

Ecuaciones Diferenciales – 1° cuatrimestre 2011

PRÁCTICA 2 – SEPARACIÓN DE VARIABLES.

1. Resolver, usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $(0, 1) \times (0, 1)$, se busca $u = u(x, y)$ tal que

(a)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } D, \\ u(x, 0) = 0, \\ u(1, y) = 0, \\ u(x, 1) = 0, \\ u(0, y) = \sin(\pi y). \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } D, \\ u(x, 0) = 2 \sin(3\pi x), \\ u(1, y) = 0, \\ u(x, 1) = 0, \\ u(0, y) = 3 \sin(\pi y) + 5 \sin(2\pi y). \end{cases}$$

2. Resolver usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $(0, 1) \times (0, 1)$, se busca $u = u(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{en } D, \\ u(x, 0) = f_1(x), \\ u(1, y) = f_2(y), \\ u(x, 1) = f_3(x), \\ u(0, y) = f_4(y). \end{cases}$$

Imponer condiciones sobre las f_i para que la función hallada sea efectivamente solución de la ecuación.

3. Resolver, analizando la validez de la solución, la ecuación de Laplace en un disco en \mathbb{R}^2 .

(a) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } |x| < 1, \\ u = f & \text{en } |x| = 1, \end{cases}$

donde $f \in C^1(\{|x| = 1\})$.

Sug.: Pasar a coordenadas polares y tener en cuenta que la solución de

$$t^2 v''(t) + tv'(t) - n^2 v(t) = 0 \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

es

$$v_n(t) = \begin{cases} a + b \ln t & \text{si } n = 0, \\ at^n + bt^{-n} & \text{si } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

donde a y b son constantes.

(b) $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } |x| < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = f & \text{en } |x| = 1, \end{cases}$

donde f es como en (a) y además $\int_{\{|x|=1\}} f dS = 0$ y u se anula en el origen.

Probar la ecuación del ítem (b) no tiene solución si $\int_{\{|x|=1\}} f dS \neq 0$.

¿Qué sucede si no se requiere que u se anule en el origen?

4. Resolver por el método de separación de variables,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + cu = 0, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \\ u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x). \end{cases}$$

Sugerencia: Proponer $v(x, t) = u(x, t)e^{ct}$.

5. Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & \text{en } (0, 1) \times (0, \infty), \\ u_x(0, t) = 0, & t > 0, \\ u_x(1, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1, \end{cases}$$

con $u_0 \in L^2(0, 1)$.

(a) Por el método de separación de variables, hallar la solución del problema y verificar que es una solución clásica en $(0, 1) \times (0, \infty)$.

(b) Verificar que la solución hallada en (a) satisface $u(\cdot, t) \rightarrow u_0$ en $L^2(0, 1)$ cuando $t \rightarrow 0$ y que $u(x, t) \rightarrow \int_0^1 u_0 dx$ cuando $t \rightarrow \infty$ uniformemente. Interpretar físicamente.

6. Aplicar el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de conducción de calor en un disco de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & |x| < 1, t > 0 \\ u(x, t) = 0 & |x| = 1, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & |x| \leq 1 \end{cases}$$

donde $u_0(x) = \phi(|x|)$ (y por ende $u(x, t) = w(|x|, t)$).

7. Resolver por el método de separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } (0, L) \times (0, \infty), \\ u(0, t) = A, u(L, t) = B & \text{en } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) & \text{en } 0 < x < L, \end{cases}$$

donde A y B son constantes, reduciendo el problema a uno con condiciones homogéneas.

8. Resolver por el método de separación de variables el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{en } (0, L) \times (0, \infty), \\ u_x(0, t) = 0, u_x(L, t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x) & \text{en } 0 < x < L. \end{cases}$$