes.

a. $\mathcal{L}_0 = \{=\}$. $\mathsf{K}_0 = \emptyset$.

b. $\mathcal{L}_1 = \{=\}$. $\mathsf{K}_1 = \{\text{todas las interpretaciones}\}$.

c. $\mathcal{L}_2 = \{R, =\}$ con P predicado binario. $\mathsf{K}_2 = \{\mathcal{I} : P^{\mathcal{I}} \text{ es irreflexivo y simétrico}\}$.
K_2 es conocida como la *clase de grafos no orientados*.

d. $\mathcal{L}_3 = \{f, g, =\}$ con f, g funciones unarias. $\mathsf{K}_3 = \{\mathcal{I} : \operatorname{Im} f^{\mathcal{I}} \subseteq \operatorname{Im} g^{\mathcal{I}}\}$.

e. $\mathcal{L}_4 = \{\leq, =\}$ con $\leq$ predicado binario. $\mathsf{K}_4 = \{\mathcal{I} : \leq^{\mathcal{I}} \text{ es un orden parcial}\}$.

f. $\mathcal{L}_5 = \{\times, ^{-1}, =, 1\}$ con $\times, ^{-1}$ símbolos de función binario y unario respectivamente y 1 un símbolo de constante. $\mathsf{K}_5 = \{\mathcal{I} : \langle |\mathcal{I}|, \times^{\mathcal{I}}, ^{-1^{\mathcal{I}}}, 1^{\mathcal{I}} \rangle \text{ es un grupo abeliano}\}$.

[2]También se dice que es una *clase elemental*. En este contexto *elemental* se usa como sinónimo de *definible en la lógica de primer orden.*

[3]Por ejemplo, en el item (f) del próximo ejercicio tiene que escribir los axiomas de la teoría de grupos abelianos y en el item (e) los axiomas de la teoría de órdenes parciales.