

# Geometría Diferencial 2011

---

## Práctica 4 - Campos de vectores

1. Sea  $M$  una variedad,  $p \in M$  y  $v \in T_pM$  un vector tangente. Probar que existe un campo  $X \in \Gamma(TM)$  tal que  $X(p) = v$ .
2. Sea  $p \in M$  y  $X$  un campo definido en un entorno de  $p$  tal que  $X(p) \neq 0$ . Probar que existe una carta  $(U, \phi)$  tal que  $X|_U = \frac{\partial}{\partial \phi_1}$ .
3. Sea  $p \in M$  y  $X_1, \dots, X_k$  campos definidos en un entorno de  $p$  tales que los vectores  $X_1(p), \dots, X_k(p)$  son l.i. en  $T_pM$ . Probar que existe un entorno  $U$  de  $p$  tal que  $\{X_1(q), \dots, X_k(q)\}$  es un conjunto l.i. para todo  $q \in U$ .
4. Sea  $M = \mathbb{R}^2$ . Identificando  $T_pM$  con  $M$  de la manera natural, probar que no existe una carta  $(U, \phi)$  tal que los campos  $\frac{\partial}{\partial \phi_1}, \frac{\partial}{\partial \phi_2}$  coincidan respectivamente con los campos  $(x, y) \mapsto (1, 0), (x, y) \mapsto (0, y(x^2 + 1))$ .
5. Una variedad  $M$  es *paralelizable* si existen campos  $X_1, \dots, X_m$  tales que para todo  $p \in M$  el conjunto  $\{X_1(p), \dots, X_m(p)\}$  es una base de  $T_pM$ .
  - a) Probar que  $S^1$  y  $S^3$  son paralelizables;
  - b) Probar que el toro  $T^n$  es paralelizable;
  - c) Probar que si  $M$  es paralelizable entonces  $TM$  es difeomorfa a  $M \times \mathbb{R}^d$ ;
  - d) Hallar un ejemplo de variedad  $M$  que no sea paralelizable.
6. Sea  $G$  un grupo de Lie y notemos  $L_g : G \rightarrow G$  el difeomorfismo  $L_g(h) = gh$ . Decimos que un campo  $X \in \Gamma(TG)$  es *invariante a izquierda* si para todos  $g, h$  en  $G$  se tiene  $(dL_g)(X(h)) = X(gh)$ . Es decir, si  $(dL_g)X = XL_g$ .
  - a) Probar que si dos campos invariantes a izquierda coinciden en un punto entonces coinciden en todo  $G$ .
  - b) Probar que si  $v \in T_g(G)$ , existe un único campo invariante a izquierda  $X$  tal que  $X(g) = v$ .
  - c) Deducir que hay un isomorfismo entre  $T_e(G)$  y el espacio de campos invariantes a izquierda.
  - d) Probar que todo grupo de Lie es paralelizable.
7. Sea  $(U, \phi)$  una carta de  $M$ . Probar que para todos  $i$  y  $j$  se tiene  $[\frac{\partial}{\partial \phi_i}, \frac{\partial}{\partial \phi_j}] = 0$ .
8. Dados  $X, Y$  campos en  $\mathbb{R}^n$ , dar una fórmula general para el conmutador  $[X, Y]$ .
9. Dados campos  $X, Y$  en una variedad  $M$  y funciones diferenciables  $f, g$  en  $\mathcal{D}(M, \mathbb{R})$  probar la formula de Lie-Rinehart:

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$$

10. Un *álgebra de Lie* es un espacio vectorial  $V$  junto con una aplicación bilineal  $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$  satisfaciendo las siguientes dos condiciones:

**Antisimetría:**  $[X, Y] = -[Y, X] \forall X, Y \in V$ ;

**Identidad de Jacobi:**  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \forall X, Y, Z \in V$ .

Probar que  $\Gamma(TM)$  es un álgebra de Lie.

11. Probar que si  $G$  es un grupo de Lie y  $X, Y$  son campos invariantes a izquierda entonces  $[X, Y]$  es invariante a izquierda. Deducir que  $\mathcal{G} = T_e G$  hereda una estructura de algebra de Lie.
12. Si  $G = Gl_n(\mathbb{R})$  probar que para todas  $A, B$  en  $T_e G \cong M_n(\mathbb{R})$  se tiene que

$$[A, B] = AB - BA.$$

13. Sea  $f : M \rightarrow N$  diferenciable. Un par de campos  $X \in \Gamma(TM)$ ,  $Y \in \Gamma(TN)$  se dicen *f-relacionados* si  $Y(f(p)) = (df)(X(p))$  para todo  $p \in M$ , es decir, si  $Yf = (df)X$ . Notamos  $X \sim_f Y$ .

a) Probar que si  $X \sim_f Y$  y  $Y \sim_g Z$ , entonces  $X \sim_{gf} Z$ .

b) Probar que si  $X_1 \sim_f Y_1$  y  $X_2 \sim_f Y_2$  entonces  $[X_1, X_2] \sim_f [Y_1, Y_2]$ .

