Ecuaciones Diferenciales - 1° cuatrimestre 2011
Práctica 6
ESPACIOS DE SOBOLEV

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $u,\ v \in W^{k,p}(\Omega),\ |\alpha| \leq k$. Entonces
   (a) $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ y $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo par de multiíndices α, β tales que $|\alpha| + |\beta| \leq k$.
   (b) Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
   (c) Si $V \subset \Omega$, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.
   (d) Si $\zeta \in C_0^\infty(\Omega)$, entonces $\zeta u \in W^{k,p}(\Omega)$ y
   $$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta\leq\alpha} \left(\begin{array}{c}\alpha \\ \beta\end{array}\right) D^\beta \zeta D^{\alpha-\beta} u.$$
   (e) $W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

2. (a) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $1 \leq p < \infty$ entonces $u \in AC[a,b]$.
   (b) Probar que si $u \in W^{1,p}((a,b))$, $p > 1$, entonces
   $$|u(x) - u(y)| \leq \left(\int_a^b |u'|^p dt\right)^{1/p} |x-y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

3. Sea $f \in H^1(\mathbb{R})$, probar que $h^{-1}\left(\tau_h f - f\right)$ converge a f' en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $h \to 0$, donde $\tau_h f(x) = f(x+h)$.
   Hint: escribir $h^{-1}\left(\tau_h f - f\right)$ como $f' * \varphi_h$.

4. (a) Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1((a,b))$ $|f(x)| \leq C\|f\|_{H^1((a,b))}$
   (b) Mostrar que (a) es falso en $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^2$.
   (c) Usando el teorema de Arzelá-Ascoli, probar que un conjunto acotado de $H^1((a,b))$ es precompacto en $C([a,b])$, y por lo tanto en $L^2((a,b))$.

5. Sea $f \in L^2((a,b))$ tal que $f(a) = f(b)$. Probar que $f \in H^1((a,b))$ si y sólo si $\sum_k k^2 |\hat{f}(k)|^2 < \infty$, donde $\hat{f}(k)$ son los coeficientes del desarrollo de f en series de Fourier.

6. Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Definimos $u^\varepsilon \equiv \eta_\varepsilon * u$ en Ω_ε (dónde η es el nucleo regularizante, η_ε las aproximaciones de la identidad y $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega /\ \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$). Entonces
   (a) $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$.
   (b) $u^\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

7. Probar que si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ entonces
   $$\int_\Omega |Du|^2 dx \leq C \left(\int_\Omega |u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\Delta u|^2 dx\right)^{1/2}.$$
   Concluir que en $H_0^2(\Omega)$, $\|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$ es una norma equivalente a la usual.

8. Supongamos que Ω es conexo y que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ satisface $\nabla u = 0$ a.e. en Ω. Probar que u es constante en Ω.

9. Sea Ω un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^n$ con borde C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de n y Ω tal que
   $$\|u - (u)_\Omega\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$
   para cada $u \in H^1(\Omega)$, donde
   $$(u)_\Omega = \fint_\Omega u\, dx.$$

10. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^1 con F' acotada. Supongamos que Ω es acotado y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para $1 < p < \infty$. Probar que
   $$F(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{y} \quad F(u)_{x_i} = F'(u) u_{x_i}\ (i = 1, \ldots, n).$$

11. Sea $1 < p < \infty$ y Ω acotado.

   (a) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(\Omega)$ y

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{a.e. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. en } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{a.e. en } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & \text{a.e. en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

   (Sugerencia: $u^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$ para

$$F_\varepsilon(z) = \begin{cases} (z^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{si } z \geq 0 \\ 0 & \text{si } z < 0.) \end{cases}$$

   (b) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(\Omega)$.

   (c) Probar que si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces

$$\nabla u = 0 \text{ a.e. en } \{u = 0\}.$$

12. Usar la transformada de Fourier para probar que si $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ con $k > n/2$, entonces $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)},$$

   donde la constante C depende sólo de k y n.

13. Una función $u \in H_0^2(\Omega)$ se dice una solución débil del siguiente problema de valores de contorno para el operador *bilaplaciano*

$$\begin{cases} \Delta^2 u & = & f & \text{en } \Omega \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

   si verifica

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx$$

   para toda $v \in H_0^2(\Omega)$. ($\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$).

