

## PRÁCTICA 7: TEOREMA DE RADON-NIKODYM Y MEDIDAS DE PROBABILIDAD

**Ejercicio 1.** Sean  $\mu_1$  y  $\mu_2$  dos medidas sobre el espacio medible  $(X, \Sigma)$ , tal que por lo menos una de ellas es finita. Si  $\nu(E) = \mu_1(E) - \mu_2(E)$ , ( $E \in \Sigma$ ), probar que  $\nu$  es una medida con signo.

**Ejercicio 2.** Sea  $\nu$  una medida con signo. Probar:

- (a) Si  $P$  es un conjunto positivo con respecto a  $\nu$  y  $A \subset P$ , entonces  $A$  es un conjunto positivo con respecto a  $\nu$ .
- (b) Si  $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$  son conjuntos positivos con respecto a  $\nu$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^n P_i$  también lo es.

**Ejercicio 3.** Sea  $\nu$  una medida con signo sobre el espacio medible  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Sean  $A$  un conjunto positivo y  $B$  un conjunto negativo con respecto a  $\nu$  tales que:  $\Omega = A \cup B$  y  $A \cap B = \emptyset$ . Dado  $E \in \mathcal{F}$ , probar:

- (a)  $\nu^+(E) = \nu(E \cap A) = \sup\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\}$ ,
- (b)  $-\nu^-(E) = \nu(E \cap B) = \inf\{\nu(H) : H \subseteq E, H \in \mathcal{F}\}$ .

**Ejercicio 4.** Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  un espacio de medida y  $f$  tal que existe  $\int_{\Omega} f d\mu$ . Si  $\nu(E) = \int_E f d\mu$ ,  $E \in \mathcal{F}$ , probar que:

$$\nu^+(E) = \int_E f^+ d\mu, \quad \nu^-(E) = \int_E f^- d\mu$$

**Ejercicio 5.**

- (a) Sean  $\lambda$  y  $\mu$  medidas sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  y  $\lambda(\Omega) < \infty$ . Probar:

$$\lambda \ll \mu \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \mu(E) < \delta \implies \lambda(E) < \epsilon.$$

- (b) Demostrar que la hipótesis  $\lambda(\Omega) < \infty$  es necesaria en (a). (Sug. Considerar  $\mu$  la medida de Lebesgue en  $(0, 1)$  y  $\lambda(E) = \int_E \frac{dt}{t}$  para todo  $E \subseteq (0, 1)$  medible Lebesgue.)

**Ejercicio 6.** Sea el espacio de medida  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}, \delta)$  donde  $\mathcal{M}$  es la  $\sigma$ -álgebra de conjuntos medibles Lebesgue y,

$$\delta(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A, \\ 0, & 0 \notin A. \end{cases}$$

- (a) Probar que no existe  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  medible tal que

$$\delta(A) = \int_A f(x) dx \quad (\forall A \in \mathcal{M}).$$

- (b) Dada  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  medible, hallar todas las funciones medibles  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f = g$  a. e. con respecto a  $\delta$ .

**Ejercicio 7.** Sean  $\mu$  y  $\nu$  dos medidas sobre el espacio medible  $(X, \Sigma)$ . Si para todo  $\epsilon > 0$  existen  $A_\epsilon \in \Sigma$  y  $B_\epsilon \in \Sigma$  tales que:

$$A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset, \quad A_\epsilon \cup B_\epsilon = X, \quad \mu(A_\epsilon) < \epsilon \text{ y } \nu(B_\epsilon) < \epsilon,$$

probar que existen  $A \in \Sigma$ ,  $B \in \Sigma$  tales que:

$$A \cap B = \emptyset, \quad A \cup B = X, \quad \mu(A) = 0 = \nu(B).$$

**Ejercicio 8.** Sea  $\mu$  la medida de contar en  $\mathbb{R}$  y sea  $m$  la medida de Lebesgue. Probar que  $m \ll \mu$  pero no existe  $f$  tal que

$$m(E) = \int_E f d\mu.$$

¿Por qué esto no contradice el Teorema de Radon-Nikodym?

**Ejercicio 9.** Sean  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio de medida,  $\mu$  una medida finita y  $\nu$  una medida signada finita definidas en  $\mathcal{F}$ , tales que  $\nu \ll \mu$ .

- (a) Probar que existe una función  $g \in L^1(\mu)$  tal que

$$\int f d\nu = \int fg d\mu \quad \forall f \text{ medible tal que } \int f d\nu \text{ existe.}$$

- (b) Probar que  $\{x \in \Omega : g(x) \geq 0\}$  y  $\{x \in \Omega : g(x) < 0\}$  son respectivamente un conjunto positivo y uno negativo para  $\nu$ .

**Ejercicio 10.** Sea  $(\Omega, \mathcal{F})$  un espacio medible y sean  $\mu$  y  $\nu$  dos medidas finitas en  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Definimos, en el mismo espacio, una nueva medida dada por  $\bar{\mu} = \mu + \nu$ .

- (a) Probar que existe una función  $f \in L^1(\bar{\mu})$  tal que  $\nu(E) = \int_E f d\bar{\mu}$  y que  $0 \leq f \leq 1$   $\bar{\mu}$ -a.e.