14. Calcular las curvas integrales y el grupo uniparametrico definidos por el campo  $X$  en cada uno de los siguientes casos

a)  $M = \mathbb{R}^2$  y  $X(a, b) = b \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial y}$ ;

b)  $M = \mathbb{R}^2$  y  $X(a, b) = a \frac{\partial}{\partial x} - b \frac{\partial}{\partial y}$ ;

c)  $M = Gl_n(\mathbb{R})$  y  $X(A) = AB \in T_A Gl_n(\mathbb{R}) \sim M_n(\mathbb{R})$  con  $B$  en  $M_n(\mathbb{R})$ ;

d)  $M = \mathbb{T}^2$  y  $X(a, b) = 1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sqrt{2} \frac{\partial}{\partial x_2}$  donde  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  y  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  vienen de la estrucutra de producto de  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ .

15. Dados dos campos  $X, Y$  probar que  $[X, Y] = 0$  si y solo si  $\phi_X^t \phi_Y^s \phi_X^{-t} \phi_Y^{-s}(p) = p$  para todo  $p$  en  $M$  y  $s, t > 0$  suficientemente pequeños.

16. Sea  $\gamma$  una curva integral de un campo  $X$  definido sobre  $M$ . Probar que si  $\dot{\gamma}(t) = 0$  para algún  $t$ , entonces  $\gamma$  es constante.

17. Sea  $M$  una variedad,  $\epsilon > 0$  fijo y  $X \in \Gamma(TM)$  un campo tal que para todo  $p \in M$  la curva integral de  $X$  que pasa por  $p$  está definida en  $(-\epsilon, \epsilon)$ . Probar que  $X$  es completo.

18. Probar que si  $M$  es compacta y  $X \in \Gamma(TM)$ , entonces  $X$  es completo.

19. Sea  $f : M \rightarrow U \subset \mathbb{R}$  diferenciable, propia, sobreyectiva y tal que todo  $t \in U$  es valor regular.

- a) Probar que existe  $X \in \Gamma(TM)$  tal que  $X \sim_f \frac{\partial}{\partial t}$ . ¿Es  $X$  único?
- b) Sea  $X$  como en a). Probar que  $X$  es completo.
- c) Probar que  $f^{-1}(u)$  es difeomorfo a  $f^{-1}(u')$  para todo par  $u, u' \in U$ .

Nota: De la misma forma se puede probar el teorema de Ehresmann que dice que si  $f : M \rightarrow N$  es una submersion propia y sobreyectiva entonces  $f$  es una fibration localmente trivial.

20. Demostrar que si doblamos una hoja de papel entonces por todo punto pasa un segmento de recta contenido en la hoja.

Sugerencia: Si  $M$  es la hoja de papel entonces como  $M$  debe tener curvatura de Gauss nula, para cada punto  $p$  en  $M$  hay un vector  $v_p$  en  $T_pM$  que esta en el nucleo del mapa de Gauss. Considere el campo  $X(p) = v_p$ .

21. Sea  $G$  un grupo de Lie y tomemos  $v \in T_eG$ , sea  $X_v$  el unico campo invariante a izquierda con  $X_v(e) = v$  y denotemos por  $\phi_v^t$  el grupo uniparametrico definido por  $X_v$ .

- a) Si  $\exp : T_eG \rightarrow G$  viene dada por  $\exp(v) = \phi_v^1(e)$ , probar que  $\exp$  define una funcion diferenciable.
- b) Probar que si  $[X_v, X_w] = 0$  entonces  $\phi_v$  y  $\phi_w$  conmutan y

$$\exp(v + w) = \exp(v) \exp(w).$$

- c) Si  $\varphi : G \rightarrow H$  es un morfismo de grupos de Lie entonces demostrar que

$$\varphi \circ \exp = \exp \circ d_e \varphi.$$

22. Probar que un campo  $X$  en  $M$  define una derivación en  $\mathcal{D}(M)$  via  $f \mapsto X(f)$ , donde  $(X(f))(p) := X(p)(f_p)$  con  $f_p$  el germen de  $f$  en  $p$ . Probar que de este modo se tiene una biyección entre  $\Gamma(TM)$  y las derivaciones de  $\mathcal{D}(M)$ .

23. Sean  $X, Y$  campos en  $M$ , vistos como derivaciones  $X, Y : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ . Mostrar con un ejemplo que  $X \circ Y$  no es necesariamente una derivación. Probar que  $[X, Y] := X \circ Y - Y \circ X$  siempre lo es.