Análisis I – Matemática I – Análisis II (C) – Análisis Matemático I (Q)
Primer Cuatrimestre - 2011

Práctica 6: Teoremas de la Función Implícita e Inversa

Planos y rectas tangentes a superficies dadas de manera implícita en $\mathbb{R}^3$

1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1 centrada en el origen; es decir, S es la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Mostrar que el vector $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es normal a la superficie S en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e interpretar este hecho geométricamente.

2. Consideremos la superficie $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Probar que las rectas
$$\mathbb{L}_1 : t(0, 1, 1) + (1, 0, 0) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : t(0, 1, -1) + (1, 0, 0)$$
son ortogonales y están contenidas en S. Usar esto para hallar la ecuación del plano tangente a S en $(1, 0, 0)$.

3. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados
   (a) $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \qquad x_0 = (7, 0, 0)$,
   (b) $xy - z\ln(y) + e^{xy} = 1 \qquad x_0 = (0, 1, 1)$,
   (c) $xy\ \operatorname{sen}(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \qquad x_0 = (4, 0, 1)$,
   (d) $\cos(x)\cos(y)e^z = 0 \qquad x_0 = (\pi/2, 1, 0)$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en (x_0, y_0) y sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x, y, z) = f(x, y) - z$. ¿Qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de f en (x_0, y_0) y el plano tangente a una superficie de nivel de h en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$?

5. Encontrar los puntos $P = (x_0, y_0, z_0)$ de la superficie
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$$
en los que el plano tangente a S sea paralelo al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

6. Sea E el elipsoide definido por la ecuación $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + z^2 = 1$.
   (a) Demostrar que si $P = (a, b, c) \in E$, entonces $-P = (-a, , -b, -c) \in E$.
   (b) Demostrar que el plano tangente a E en P es paralelo al plano tangente a E en $-P$.
   (c) Probar que si P y Q son dos puntos distintos de E, y el plano tangente a P es paralelo al plano tangente a Q, entonces $Q = -P$.

Teoremas de la Función Implícita e Inversa

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Probar que f es biyectiva y que la inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Encontrar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f^{-1} en el punto $(3, f^{-1}(3))$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = -3x^7 - x^5 + 6x^3 - x + e^x + 1$. Probar que existe $M > 0$ tal que para todo punto $a \in (M, \infty)$, f es localmente inversible en a. En tal caso, ¿cuánto vale $(f^{-1})'(f(a))$?

9. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x, y) = (3x - 2y, 5x - 2y)$. Mostrar que T es biyectiva y hallar la expresión de la inversa T^{-1}. Calcular $DT^{-1}(a)$ para cada $a \in \mathbb{R}^2$.

10. Determinar si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase C^1 en a y calcular la diferencial de F^{-1} en el punto $F(a)$:

    (a) $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en $a = (x, y) \neq (0, 0)$,

    (b) $F(x, y) = (\operatorname{sen} x, \cos(xy))$ en $a = (\pi, \pi/2)$.

11. Encontrar la solución $y = f(x, z)$ de $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en un entorno de los siguientes puntos y escribir explícitamente esos entornos:

    (a) $(0, 1, 1)$,

    (b) $(2, -2, 2)$.

12. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y).$$

    (a) Demostrar que existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1) \in U$, un entorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(-7, 2) \in V$ y una inversa para F, $F^{-1} : V \to U$, C^1 tal que $F^{-1}(-7, 2) = (1, 1)$.

    (b) Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 5$ y $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcular $\frac{\partial (goF^{-1})}{\partial v}(-7, 2)$.

13. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$. Probar que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene $\det(DF(x, y)) \neq 0$ pero F no es inyectiva.

14. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2.$$

    (a) Demostrar que $f(x, y, z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y, z)$ en el punto $(1, 1, 1)$.

    (b) Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$.

