

Geometría Diferencial 2011

Práctica 7 - Integración

1. Probar que si α y β son formas diferenciales cerradas, entonces $\alpha \wedge \beta$ es cerrada. Probar que si además α o β es exacta, entonces $\alpha \wedge \beta$ también lo es.
2. Probar que si $f : M \rightarrow N$ es diferenciable y $\omega \in \Omega^k(N)$ es cerrada (resp. exacta), entonces $f^*\omega$ es cerrada (resp. exacta).
3. Probar que la integración de formas en una variedad diferencial orientada M cumple las siguientes propiedades:
 - a) Si $-M$ denota la variedad con la orientación opuesta, entonces $\int_M \omega = -\int_{-M} \omega$.
 - b) $\int_M a\omega_1 + b\omega_2 = a \int_M \omega_1 + b \int_M \omega_2$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.
 - c) Si ω es una n -forma continua y positiva entonces $\int_M \omega \geq 0$ y la igualdad se da sólo si $\omega = 0$.
 - d) Si $f : M \rightarrow N$ es un difeomorfismo y ω es una forma integrable en N , entonces $\int_M f^*\omega = \pm \int_N \omega$, donde el signo depende de si f preserva o invierte la orientación.
4. Sea $\alpha = \frac{1}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$. Probar que α es una 1-forma cerrada en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Calcular la integral de α sobre S^1 . Concluir que α no es exacta. Concluir que $i^*\alpha$ no es exacta, donde $i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la inmersión canónica.
5. Sea $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y $\omega(x) = \sum_i \frac{(-1)^i x_i}{|x|^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n$.
 - a) Probar que ω es cerrada pero no exacta.
 - b) Calcular $\int_{S^{n-1}} \omega$.
 - c) Calcular la integral de ω sobre el elipsoide $\{\sum_i \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1\}$.
6. Sea M variedad diferencial y sea $\omega \in \Omega^k(M)$ una forma cerrada. Probar que
 - a) Si S es subvariedad de M compacta, sin borde y orientada de dimensión k tal que $S = \partial W$ para alguna subvariedad W de M , entonces $\int_S \omega = 0$.
 - b) Si W es subvariedad de dimensión $k + 1$ con borde $\partial W = S \sqcup T$ donde S y T son subvariedades de dimensión k orientadas, entonces $\int_S \omega = -\int_T \omega$.
7. Probar que si M es compacta, orientable y sin borde de dimensión n , entonces una n -forma nunca nula no es exacta.
8. Sea C una curva \mathcal{C}^1 en una variedad M , parametrizada por $\Gamma : [a, b] \rightarrow M$. Si ω es una 1-forma en M , definimos la integral de línea de ω a lo largo de C por $\int_C \omega := \int_{[a, b]} \Gamma^*\omega$.

- a) Probar que la definición no depende de la parametrización elegida.
- b) Si $\omega = df$ con $f \in \Omega^0(M)$ y la curva C recorre del punto p al punto q , entonces $\int_C \omega = f(q) - f(p)$. En particular, la integral es independiente de la curva elegida entre p y q .
9. Probar que el toro T no es difeomorfo a la esfera S^2 .
Sugerencia: hallar una 1-forma en T cerrada que no sea exacta; ver que toda 1-forma en S^2 cerrada es exacta.
10. Sea M variedad riemanniana orientada. Se define la n -forma *de volumen* V como la única que cumple $V_p(v_1, \dots, v_n) = 1$ para toda base ortonormal orientada de $T_p M$. En coordenadas locales (U, ϕ) , se tiene $(\phi^{-1})^*(V) = \sqrt{g} dx_1 \dots dx_n$, donde $g = \det(g_{ij})$.
- a) Calcular la matriz (g_{ij}) para \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 en coordenadas polares y cilíndricas.
- b) Calcular la matriz (g_{ij}) y la forma de volumen para S^1 y S^2 , y calcular los respectivos volúmenes.
11. Sea ω la forma de volumen de una variedad riemanniana orientada M de dimensión n . Sean X_1, \dots, X_n y Y_1, \dots, Y_n campos de vectores en M . Probar que

$$\omega(X_1, \dots, X_n) \cdot \omega(Y_1, \dots, Y_n) = \det\{\langle X_i, Y_j \rangle\}.$$

Probar también que

$$\omega(X_1, \dots, X_n)\omega = \tilde{X}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{X}_n$$

donde \tilde{X}_i es la 1-forma dual (vía la estructura riemanniana) al campo X_i .

12. Dada M variedad de dimensión n y $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ una inmersión, se da a M la estructura riemanniana inducida, es decir para $p \in M$ y $v, w \in T_p M$ vale $\langle v, w \rangle_p := \langle df(v), df(w) \rangle_{f(p)}$.

Supongamos que M es orientada, y que η es el campo de vectores normales unitarios en $f(M)$ que dan la orientación. Probar que la forma de volumen en M es dada por

$$\omega = f^*(i(\eta)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1})).$$