Ecuaciones Diferenciales - 1° cuatrimestre 2011
Práctica 6 Ecuación de Ondas

---

1. Utilizar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t) & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. Verificar el que cambio de variables $\xi = x + t$, $\eta = x - t$ transforma la ecuación de ondas $u_{tt} - u_{xx} = 0$ en

$$u_{\xi\eta} = 0.$$

Usar este cambio de variables para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

3. Encontrar una fórmula explícita para la solución de

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} &= 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) &= 0 & t > 0 \\ u(x,0) &= g(x) & x > 0 \\ u_t(x,0) &= h(x) & x > 0. \end{cases}$$

4. Sea u la solución de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) &= g(x) & \text{en } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \\ u_t(x,0) &= h(x) & \text{en } \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

dada por la fórmula de Kirchhoff, donde g, h son suaves y tienen soporte compacto. Mostrar que existe una constante C tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0.$$

5. Se define una solución débil de la ecuación de ondas unidimensional a una función u tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)(\phi_{tt}(x,t) - \phi_{xx}(x,t))\, dxdt = 0$$

para toda $\phi \in C_0^2(\mathbb{R}^2)$.

(a) Mostrar que toda solución clásica de la ecuación de ondas unidimensional es una solución débil y que toda solución débil regular de la ecuación de ondas es solución clásica.

(b) Mostrar que las funciones discontinuas

$$u_1(x,t) = H(x-t), \quad u_2(x,t) = H(x+t)$$

donde H es la función de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

son soluciones débiles de la ecuación de ondas unidimensional.

6. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (i.e. $u(x,t) = w(|x|,t)$ $x \in \mathbb{R}^3$), se tiene que existen F y G tales que

$$u(x,t) = \frac{F(|x| - t) + G(|x| + t)}{|x|}.$$

7. Sea u la solución clásica de

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{en } B_1(0) \times \{t > 0\} \\ u &= 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times \{t > 0\} \\ u &= f & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u_t &= g & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Probar que si f y g son radiales entonces u es radial.