Geometría Diferencial 2011

Práctica 3

1. Probar que si M y N son difeomorfas entonces tienen la misma dimensión.

2. Sea $i : S \to M$ subvariedad y *propia*, es decir, la preimagen de compactos es compacto. Probar que i es una inmersión. Concluir que si $i : S \to M$ es subvariedad y S es compacta entonces i es inmersión.

3. Sean M y N variedades de dimensión d y sea $f : M \to N$ regular. Probar que f es un homeomorfismo local.

4. Sean M y N variedades de dimensión d, con M compacta, y sea $f : M \to N$ diferenciable.

   a) Probar que si $p \in N$ es valor regular, entonces $f^{-1}(p)$ es un conjunto finito.

   b) Probar que la asignación $p \mapsto \# f^{-1}(p)$ es localmente constante (donde p recorre valores regulares de f).

5. *a*) Sea (U, ϕ_N) la carta de S^2 dada por la proyección estereográfica. Probar que un polinomio $P \in \mathbb{C}[X]$ define una función diferenciable $f_P : S^2 \to S^2$ cuya expresión local $\phi_N \circ f_P \circ \phi_N^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se identifica con P.

   b) Probar el teorema fundamental del álgebra.

6. Sea M una variedad de dimensión d, $p \in U \subset M$, U abierto, y $\phi_1, \ldots, \phi_d : U \to \mathbb{R}$ diferenciables tales que $d_p\phi_1, \ldots, d_p\phi_d$ son linealmente independientes. Probar que las funciones $\{\phi_i\}$ determinan una carta de M en un entorno de p.

7. *a*) Sea $f : M \to N$ diferenciable, $\dim M \leq \dim N$. Sea $p \in M$ punto regular, y sea (U, ϕ) carta de N con $f(p) \in U$. Probar que un subconjunto de las funciones $\{\phi_i \circ f\}$ determina una carta de M en un entorno de p.

   b) Sea $S \subset N$ *subvariedad inmersa* (la inclusión es una inmersión) y sea $f : M \to N$ diferenciable satisfaciendo $f(M) \subset S$. Probar que $f : M \to S$ es diferenciable.

8. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable y sea S una subvariedad inmersa de N tales que para todo $p \in f^{-1}(S)$ vale $d_pf(T_pM) + T_{f(p)}S = T_{f(p)}N$. Probar que $f^{-1}(S)$ es una subvariedad inmersa de M de dimensión $\dim M - \dim N + \dim S$.

9. Dos subvariedades inmersas S_1, S_2 de M son *transversales*, y lo notamos $S_1 \pitchfork S_2$, si para todo $p \in S_1 \cap S_2$ vale $T_pS_1 \cap T_pS_2 = \{0\}$ ó $T_pS_1 + T_pS_2 = T_pM$. Probar que si $S_1 \pitchfork S_2$, entonces $S_1 \cap S_2$ es una subvariedad inmersa de M. Probar además que si $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, entonces $\dim S_1 \cap S_2 = \max(\dim S_1 + \dim S_2 - \dim M, 0)$.