

PRÁCTICA 2: MEDIDA EN ESPACIOS ABSTRACTOS Y FUNCIONES MEDIBLES

Ejercicio 1. Sea X un conjunto no vacío.

- (a) Para cada $E \subset X$, definimos $\mu(E) = \text{card}(E)$ si E es finito y $\mu(E) = \infty$ si E es infinito. Probar que μ es una medida definida en $\Sigma = \mathcal{P}(X)$. Esta medida se suele llamar medida de contar o *counting measure*.
- (b) Dado $x_0 \in X$, para cada $E \subset X$, definimos $\delta(E) = \chi_E(x_0)$. Probar que δ es una medida en $\mathcal{P}(X)$. Esta medida se denomina delta de Dirac.
- (c) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $A \in \Sigma$. Para cada $E \in \Sigma$ definimos $\mu_A(E) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_A es una medida en Σ .
- (d) Sea (X, Σ) un espacio medible. Sean μ_1, \dots, μ_n medidas definidas en ese espacio y sean a_1, \dots, a_n constantes positivas. Probar que

$$\mu = a_1\mu_1 + \dots + a_n\mu_n$$

es una medida.

- (e) Sea (X, Σ) un espacio medible y sea $(\mu_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de medidas en este espacio. Supongamos que la sucesión es monótona creciente, en el sentido de que $\mu_n(E) \leq \mu_{n+1}(E)$ para todo $E \in \Sigma$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Si definimos, para cada $E \in \Sigma$,

$$\mu(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(E),$$

probar que μ es una medida.

- (f) Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Para cada $E \in \Sigma$ definimos

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \in \Sigma, F \subset E, \mu(F) < \infty\}.$$

Probar que μ_0 es una medida. Probar además que cumple la siguiente propiedad: para cada $E \in \Sigma$ existe un conjunto $F \in \Sigma$ contenido en E y de medida finita.

Ejercicio 2. Sean (X, Σ) un espacio medible. Sea la función de conjuntos $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

1. $A, B \in \Sigma \wedge A \cap B = \emptyset \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$
2. $A_n \in \Sigma (n \in \mathbb{N}) \wedge A_n \searrow \emptyset \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0.$

Probar que μ es una medida.

Ejercicio 3. Un espacio (X, Σ, μ) se dice de medida completa si dado $Z \in \Sigma$ tal que $\mu(Z) = 0$, para cada $Y \subseteq Z$ resulta que $Y \in \Sigma$. En este caso, probar que:

(a) Si $Z_1 \in \Sigma$, $Z_1 \Delta Z_2 \in \Sigma$ y $\mu(Z_1 \Delta Z_2) = 0$, entonces $Z_2 \in \Sigma$.

(b) Si $E_1, E_2 \in \Sigma$ y $\mu(E_1 \Delta E_2) = 0$ entonces $\mu(E_1) = \mu(E_2)$.

Ejercicio 4. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ y f funciones medibles y finitas a.e. Decimos que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ existe $A_\epsilon \in \Sigma$ tal que:

$$\mu(A_\epsilon) < \epsilon \text{ y } f_n \xrightarrow{\rightarrow} f \text{ en } X \setminus A_\epsilon.$$

Probar que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge casi uniformemente a f si, y sólo si, $(f_n)_{n \geq 1}$ converge a f en casi todo punto.

Ejercicio 5. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones en un espacio de medida (X, Σ, μ) .

(a) Si $(E_j)_{j \geq 1} \subset \Sigma$ entonces $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j)$

(b) Si $(E_j)_{j \geq 1} \subset \Sigma$ entonces $\mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j)$

Ejercicio 6. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Notemos con \mathcal{B} a la σ -álgebra de Borel de \mathbb{R} . Probar:

(a) Si f es una función medible, entonces $f^{-1}(B) \in \Sigma$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

(b) Si $\overline{\mathcal{B}} = \{E = B \cup A, B \in \mathcal{B} \text{ y } A \subseteq \{-\infty, \infty\}\}$ entonces, f es medible si y sólo si $f^{-1}(E)$ es medible para todo $E \in \overline{\mathcal{B}}$.

Notación. En lo que sigue \mathbb{R}^d denota el espacio de medida $(\mathbb{R}^d, \mathcal{M}, m)$, siendo \mathcal{M} la σ -álgebra de Lebesgue y m la medida de Lebesgue.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) Supongamos que para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{M}$. ¿Es f medible?

(b) Si $|f|$ es medible, ¿es f medible?

(c) Si f es monótona, probar que f es medible Borel.

(d) Si f es derivable sobre \mathbb{R} , probar que f' es medible Borel.

Ejercicio 8. Si $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ es medible, entonces existe $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible Borel tal que $f = g$ a.e.