   (a) Probar que $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución clásica de (**??**) si y sólo si es solución débil de (**??**).

   (b) Probar que dada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil de (**??**). (Sugerencia: Ejercicio **??**).

14. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u & = & f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

   donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

   (a) Mostrar que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución del problema de Neumann si y sólo si verifica la siguiente *formulación débil*:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi dx + \int_\Omega u \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx$$

   para toda $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

   (b) Mostrar que para toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in H^1(\Omega)$ solución débil de este problema.

15. Consideremos la siguiente ecuación diferencial elíptica de segundo orden:

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} u_{x_j}) + \sum_{j=1}^n b_j u_{x_j} + cu & = & f & \text{en } \Omega \\ u & = & 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

   donde

   (a) $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ con $\lambda|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$.

   (b) $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$.

(c) $b_j \in L^\infty(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ con $\operatorname{div} b = 0$ en Ω.

Probar que para toda $f \in L^2(\Omega)$, existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil del problema.

16. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$.

(a) Dar una formulación débil del problema y mostrar que si existe una solución débil, entonces $\int_\Omega f\, dx = 0$.

(b) Mostrar que si $f \in L^2(\Omega)$ verifica que $\int_\Omega f\, dx = 0$, entonces existe una única $u \in H^1(\Omega)$ con $\int_\Omega u\, dx = 0$ solución débil de este problema. Más aún, dicha solución es única en $H^1(\Omega)$ salvo constante. (Sugerencia: Ejercicio **??**).

17. *Principio débil del máximo*

Sea $Lu = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i}$ un operador uniformemente elíptico con $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Decimos que $u \in H^1(\Omega)$ verifica $Lu \geq 0$ en sentido débil o, equivalentemente, que es una subsolución débil de $Lu = 0$ si

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_j} v_{x_i}\, dx \leq 0, \qquad \text{para toda } v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq 0.$$

(a) Verificar que $u \in C^2(\Omega)$ es subsolución débil de $Lu = 0$ si y sólo si $Lu \geq 0$.

(b) Probar que si u es subsolución débil de $Lu = 0$ y $u^+ \in H_0^1(\Omega)$ (es decir $u \leq 0$ en $\partial\Omega$), se tiene que $u \leq 0$ en Ω.

18. Consideremos el siguiente problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \quad \text{en } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\partial\Omega \in C^1$.

Probar que existe una sucesión $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \nearrow \infty$ de autovalores del problema con autofunciones $u_k \in H^1(\Omega)$ donde $u_1 = cte$ y $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$ y una base ortogonal de $H^1(\Omega)$.

19. *Lema de Cea*

Se intenta construir una aproximación de la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Para eso, se toma un subespacio de dimensión finita $V \subset H_0^1(\Omega)$, $V = \langle \phi_1, \ldots, \phi_n \rangle$ y se define la *solución aproximada* $\tilde{u} \in V$ como la solución del problema

$$\int_\Omega \nabla \tilde{u} \nabla \phi_i\, dx = \int_\Omega f \phi_i\, dx \quad i = 1, \ldots, n.$$

(a) Probar que $\tilde{u}$ está bien definida (es decir, existe una única solución del problema aproximado).

(b) Probar que se tiene la siguiente *estimación de error*

$$\|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \inf_{v \in V} \|u - v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

es decir, el método da la “mejor aproximación” que permite el subespacio V.

20. Se define el *p-Laplaciano* como $\Delta_p u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ con $p > 1$ (cuando $p = 2$, $\Delta_p = \Delta$). Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f \in L^{p'}(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$).

(a) Probar que $u \in C_0^2(\Omega)$ es solución del problema si y sólo si verifica la siguiente formulación débil

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \varphi dx = \int_\Omega f \varphi dx$$

(b) Probar que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ minimiza el siguiente funcional

$$\Psi : W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$\Psi(u) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - \int_\Omega f u dx$$

entonces es una solución débil del problema del p-Laplaciano.

21. Probar que existe una única solución débil de la ecuación del calor con condiciones de Neumann

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ u &= u_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$