PRÁCTICA 3

1 Dados a, b y c construir las operaciones indicadas y comparar los resultados obtenidos:

a) $(a.b).c$ y $a(b.c)$

b) $\dfrac{a^2}{b}$ y $a.\dfrac{a}{b}$

c)$(a+b)^2$ y $a^2+2ab+b^2$

2 Construir los siguientes números $\sqrt{7}$(de dos maneras distintas), $\frac{3}{5}$, $2+3\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{2}$.

3 Sea ABC un triángulo y R el radio de la circunferencia circunscripta. Probar:

a) $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{b}{\operatorname{sen} B}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}=2R$

b) $a=b\cos C+c\cos B$

c) área $ABC=\dfrac{abc}{4R}$

4 Las mediatrices de un triángulo concurren en un punto.

5 Las bisectrices de un triángulo concurren en un punto.

6 Las bisectrices de un triángulo dividen al lado opuesto en dos segmentos de longitud proporcional a la longitud de los lados adyacentes. ¿Qué se puede decir de las bisectrices exteriores?

7 Demostrar que las bisectrices de un triángulo concurren en un punto usando el teorema de Ceva y el resultado anterior.

8 Dado un triángulo ABC, X, Y, Z los puntos de tangencia (a los lados $BC, ACyAB$, respectivamente) de la circunferencia inscripta en el triángulo y O el incentro.Probar que los triángulos BOX y BZO son iguales. ¿Qué puede decirse entonces de los segmentos BX y BZ; ZA y AY YC y CX?

9 Con la misma notación del ejercicio anterior, probar que AX, BY y CZ concurren en un punto (Este punto se denomina el punto de Gergonne del triángulo).

10 Dado un triángulo ABC, CM la mediana correspondiente al lado AB, se traza por A y por B perpendiculares a CM. Probar que los segmentos obtenidos son iguales.

11 Las medianas de un triángulo lo dividen en seis triángulos de igual área.

12 En todo triángulo, las medianas concurren en un punto ¿Qué propiedad tiene ese punto?

13 Si un triángulo tiene dos de sus medianas congruentes, entonces es isósceles.

14 Las rectas que continen las alturas de un triángulo concurren en un punto.

15 El ortocentro de un triángulo acutángulo es el centro de la circunferencia inscripta a su triángulo órtico.

16 Sean AD, CF y BE las alturas del ABC. Los triángulos AEF, DBF, DEC y ABC son semejantes.

17 Dado ABC, llamemos $A'B'C'$ a su medial:
a) ABC y $A'B'C'$ tienen el mismo baricentro.
b) Las alturas de $A'B'C'$ son mediatrices de ABC.
c) El punto medio del segmento de Euler es el centro de la circunferencia circunscripta al $A'B'C'$.

18 La figura que se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero es un paralelogramo cuya área es la mitad del área del cuadrilátero original.

19 Si una diagonal divide un cuadrilátero en dos triángulos de igual área, entonces corta a la otra diagonal en su punto medio. ¿Vale el resultado recíproco ? Justificar.

20 a) Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que sus diagonales son perpendiculares. Probar que el cuadrilátero con vértices en los puntos medios de los lados es un rectángulo. ¿Qué condición deben cumplir las diagonales para que sea un cuadrado?
b) Sean A y B los puntos medios de dos lados opuestos de un cuadriltero y M y N los puntos medios de una de sus diagonales. ¿Qué clase de cuadrilátero es AMBN?

21 Probar que un cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia, si y sĺo si sus ángulos opuestos son suplementarios.

22 Cuatro cantidades distintas cualesquiera tales que cada una es menor que la suma de las otras tres, sirven como lados de tres cuadriláteros cíclicos distintos, todos con igual área.
a) Si los lados son a, b, c y d y llamamos s al semiperímetro, probar que el área K verifica

$$K = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

b) Dado el triángulo de lados a, b, y c y semiperímetro s probar la fórmula de Herón para calcular su área K

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

23 Analizar por lo menos 5 casos de construcción de triángulos dados 3 de sus elementos.

24 Sea P un punto exterior a una circunferencia de centro O y radio r y sean T y T' dos puntos sobre la circunferencia tales que PT y PT' son tangentes a la circunferencia.
a) Comparar los triángulos OTP y $OT'P$.
b) Probar que $TOT'P$ puede inscribirse en una circunferencia. ¿Cuál es el radio y cuál es el centro de la misma?

25 Trazar las tangentes a una circunferencia por un punto exterior a la misma.

26 Justificar el siguiente trazado de las tangentes exteriores a dos circunferencias: dadas las cicunferencias $C_1 = C(O_1, r_1)$ y $C_2 = C(O_2, r_2)$ con $r_1 \geq r_2$, construir la circunferencia de centro O_1 y radio $r_1 - r_2$ y desde O_2 la tangente a ella : O_2T; trazar la recta que pasa por T y O_1 hasta cortar a C_1 en un punto T_1 ; trazar por O_2 una paralela a O_1T_1 que al cortar C_2 determina el punto T_2 ; T_1T_2 es la tangente buscada.

27 Con un argumento similar al del ejerccio anterior trazar las tangentes interiores comunes a dos circunferencias.

28 Analizar por lo menos 2 casos de construcción de circunferencias dados 3 de sus elementos

29 Dada una circunferencia, hallar su centro. Dar dos métodos distintos para construirlo.

30 Construir un cuadrado inscripto en una circunferencia. ¿Qué otros polígonos pueden obtenerse a partir de él?

31 Construir un ángulo de 18°. (Sugerencia: pensar en la medida de los ángulos interiores de los polígonos regulares).