

Geometría Diferencial 2011

Práctica 5 - Formas

1. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Sea $\alpha \in \Gamma((T^*N)^{\otimes r})$ un campo de covectores de grado r , al que identificamos, en cada $y \in N$, con un campo de aplicaciones multilineales $T_y N \times \cdots \times T_y N \rightarrow \mathbb{R}$.

Probar que f induce un campo de covectores de grado r , $f^*(\alpha) \in \Gamma((T^*M)^{\otimes r})$, que vía la identificación anterior se define por

$$f^*(\alpha)(x)(v_1, \dots, v_r) = \alpha(f(x))(df(x)(v_1), \dots, df(x)(v_r)).$$

Si (U, ϕ) es una carta de M alrededor de x , (V, ψ) es una carta de N alrededor de $y = f(x)$, $f(U) \subseteq V$ y α se escribe localmente como

$$\alpha(x) = \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n} a_{i_1, \dots, i_r}(x) d\psi_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\psi_{i_r},$$

encontrar las coordenadas de $f^*(\alpha)$ en la base $d\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes d\phi_{i_r}$.

Probar que si α es un campo de covectores simétricos (resp. antisimétricos), $f^*(\alpha)$ también lo es.

2. Sea M una variedad, ω una 1-forma en M . Sean (U, ϕ) , (V, ψ) dos cartas alrededor de un punto $x \in M$. Si $\omega(x) = \sum_i \alpha_i d\phi_i = \sum_i \beta_i d\psi_i$, encontrar la relación entre los α_i y los β_i .
3. Si ω es una k -forma, ¿es cierto que $\omega \wedge \omega = 0$? ¿Y si $\dim M = 3$?
4. Sea M una variedad diferencial, (U, ϕ) una carta y $\omega \in \Omega^p(M)$. Calcular $d\omega|_U$ en las coordenadas de (U, ϕ) para los casos $0 \leq p \leq 2$.
5. Sea $\omega \in \Omega^p(M)$. Probar que

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} X_i \omega(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{p+1}). \end{aligned}$$

6. Sea $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vectorial diferenciable en el sentido usual.

a) Demostrar que $\omega_F^1(x)(v) := \langle F(x), v \rangle$ define una 1-forma en \mathbb{R}^3 . Encontrar las coordenadas de ω_F^1 en la base $\{dx, dy, dz\}$. Recíprocamente, probar que una 1-forma ω en \mathbb{R}^3 determina un único campo G en \mathbb{R}^3 tal que $\omega_G^1 = \omega$.

- b) Demostrar que $\omega_F^2(x)(u, v) := \langle F(x), u \times v \rangle$ define una 2-forma en \mathbb{R}^3 . Calcular sus coordenadas en la base $\{dx \wedge dy, dz \wedge dx, dy \wedge dz\}$. Recíprocamente, probar que toda 2-forma ω define un único campo G en \mathbb{R}^3 tal que $\omega_G^2 = \omega$.
- c) Sea $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$. Encontrar la relación entre
- 1) df y ∇f ;
 - 2) $\text{rot } F$ y $d\omega_F^1$;
 - 3) $\text{div } F$ y $d\omega_F^2$ (aquí identificamos $\Omega^3(\mathbb{R}^3) \simeq \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ usando la base $dx \wedge dy \wedge dz$).

Concluir, usando la relación $d \circ d = 0$, las fórmulas $\text{rot } \nabla \equiv 0$ y $\text{div rot} \equiv 0$.

7. Probar que una variedad es orientable si y sólo si su fibrado cotangente lo es.
8. Sea M una variedad y TM su fibrado tangente. Probar que TM es orientable.
9. Probar que si M tiene un atlas de la forma $\mathcal{A} = \{(U, x); (V, y)\}$ donde $U \cap V$ es conexo, entonces M es orientable.
10. Ver que si M es paralelizable, entonces es orientable.
11. Sean M y N variedades diferenciales. Probar que son equivalentes:
 - a) M y N son orientables
 - b) $M \times N$ es orientable
12. Probar que la esfera S^n y \mathbb{R}^n son orientables. Probar que el n -toro T^n y el cilindro son orientables. Probar que P^n es orientable si y sólo si n es impar.
13. Sea M una variedad (conexa) orientada, \mathcal{A} un atlas orientado y $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo. Probar que si $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ entonces el signo de $J(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ es constante (donde está definida la composición) y no depende de las cartas.
Se dice que f preserva la orientación si $J(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ es positivo. En caso contrario, se dice que f invierte la orientación.
14. Sea V un espacio vectorial con base $\{v_1, \dots, v_n\}$; sea $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$ su base dual. En $V \otimes V^*$ consideramos el elemento $I = \sum_{i=1}^n v_i \otimes v_i^*$. Probar que este elemento no depende de la base elegida.
15. Sea M una variedad de dimensión n y T^*M su fibrado cotangente. Sea (U, ϕ) una carta de M , sea $V = \pi^{-1}(U)$ el abierto correspondiente de T^*M y $\psi : V \rightarrow \phi(U) \times \mathbb{R}^n$, $\psi = (\phi_1, \dots, \phi_n, \frac{\partial}{\partial \phi_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \phi_n})$. Tomamos la 2-forma en V dada por $J = \sum_{i=1}^n d\psi_i \wedge d\psi_{n+i}$. Probar que no depende de la carta (U, ϕ) ; es decir, si (U', ϕ') es otra carta, V' y J' se definen de manera análoga, entonces $J = J'$ en la intersección $V \cap V'$ (usar el ejercicio anterior). Deducir que esto define una 2-forma global $J \in \Omega^2(T^*M)$. Probar que es no degenerada y cerrada.
Una variedad con una 2-forma no degenerada y cerrada se dice simpléctica.