15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida como

$$f(x, y) = (yx^{3/2} + (y + 1)^2 - 6 \ , (\ln(x) + 5)y - 4).$$

(a) Probar que existe una inversa de f definida en un entorno del punto $p = (5, 6) = f(1, 2)$, diferenciable en p.

(b) Sean $v = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$, $w = (\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}})$ vectores en $\mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $q = (1, 2)$ tal que $\frac{\partial g}{\partial v}(1, 2) = 4$ y $\frac{\partial g}{\partial w}(1, 2) = 5$. Calcular $D(g \circ f^{-1})(5, 6)$.

16. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y, z) = x^2 y + \ln(y)z - 1.$$

(a) Probar que la ecuación $f(x, y, z) = 0$ define implícitamente una función $y = \varphi(x, z)$ (diferenciable) en un entorno del punto $(x, z) = (1, 2)$ tal que $f(x, \varphi(x, z), z) = 0$ para todo (x, z) en dicho entorno.

(b) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $Dg(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y que cumple que $g(2, -3) = (1, 2)$. Sea $v = (\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{17}})$. Calcular $\frac{\partial(\varphi \circ g)}{\partial v}(2, -3)$.

17. Para $f(x, y) = x^2 - y^3$ muestre que, sobre la curva de nivel $f(x, y) = 0$, podemos despejar y en función de x (i.e. $y = \phi(x)$). ¿Es ϕ de clase C^1 en un entorno del cero? ¿Puede aplicarse el teorema de la función implícita en el punto $(0, 0)$?

18. Determinar las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones:

(a) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \qquad a = (2, 0)$

(b) $g(x, y) = x^5 + y^2 + xy = 3 \qquad a = (1, 1)$

(c) $h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \qquad a = (0, 0, 2)$

19. Dadas dos superficies S_1 y $S_2 \subset \mathbb{R}^3$ definidas implícitamente

$$\begin{cases} S_1 : & F(x, y, z) = 0 \\ S_2 : & G(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

con $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones C^1. Supongamos que $S_1 \cap S_2$ es una curva con parametrización $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, y sea $\sigma(t_0) = P_0 \in S_1 \cap S_2$. Probar que si el Jacobiano parcial

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}(P_0) := \det \begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix} \Bigg|_{P_0} \neq 0,$$

entonces se puede despejar $y = y(x)$ y $z = z(x)$ en un entorno de P_0 de modo diferenciable y valen las fórmulas

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}} \quad \text{y} \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}}.$$

20. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \frac{2}{3}x & + & 3y & - & 7z & = & 0 \\ -x & - & 2y & + & \frac{21}{2}z & = & 0 \end{array}\right. .$$

(a) Teniendo en cuenta que el sistema tiene dos ecuaciones linealmente independientes con tres incógnitas, del Teorema de la dimensión deducimos que podemos despejar dos incógnitas en función de una sola variable libre. Resolver entonces el sistema de ecuaciones despejando x y z en función de y.

(b) ¿Alguna dificultad en el ítem anterior?

(c) ¿Cuáles son los menores no nulos de la matriz? ¿Cuáles son entonces los posibles despejes?

21. Considerar las superficies definidas por las siguientes ecuaciones:

$$z = 4x^2 - 3y^2 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 24.$$

Probar que existe un entorno del punto $P = (2, -2, 4)$ en donde la intersección de las dos superficies se puede escribir como una curva. Hallar la recta tangente a dicha curva en el punto P.

22. Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} S_1: \quad x^3 + 2y^3 - 9z + 1 = 0 \\ S_2: \quad x - y + z^3 + 3 = 0 \end{array}\right. .$$

(a) Verificar que el punto $(-2, 2, 1) \in S_1 \cap S_2$.

(b) Hallar $\frac{dy}{dx}(-2)$ y $\frac{dz}{dx}(-2)$. Dar una expresión genérica de $\frac{dy}{dx}$ y de $\frac{dz}{dx}$.