PRÁCTICA 4

1 Probar las siguientes proposiciones en el plano proyectivo real:
a) Dos puntos cualesquiera de una recta determinan la misma recta .
b) No todos los puntos del plano proyectivo pertenecen a una misma recta .
c) Toda recta tiene por lo menos tres puntos .
d) Dos rectas distintas del plano proyectivo siempre tienen un punto común .
e) No todas las rectas del plano proyectivo pasan por un mismo punto .
f) Por todo punto del plano proyectivo pasan por lo menos tres rectas .

2 Si A, B, C son puntos de una recta r y A', B', C' otros de una recta r', tales que AA', BB', CC' sean rectas concurrentes. Probar que los puntos $P = AB' \cap A'B$, $Q = BC' \cap B'C$ y $R = AC' \cap A'C$ están alineados con el punto $O = r \cap r'$.

3 Deducir las fórmulas que permiten escribir el valor de la razón doble de cuatro puntos en coordenadas homogéneas y en coordenadas no homogéneas.

4 Dados cuatro puntos alineados tales que $(ABCD) = \rho$, calcular el valor de todas las razones dobles que pueden definirse con esos puntos.

5 Si $A = (2, 1, 3)$ $B = (1, 1, 3)$ $C = (0, 1, 3)$ $D = (1, 1, 3)$, calcular (A, B, C, D).

6 Si $A = (2, 1, 3)$ $B = (1, 1, 3)$ $C = (0, 1, 3)$, hallar si es posible, D tal que $(A, B, C, D) = 3$.

7 Demostrar que si una proyectividad φ del haz de rectas por el punto O en si mismo, verifica que:$\varphi(a) = b$ y $\varphi(b) = a$ para un par de rectas a, b del haz, entonces si $\varphi(c) = d$, $\varphi(d) = c$

8 Dados dos puntos propios A, B del plano proyectivo, sea R el punto impropio de la recta AB . Construir el cuarto armónico de ABR .

9 Un triángulo ABC se corta con una recta r , llamemos P_a, P_b y P_c a los puntos de intersección con cada uno de los lados. Sean P'_a el conjugado armónico de P_a respecto de C, B y análogamente P'_B y P'_c .
a) Probar que AP'_a , BP'_b y CP'_c concurren en un punto.
b) Enunciar el teorema dual.

10 Trazar por un punto dado del plano una recta que pase por el punto de intersección de otras dos que se cortan fuera de los límites del dibujo.

11 Hallar las ecuaciones de la colineación que manda los puntos:

$$A = (1, 0, 0) \qquad B = (0, 1, 0) \qquad C = (1, 1, 1) \qquad D(2, 0, 1)$$

en los puntos:

$$A = (0, 0, 1) \qquad B = (0, 1, 1) \qquad C = (1, 0, 1) \qquad D(-1, 2, 3)$$

12 Enunciar los teoremas límite del teorema de Brianchon, y verificar que son los teoremas duales de los teoremas límite del teorema de Pascal.

13 Dados cinco puntos de una cónica, hallar otros puntos

14 Dada una cónica por 4 tangentes y el punto de contacto de una de ellas, hallar :
a) otra tangente.
b) el punto de contacto de otra de las tangentes dadas.

15 Si cinco de los seis vértices de un hexágono están situados en una circunferencia y los tres pares de lados opuestos se cortan en tres puntos alineados, entonces el sexto vértice está situado en la misma circunferencia.

16 Los vértices Y, Z de un triángulo XYZ se mueven sobre dos rectas y, z y además los lados YZ, YX, XZ pasan respectivamente por los puntos fijos A, B, C. Probar que el punto X describe una cónica.

17 Dado un cuadrilátero convexo $ABCD$, hallar una homología que lo transforme en un paralelogramo.

18 Probar que la colineación que manda A, B, C, D en B, A, D, C es una homología. Hallar el eje y el centro.

19 Si A es un punto de una cónica, ¿cuál es su polar? Dados A y B dos puntos de una coñica, deducir que el polo de la recta que pasa por esos puntos es el punto de intersección de las rectas tangentes t_A y t_B.

20 Probar que las polares de los puntos de una recta pasan por el polo de la misma. Enunciar el resultado dual.

21 Construir la polar de un punto respecto de una cónica dada por 5 puntos.