Geometría Diferencial 2011

Práctica 2 - Espacio tangente

1. Dada una variedad diferencial M de dimensión d, para cada punto p en M consideremos una familia como sigue:

   Para cada carta (U, φ) tal que $p \in U$, tomamos un vector $v = (v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^d$, de manera tal que si (V, ψ) es otro entorno coordenado de p con vector asociado $w = (w_1, \dots, w_d)$, entonces $w^t = d(\psi\varphi^{-1})(\varphi(p))v^t$.

   Probar que la colección de estas familias se puede identificar con T_pM.

2. Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^2$ la esfera y $f : S^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \mathrm{dist}(x, N)^2$ donde $N = (0, 0, 1)$. Consideremos ademas, las cartas (U, ϕ_N) y (V, ϕ_S) dadas por las proyecciones estereográficas y $p = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

   Se definen

   $$v_1 = 8\frac{\partial}{\partial \phi_N^1}|_p + 5\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial \phi_N^2}|_p, \qquad v_2 = (-15\sqrt{2}+20)\frac{\partial}{\partial \phi_S^1}|_p + (-24+16\sqrt{2})\frac{\partial}{\partial \phi_S^2}|_p.$$

   a) Probar que f es diferenciable.

   b) Calcular $v_1(f)$ y $v_2(f)$.

   c) Probar que en realidad $v_1 = v_2$.

3. Se considera el toro $T = S^1 \times S^1$ y la función $f(e^{it}, e^{iu}) = \mathrm{sen}(3t)\cos(5u)$, mirando $S^1 \subset \mathbb{C}$. Elegir alguna carta alrededor de $p = (1, 1)$ en T y calcular las derivadas de f con respecto a las coordenadas dadas por la carta en p.

4. Sea $M = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y se considera $\det : M \to \mathbb{R}$. Dado que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ es un abierto, identificamos $T_{\mathrm{Id}}\,\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \simeq T_{\mathrm{Id}}M_n(\mathbb{R}) \simeq M_n(\mathbb{R})$ y llamamos e_{ij} a las coordenadas así dadas. Calcular $\frac{\partial \det}{\partial e_{ij}}$ y $\frac{\partial \det}{\partial e_{ij}}|_{\mathrm{Id}}$.

5. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto, $\phi : U \to \mathbb{R}$ diferenciable y $M = \{(u, \phi(u)) \mid u \in U\}$ su gráfico visto como variedad mediante la carta (M, π), donde $\pi(u, \phi(u)) = u$.

   Si $f : M \to \mathbb{R}$ es la función dada por $f(u, \phi(u)) = \phi(u)$, calcular $\frac{\partial}{\partial \pi^i}|_p(f)$ en función de las derivadas parciales de ϕ.

6. Calcular el diferencial de $f : S^1 \times (-1, 1) \to S^2$,

   $$f(z, t) = (z_1\sqrt{1-t^2}, z_2\sqrt{1-t^2}, t), \qquad \text{donde } z = z_1 + iz_2,$$

   en los puntos de la forma $(1, t) \in S^1 \times (-1, 1)$.

7. Consideremos la inclusión $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, expresar en la base $\{e_{ij}\}$ dada por el ejercicio 4 la imagen de $T_I(\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})) \hookrightarrow T_I(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}))$. Repetir lo mismo para $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

8. Sean M, N variedades y p, q puntos en ellas respectivamente. Tomemos las inclusiones $i_M : M \to M \times N$ dada por $i_M(x) = (x, q)$ y $i_N : N \to M \times N$ dada por $i_N(y) = (p, y)$.

   Probar que $T_{(p,q)}(M \times N) = d_p i_M(T_p M) \oplus d_q i_N(T_q N)$.

9. Sea $f : M \to N$ diferenciable, sea $q \in N$ y sea $X = f^{-1}(q)$. Probar que si $f|_X$ es una submersión entonces X es una variedad diferencial con la estructura dada por el teorema de la función implícita y $d_p i(T_p X) = \ker(d_p f)$, donde $i : X \to M$ es la inclusión.

10. Sea M una variedad compacta de dimensión d. Demostrar que una función diferenciable $f : M \to \mathbb{R}^d$ no puede ser no singular en todo punto.

11. Sea M una variedad diferencial de dimensión d y denotemos para cada p por $\mathcal{D}_p(M)$ el anillo de gérmenes en p y por $\mathcal{M}_p$ su ideal maximal.

    Si (U, ϕ) es una carta con $p \in U$ y $\phi = (\phi^1, \ldots, \phi^d)$, probar que

    $$\{\overline{\phi^1 - \phi^1(x)}, \ldots, \overline{\phi^d - \phi^d(x)}\}$$

    es una base de $\mathcal{M}_p/\mathcal{M}_p^2$.

12. Consideramos el anillo $\mathbb{R}[\epsilon] = \mathbb{R}[X]/(X)^2$. Probar que $T_p M$ se puede identificar con los morfismos de anillos $\mathcal{D}_p(M) \to \mathbb{R}[\epsilon]$.

13. Probar que se puede identificar $T_p M$ con los morfismos lineales $d : \mathcal{D}_p(M) \to \mathbb{R}$ tales que $d(fg) = d(f)g(p) + f(p)d(g)$.