Geometría Diferencial 2011

Práctica 1 - Variedades y funciones diferenciables

1. Probar que los siguientes conjuntos tienen una estructura de variedad diferencial de dimensión d y exhibir un atlas en cada caso.

   a) Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ con $d = dimV$.

   b) La esfera $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ con $d = n$.

   c) El espacio proyectivo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\sim$, donde $x \sim y$ si $x = -y$, con $d = n$.

   d) El toro $T_n = S^1 \times ... \times S^1$ con $d = n$.

   e) El cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ con $d = 2$.

   f) El grupo general lineal $Gl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) \neq 0\}$, $d = n^2$.

   g) El grupo especial lineal $Sl_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : \det(A) = 1\}$, $d = n^2 - 1$.

   h) El grupo ortogonal $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : A \cdot A^t = 1\}$, $d = n(n-1)/2$.

2. Sea $M = \mathbb{R}^n \cup \{0'\}$, donde $0' \notin \mathbb{R}^n$. Se consideran dos cartas sobre M: una es $(id, \mathbb{R}^n)$; la otra es (ϕ, U), donde $U = M - \{0\}$, $\phi(p) = p$ si $p \neq 0$ y $\phi(0') = 0$. Probar que $\mathcal{A} = \{(id, \mathbb{R}^n), (\phi, U)\}$ es un atlas para M, pero que M no resulta una variedad T2 con esta estructura.

3. Sea M una variedad diferencial y sea $U \subset M$ abierto. Probar que U hereda una estructura de variedad con $dim(U) = dim(M)$ y que la inclusión $U \to M$ es diferenciable para esa estructura.

4. Sean M y N variedades diferenciales. Probar que el producto cartesiano $M \times N$ es naturalmente una variedad con $dim(M \times N) = dim(M) + dim(N)$ y que las proyecciones $M \times N \to M$ y $M \times N \to N$ son diferenciables.

5. Dada una funcion diferenciable $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$ fijo, definamos
$$M = \{p \in \mathbb{R}^n : F(p) = a \text{ y } d_pF \neq 0\}.$$
   Probar que con las cartas dadas por el teorema de la función implícita M es una variedad diferencial de dimensión $n - 1$ y que la inclusión $M \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable.

6. Sea M una variedad diferencial de dimensión d y (U, ϕ) una carta de M.

   a) Probar que si $V \subset U$ es un abierto, entonces $(V, \phi|_V)$ es una carta compatible de M.

   b) Probar que si $f : \phi(U) \to V \subset \mathbb{R}^d$ es un difeomorfismo entonces $(U, f \circ \phi)$ es una carta compatible de M.

7. Sea M una variedad diferencial de dimensión d. Probar que M admite un atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) : i \in I\}$ tal que

   a) para todo i en I se tiene que $\phi_i(U_i)$ es un abierto acotado de $\mathbb{R}^d$.

   b) para todo i en I se tiene que $\phi_i(U_i) = \mathbb{R}^d$.

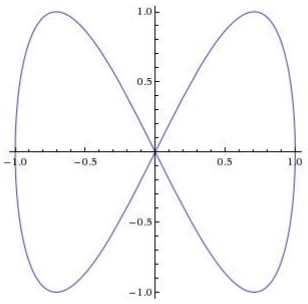
8. Considerar en $\mathbb{R}$ las siguientes cartas:

   a) $(\mathbb{R}, id)$.

   b) $(\mathbb{R}, \varphi)$ donde $\varphi(x) = x^3$.

   Probar que las dos cartas no son compatibles pero que las variedades definidas por el atlas formado por cada una de las cartas son difeomorfas.

9. Sea M la imagen de la función $f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ donde $f(t) = (sin(t), sin(2t))$ y démosle la estructura inducida por la carta (M, f^{-1}). Probar que la función $F : M \to M$ definida por $F(x, y) = (x, -y)$ no es diferenciable.



10. **Pegado de variedades.**
    Sea $\{M_i\}_{i \in I}$ una familia numerable de variedades diferenciales, todas de dimensión n. Supongamos que para cada par $i \neq j$ están dados dos abiertos: $U_{ij} \subset M_i$ y $U_{ji} \subset M_j$, y un difeomorfismo $f_{ij} : U_{ij} \to U_{ji}$ que no puede extenderse continuamente a ningún punto de ∂U_{ij}, para los que se satisfacen las siguientes propiedades:

    a) $f_{ji} = f_{ij}^{-1}$.

    b) $f_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$.

    c) $f_{ik} = f_{jk} \circ f_{ij}$ en $U_{ij} \cap U_{ik}$.

    Mostrar que existe una variedad diferencial M y morfismos $\psi_i : M_i \to M$ tales que ψ_i es un difeomorfismo entre M_i y un abierto de M y

    I) los abiertos $\psi_i(M_i)$ cubren M,

    II) $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(M_i) \cap \psi_j(M_j)$,

    III) $\psi_i = \psi_j \circ f_{ij}$ en U_{ij}.