- (b) Deducir que  $\int g d\nu = \int gf d\bar{\mu}$  para toda  $g \geq 0$  medible.

- (c) Si, además,  $\nu(E) = \int_E h d\mu$  para todo  $E \in \mathcal{F}$  entonces  $h = \frac{f}{1-f} \mu$ -a.e.

*Sugerencia:* reescribir el item (b) como  $\int g(1-f)d\nu = \int gf d\mu$  y elegir una  $g$  adecuada.

**Ejercicio 11.** Sea  $\mu$  una medida de Borel finita sobre  $\mathbb{R}$  y sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \mu(-\infty, x]$ . Probar:

- (a)  $\mu \ll m$  si y sólo si  $f$  es absolutamente continua y en ese caso  $\frac{d\mu}{dm} = f'$ .
- (b)  $\mu \perp m$  si y sólo si  $f' = 0$  a.e.

**Ejercicio 12.** Dado un espacio de medida  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  y una función medible  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , considerar la medida  $\mu_X$  definida sobre los borelianos de  $\mathbb{R}^n$ , por

$$\mu_X(A) := \mu(X^{-1}(A)) .$$

Probar que para toda función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  integrable respecto de  $\mu_X$ , y para todo boreliano  $\forall A \subset \mathbb{R}^n$  vale,

$$\int_A f(y) d\mu_X = \int_{X^{-1}(A)} f(X) d\mu .$$

**Ejercicio 13.** Sean  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espacio de probabilidad,  $(X, Y) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un vector aleatorio y  $P_{XY}$  la medida inducida por  $(X, Y)$  sobre los borelianos de  $\mathbb{R}^2$ . Probar que si  $P_{XY} \ll m$ , siendo  $m$  la medida de Lebesgue, entonces  $P_X$  y  $P_Y$  también lo son y hallar sus funciones de densidad, esto es, sus derivadas de Radon-Nikodym respecto de  $m$ .

**Ejercicio 14.** Sea  $X = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}$  una variable aleatoria simple, donde los números reales  $a_i$  son todos distintos, los conjuntos  $A_i$  son disjuntos dos a dos y  $\Omega = \bigcup_{i=1}^k A_i$ . Sea  $\sigma(X)$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $X$ .

- (a) Describir precisamente los conjuntos que componen  $\sigma(X)$ .
- (b) Probar que si la variable aleatoria  $Y$  es  $\sigma(X)$ -medible entonces  $Y$  es constante en cada uno de los conjuntos  $A_i$ . Concluir que  $Y$  puede expresarse como función de  $X$ .

**Ejercicio 15.** Sea  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\mathcal{B}$  la  $\sigma$ -álgebra de los borelianos de  $\Omega$  y  $P$  la medida de Lebesgue. Sea  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Definimos en  $(\Omega, \mathcal{B}, P)$  las siguientes variables aleatorias

$$X_1(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_1), \quad X_2(\omega_1, \omega_2) = g(\omega_2).$$

Probar que  $X_1$  y  $X_2$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

**Ejercicio 16.**

- (a) Dados un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{U}, P)$  y una función medible  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que  $\int_{\Omega} f dP = 1$ , sea  $\nu$  la medida definida sobre  $(\Omega, \mathcal{U})$  por

$$\nu(A) = \int_A f dP .$$

Probar que  $(\Omega, \mathcal{U}, \nu)$  es un espacio de probabilidad y que para toda  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\nu$ -integrable, vale que

$$\int_{\Omega} g d\nu = \int_{\Omega} g f dP .$$

- (b) En particular, sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  una variable aleatoria y supongamos que  $\mu_X$  tiene función de densidad  $f$ . Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que

$$Y = g(X)$$

es integrable. Mostrar que

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x) dx.$$

**Ejercicio 17.** Sea  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Hallar

- (a)  $E(X|\mathcal{V})$  con  $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega\}$
- (b)  $E(X|\mathcal{V})$  con  $\mathcal{V} = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$ ,  $B \in \mathcal{F}$
- (c)  $E(X|Y)$  con  $Y$  una variable aleatoria que toma los valores  $y_i$  con probabilidad  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

**Ejercicio 18.** Sean  $X, Y$  dos variables aleatorias con función de densidad conjunta  $f_{XY}(x, y)$ . Probar que

$$E(X|Y) = \Phi(Y), \quad \text{con} \quad \Phi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} dx.$$

Sugerencia:

- (a)  $\Phi(Y)$  es  $\sigma(Y)$ -medible.
- (b) Sea  $A \in \sigma(Y)$  y sea  $B$  un boreliano de  $\mathbb{R}$  tal que  $A = Y^{-1}(B)$ .

Probar que

1.  $\int_A X dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B x f_{XY}(x, y) dy dx.$
2.  $\int_A \Phi(Y) dP = \int_{-\infty}^{\infty} \int_B \Phi(y) f_{XY}(x, y) dy dx.$
3.  $\int_A X dP = \int_A \Phi(Y) dP$ , para todo  $A \in \sigma(Y)$ .