Geometría Diferencial 2011

Práctica 6

1. La esfera $\mathbb{S}^2$ hereda una métrica Riemanniana de $\mathbb{R}^3$, expresarla en una carta (U, φ) dando un $2-$tensor.

2. Repetir el ejercicio anterior con el cilindro $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$. Probar que el cilindro con la estructura Riemanniana heredada de $\mathbb{R}^3$ es localmente como $\mathbb{R}^2$. ¿Es lo mismo cierto para $\mathbb{S}^2$?

3. Consideremos el semiplano de Poincaré $\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ con la métrica dada respecto de la carta usual $(\mathbb{R}^2, id)$, por
$$\frac{1}{y^2} dx \otimes dx + \frac{1}{y^2} dy \otimes dy$$
Probar que los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se los puede unir por una curva en $\mathcal{H}$ de longitud
$$arcosh(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2 y_1 y_2})$$

4. Sea M una variedad diferenciable, (U, φ) una carta y $X = \sum a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$, $Y = \sum b_j \frac{\partial}{\partial \varphi_j}$ campos sobre M. Probar que dadas funciones $\Gamma_{i,j}^k : U \to \mathbb{R}$, la asignación
$$(X, Y) \mapsto \sum_k (X(a_k) + \sum_{i,j} a_i b_j \Gamma_{i,j}^k) \frac{\partial}{\partial \varphi_k}$$
define una conexión sobre U.

   En particular, tomando $\Gamma_{i,j}^k = 0$ tenemos una conexión estándar en $\mathbb{R}^n$.

5. Sea M una variedad diferenciable, p un punto en M y ∇ una conexión. Probar que si $X, \widetilde{X}, Y$ son campos tales que $X_p = \widetilde{X}_p$ entonces
$$\nabla_X Y(p) = \nabla_{\widetilde{X}} Y(p).$$
Deducir que se tiene entonces bien definido para cada vector v_p en T_pM
$$D_{v_p} Y = \nabla_X Y(p)$$
donde X es cualquier campo en M con $X(p) = v_p$.

6. Sea G un grupo de Lie, y $\{X_1, ..., X_n\}$ una base de campos invariantes a izquierda. Sea ∇ determinada por $\nabla_{X_i} X_j = 0$ para todo i, j. Demostrar que $\nabla_X X = 0$ para todo campo invariante a izquierda X y que esta definición es independiente de la base de campos invariantes elegida.

7. Dada una variedad M con una conexión ∇ definimos para los campos X, Y el tensor de Torsión
$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$
Probar que esto define una (2,1)-forma, es decir que $T(X,Y)(p)$ depende solamente de X_p y Y_p.

8. Sea $\mathcal{H}$ el semiplano de Poincaré, expresar la conexión de Levi-Civita en la carta usual.

9. Deducir del ejercicio anterior que las geodésicas del semiplano de Poincaré son las rectas verticales y las semicircunferencias con centro en el eje real.

10. Calcular la conexión de Levi-Civita para la métrica de Lorentz en $\mathbb{R}^{n+1}$ dada, con respecto a la carta usual, por $g_{ii} = 1$, si $1 \leq i \leq n$, $g_{n+1n+1} = -1$ y $g_{ij} = 0$ en otro caso.

11. Sea $i : M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ una subvariedad regular de codimension 1, con la métrica inducida. Sea ∇ la conexión de Levi-Civita asociada a M. Probar que si X e Y son campos sobre M, entonces $\nabla_X Y$ coincide con la proyección ortogonal sobre TM de la derivada de $di(Y)$ en la dirección $di(X)$.

12. Sean M y N subvariedades de $\mathbb{R}^n$ y supongamos que M y N son tangentes a lo largo de una curva. Probar que esta curva es una geodésica de M si y solo si lo es de N (donde en M y N consideramos las estrucutras Riemannianas que heredan de $\mathbb{R}^n$).

13. Sean (M, g) una variedad riemanniana y $\alpha : I \to M$ una curva suave. Probar que si X e Y son campos paralelos a lo largo de α, entonces la función
$$p \mapsto < X_p, Y_p >_p$$
es constante. Concluir que al transportar paralelamente campos a lo largo de α se preservan las normas y los ángulos.

14. Demostrar que via el transporte paralelo a lo largo de una curva cerrada en el toro $\mathbb{T}^2$ (con la métrica Riemanniana heredada de $\mathbb{R}^2$), todo vector vuelve a si mismo.

15. Dar una fórmula para el transporte paralelo de un vector en el semiplano de Poincaré $\mathcal{H}$ a lo largo de una paralela al eje horizontal.

16. Dar una fórmula para el transporte paralelo de un vector en la esfera $\mathbb{S}^2$ a lo largo de un círculo cerrado.

17. Poner un buen disco de música y leer un poco sobre curvatura riemanniana.