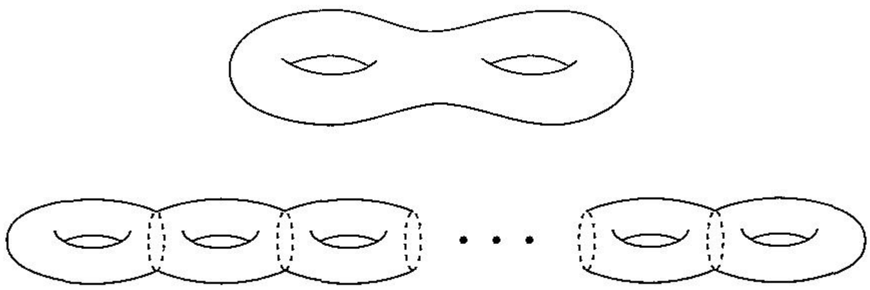
11. **Suma de variedades.**
Sean M y N dos variedades conexas de la misma dimensión. Se consideran cartas (U, ϕ) y (V, ψ) de M y N respectivamente tales que $\phi(U) = \psi(V) = B(0,1)$ y pongamos $p = \phi^{-1}(0)$ y $q = \psi^{-1}(0)$.

Definimos una nueva variedad $M\#N$ como el pegado de $M \setminus \{p\}$ y $N \setminus \{q\}$ por los abiertos U y V a través del difeomorfismo $f : U \to V$ determinado por la ecuación

$$\psi f \phi^{-1}(x) = \frac{1 - ||x||}{||x||} \cdot x \qquad \forall x \in B(0,1) \setminus \{0\}$$

La variedad $M\#N$ se llama suma de M y N. Convencerse que esta construcción no depende de las cartas utilizadas.

Observación: Se puede probar que cualquier variedad compacta de dimensión 2 es difeomorfa a la esfera S^2, a la suma de n toros $T\# \cdots \#T$ o a la suma de n planos proyectivos $\mathbb{P}^2\# \cdots \#\mathbb{P}^2$. Es más, estas variedades no son homeomorfas entre sí.



12. **Cociente por la acción de un grupo.**
Sea M una variedad diferencial y G un grupo que actúa en M por difeomorfismos: para cada $g \in G$ se tiene $\phi_g : M \to M$ difeomorfismo de modo que $\phi_e = id_M$ y $\phi_g \phi_h = \phi_{gh}$.

Supongamos ademas que la acción es propiamente discontinua (todo p está contenido en un abierto U tal que $\phi_g(U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \neq e$) y para todos p y q en distintas órbitas existen abiertos U y V que los contienen respectivamente tales que $\phi_g(U) \cap V = \emptyset$ para todo $g \in G$.

   a) Probar que el conjunto de órbitas M/G es una variedad diferencial con la estructura inducida por M, la proyección $M \to M/G$ es diferenciable y $dim(M) = dim(M/G)$.

   b) Expresar el espacio proyectivo $\mathbb{P}^n$ y el toro n-dimensional T^n como cocientes S^n/G y $\mathbb{R}^n/H$ para grupos y acciones convenientes.

13. Probar que $\mathcal{D}(M, \mathbb{R}) = \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ es diferenciable}\}$ es un anillo con la suma y el producto punto a punto. Probar que si $g : M \to N$ es diferenciable, entonces $g^* : \mathcal{D}(N, \mathbb{R}) \to \mathcal{D}(M, \mathbb{R})$ es un morfismo de anillos.

14. * Dadas M y N variedades compactas probar que

    a) Los ideales maximales de $\mathcal{D}(M, \mathbb{R})$ son de la forma

    $$\mathcal{M}_p = \{f : f \in \mathcal{D}(M, \mathbb{R}), f(p) = 0\}$$

    b) Todo morfismo de $\mathbb{R}-$algebras de $\mathcal{D}(N, \mathbb{R})$ en $\mathcal{D}(M, \mathbb{R})$ viene de una funcion diferenciable entre M y N.

    Observación: Por a) podemos recuperar la variedad M como conjunto a partir de $\mathcal{D}(M, \mathbb{R})$, por b) tambien recuperamos su estructura diferenciable. ¿Qué pasa si M y N no son compactas? ¿Vale b) si solo pedimos morfismo de anillos?

15. Probar que el conjunto $\mathcal{D}_p(M)$ de gérmenes de funciones diferenciables a valores reales alrededor de un punto p de M es un anillo y si $g : M \to N$ es diferenciable entonces $g^* : \mathcal{D}_{g(p)}(N) \to \mathcal{D}_p(M)$ es un morfismo de anillos.

16. * Dado p en M probar que la aplicación cociente $f \mapsto \bar{f}$ da un isomorfismo de $\mathbb{R}-$algebras

    $$\mathcal{D}(M, \mathbb{R})/\mathcal{M}_p^0 \to \mathcal{D}_p(M)$$

    Donde $\mathcal{M}_p^0 = \{f : f \in \mathcal{D}(M, \mathbb{R}), f \text{ se anula en un entorno de } p\}$.

    Observación: Las $\mathbb{R}-$algebras $\mathcal{D}_p(M)$ son anillos locales cuyo único ideal maximal son los gérmenes de funciones que se anulan en p. Mas aún, $\mathcal{D}_p(M)$ es la localización de $\mathcal{D}(M, \mathbb{R})$ en el complemento del ideal maximal $\mathcal{M}_p$.