Ejercicio 9. Sea $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ continua en casi todo punto. Probar que f es medible.

Ejercicio 10.

- (a) Hallar $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua a.e., tal que no existe $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua que verifica: $f = g$ a.e.
- (b) Hallar $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que g es continua, $g = f$ a.e. y f es discontinua en todo punto.

Ejercicio 11. Sea I un intervalo de \mathbb{R}^d .

- (a) Sea $E \subseteq I$ medible. Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$|\{x \in I : g(x) \neq \chi_E(x)\}| < \epsilon.$$

- (b) Sea φ una función simple definida sobre I . Probar que para cada $\epsilon > 0$ existe $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que

$$|\{x \in I : g(x) \neq \varphi(x)\}| < \epsilon.$$

- (c) Sea $f: I \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ medible y finita en c.t.p. Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe φ simple tal que

$$|\{x \in I : |\varphi(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

- (d) Sea f como en (c). Probar que dados $\epsilon > 0$ y $\delta > 0$ existe g continua tal que

$$|\{x \in I : |g(x) - f(x)| \geq \epsilon\}| < \delta.$$

Ejercicio 12. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida y sea $E \in \Sigma$. Sea $(f_k)_{k \geq 1}: E \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$|f_k(x)| \leq M_x \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Probar que si para todo $\alpha > 0$, existe $k_0 = k_0(\alpha) \in \mathbb{N}$:

$$k \geq k_0 \quad \Rightarrow \quad \mu(\{x \in E : |f_k(x)| < \alpha\}) \leq \alpha/k,$$

entonces $\mu(E) = 0$.

Ejercicio 13. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ finitamente medible y $(f_k)_{k \geq 1}: E \rightarrow \mathbb{R}$ una sucesión de funciones medibles tal que para todo $x \in E$, existe $M_x \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$|f_k(x)| \leq M_x \quad , \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Probar que dado $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado y $M > 0$:

$$|E \setminus F| < \epsilon \quad \text{y} \quad |f_k(x)| \leq M, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in F.$$

Ejercicio 14. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; f_n(x) = n \chi_{[1/n, 2/n]}(x)$. Probar

- (a) $(f_n)_{n \geq 1}$ converge puntualmente,

- (b) para cada $\delta > 0$, $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente en $[\delta, \infty)$,
- (c) no existe $E \subset [0, \infty)$ tal que $|E| = 0$ y $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformemente en E^c .

Ejercicio 15.

(a) Sea (E, Σ, μ) un espacio de medida finita. Sean $(f_n)_{n \geq 1}, f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funciones medibles, finitas en casi todo punto y tales que $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ a.e. en E . Probar que existe una sucesión $(E_i)_{i \geq 1}$ de conjuntos medibles de E tal que:

- a) $\mu(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0$,
- b) para cada $i \geq 1$, $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ en E_i .
- (b) El mismo resultado vale si $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ donde $\mu(A_k) < \infty$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 16. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Sean $(f_n)_{n \geq 1}$ y f funciones medibles definidas sobre un conjunto $A \in \Sigma$ y finitas en c.t.p.. Sea $(A_n)_{n \geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de A tales que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \Sigma$ y $\mu(A \setminus A_n) \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0$. Probar que si $\chi_{A_n} f_n \xrightarrow{\mu} f$ entonces $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

Ejercicio 17. Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida. Supongamos que $f_k \xrightarrow{\mu} f$ y $g_k \xrightarrow{\mu} g$. Probar:

1. $f_k + g_k \xrightarrow{\mu} f + g$ sobre E .
2. Si μ es finita, entonces $f_k g_k \xrightarrow{\mu} f g$ sobre E . Mostrar que la hipótesis de finitud es necesaria.
3. Sea $(f_k/g_k)_{k \geq 1}$ una sucesión de funciones definidas en casi todo punto de E . Si $\mu(E) < +\infty$, $g_k \rightarrow g$ sobre E y $g \neq 0$ a.e., entonces $f_k/g_k \xrightarrow{\mu} f/g$.

Ejercicio 18. Sea $f_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ la función de Cantor–Lebesgue y $f : [0, 1] \rightarrow [0, 2]$ definida por: $f(x) = f_1(x) + x$.

1. f es continua y biyectiva. Además f^{-1} es continua.
2. Si C es el Ternario de Cantor, $|f(C)| = 1$.
3. Sea $g = f^{-1}$. Mostrar que existe A medible tal que $g^{-1}(A)$ es no medible.
4. Mostrar que existe un conjunto medible que no es boreliano.
5. Hallar $h_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ medible Borel y $h_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ medible tal que $h_2 \circ h_1$ no es medible.