

PRÁCTICA 1: MEDIDA DE LEBESGUE

Ejercicio 1. Dado $A \subseteq \mathbb{R}^n$, probar que existe $H \supseteq A$ de tipo G_δ tal que $|A|_e = |H|$.

Ejercicio 2. Sean $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $d(A, B) > 0$. Probar que $|A \cup B|_e = |A|_e + |B|_e$.

Ejercicio 3. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y tal que $E = A \cup B$, donde $|B| = 0$. Probar que A es medible.

Ejercicio 4. Sea $E = \{x \in (0, 1) / \text{en el desarrollo decimal de } x \text{ no aparece el dígito } 7\}$. Probar que E tiene medida 0.

Ejercicio 5.

- (a) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que el gráfico de f es un subconjunto de \mathbb{R}^2 de medida cero.
- (b) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Probar que su gráfico tiene medida cero.
- (c) ¿Y si f tiene finitas discontinuidades?

Ejercicio 6. Sea $Z \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|Z| = 0$. Probar que $E = \{x^2 : x \in Z\}$ tiene medida nula.

Ejercicio 7. Sean $v \in \mathbb{R}^n$ y $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T(x) = x + v$. Probar que

- (a) $|T(E)|_e = |E|_e$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$.
- (b) Si E es medible entonces $T(E)$ es medible y $|T(E)| = |E|$.

Ejercicio 8. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Definimos $rA = \{r \cdot a : a \in A\}$. Probar que

- (a) $|rA|_e = r^n |A|_e$.
- (b) Si A es medible entonces rA es medible y $|rA| = r^n |A|$.

Ejercicio 9. Sean $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Denotemos por I' los intervalos con ejes paralelos al nuevo sistema de coordenadas, y por $|E|'_e$ la medida exterior de un conjunto E relativo a este sistema de coordenadas.

Probar que $|E|'_e = |E|_e$ para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$

Ejercicio 10. Sea $B(0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\}$.

- (a) Suponiendo conocida $|B(0, 1)|$, calcular $|B(0, r)|$.
- (b) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Probar que $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por: $f(r) = |A \cap B(0, r)|$ es continua.
- (c) Si A es medible, para cada $s : 0 \leq s \leq |A|$, existe $B \subseteq A$ medible tal que $|B| = s$.
- (d) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y tal que $0 < |A| < \infty$. Probar que dado $n \in \mathbb{N}$, existen n subconjuntos disjuntos de A , $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$, tales que $|A_j| = |A|/n$, para cada $1 \leq j \leq n$.

Ejercicio 11. Sea $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definida por

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2 \\ 2x - 1, & 1/2 \leq x < 1 \end{cases}.$$

Probar que si $E \subseteq [0, 1)$ es medible entonces $T^{-1}(E)$ es medible y $|T^{-1}(E)| = |E|$.

Ejercicio 12. Para cada sucesión de conjuntos medibles $(A_n)_{n \geq 1}$ definimos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{y} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Probar que

- (a) $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ y $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ son medibles.
- (b) $|\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |A_n|$.
- (c) Si para algún $n \in \mathbb{N}$, $|\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k| < \infty$ entonces $|\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} |A_n|$.
- (d) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty$, entonces $|\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n| = 0$.

Ejercicio 13. Construir un subconjunto de $[0, 1]$ como el conjunto de Cantor excepto que en el k -ésimo paso, cada intervalo que se extrae tiene longitud $\delta 3^{-k}$, $0 < \delta < 1$. Probar que el conjunto obtenido es perfecto, tiene medida $1 - \delta$ y no contiene intervalos.

Ejercicio 14. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

- (a) E es medible.
- (b) Para todo $\epsilon > 0$, existe $F \subseteq E$ cerrado tal que $|E \setminus F|_e < \epsilon$.
- (c) Existen H de clase F_σ y N de medida 0 tales que $E = H \cup N$.

Ejercicio 15. Decimos que el conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ satisface la *condición de Carathéodory* si para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se verifica

$$(C) \quad |A|_e = |A \cap E|_e + |A \cap E^c|_e.$$

Probar que

- (a) Todo conjunto medible satisface (C).
- (b) Si E es acotado y satisface (C) entonces E es medible.
- (c) E es medible si y sólo si satisface (C).

Ejercicio 16.

- (a) Probar que si $(E_k)_{k \geq 1}$ es una sucesión creciente de conjuntos de \mathbb{R}^n entonces

$$\left| \bigcup_{k \geq 1} E_k \right|_e = \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|_e.$$

- (b) Dar un ejemplo de una sucesión decreciente $(E_k)_{k \geq 1}$ de conjuntos de \mathbb{R}^n tal que $|E_k|_e < \infty$ para todo k y

$$\left| \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \right|_e < \lim_{k \rightarrow \infty} |E_k|_e.$$

Ejercicio 17. Sea $E \subseteq A$ con $|A| = 0$. Probar que E es medible y que $|E| = 0$. Deducir que el cardinal de los medibles es 2^c . ¿Cual es el cardinal de los no medibles?

Ejercicio 18. Para cada $E \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos su medida interior

$$|E|_i = \sup\{|F| : E \supseteq F, F \text{ cerrado}\}.$$

Probar que

- (a) $|E|_i \leq |E|_e$.
- (b) Si E es medible entonces $|E|_i = |E|_e$.
- (c) Si $|E|_e < \infty$ y $|E|_i = |E|_e$, entonces E es medible.
- (d) $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow |E_1|_i \leq |E_2|_i$.
- (e) Si $(E_j)_{j \geq 1}$ son disjuntos entonces $\left| \bigcup_{j \geq 1} E_j \right|_i \geq \sum_{j \geq 1} |E_j|_i$.

Ejercicio 19. Sea V el conjunto de Vitali. Probar que si E es medible y $E \subseteq V$ entonces $|E| = 0$. Concluir que $|V|_i = 0$.

Ejercicio 20.

(a) Construir una sucesión de conjuntos $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ disjuntos dos a dos tales que

$$\left| \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right|_e < \sum_{k \in \mathbb{N}} |E_k|_e.$$

(b) Construir una sucesión de conjuntos $(E_j)_{j \geq 1}$ tal que $\left| \bigcup_{j \geq 1} E_j \right|_i > \sum_{j \geq 1} |E_j|_i.$

(c) Construir $E \subseteq \mathbb{R}$ tal que $|E|_i < \infty$ y $|E|_e = \infty.$

Ejercicio 21. Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible y $A \subseteq E.$ Probar que

$$|E| = |A|_i + |E \setminus A|_e.$$

Ejercicio 22. Mostrar que existe un subconjunto H del intervalo $[0, 1]$ de clase F_σ y de medida uno formado sólo por puntos irracionales.

Ejercicio 23. Probar que si $E \subseteq \mathbb{R}$ es medible y $|E| > 0$ entonces

$$D(E) = \{x - y : x, y \in E\}$$

contiene un entorno del origen.

Ejercicio 24. Probar que cualquier conjunto con medida positiva tiene cardinal $c.$

Ejercicio 25. Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ medible que cumple la siguiente propiedad: si $x \in E$ e $y \in E,$ $x \neq y,$ entonces $\frac{x+y}{2} \notin E.$ Probar que E tiene medida cero.