Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Primer Cuatrimestre - 2011

# Práctica 2: Funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

1. Dar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y graficarlo:

   *a*) $f(x,y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$

   *b*) $f(x,y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

   *c*) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{y - x^2}$

   *d*) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}$

   *e*) $f(x,y) = \dfrac{\ln(1 - y + x^2)}{\operatorname{sen} x}$

   *f*) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

   *g*) $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$

   *h*) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{\ln(1 - x^2)}$

2. Para distintos valores de $c$ graficar aproximadamente el conjunto $\{(x,y) : f(x,y) = c\}$. En otras palabras, determinar las distintas curvas de nivel.

   *a*) $f(x,y) = x + y$

   *b*) $f(x,y) = x^2 + y^2$

   *c*) $f(x,y) = \sqrt{xy}$

   *d*) $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2}$

   *e*) $f(x,y) = x^2 - y^2$

3. Estudiar las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x,y)$.

   *a*) $z = 2x^2 + y^2$

   *b*) $z^2 = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{2}$

   *c*) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

   *d*) $3x + 2y - z = 0$

   *e*) $z^2 = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{3} - 2$

   *f*) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

   *g*) $x^2 + y^2 = 4z^2$

4. Para distintos valores de $u$ graficar aproximadamente el conjunto $\{(x,y,z) : f(x,y,z) = u\}$. En otras palabras, determinar las distintas superficies de nivel.

   *a*) $f(x,y,z) = x + y + z$

   *b*) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

   *c*) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

   *d*) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2$

## Límite y continuidad

5. (a) Usando sólo la definición de límite demostrar que:
   i. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x+y=1$;
   ii. $\lim_{(x,y)\to(-1,8)} xy=-8$.

   (b) Si $\varepsilon=1$, $\varepsilon=1/100$ ó $\varepsilon=\alpha^2$, encontrar $\delta>0$ tal que
$$\|(x,y)-(-1,8)\|<\delta \Longrightarrow |xy+8|<\varepsilon.$$

6. Probar por definición que si $(x,y)\to(2,3)$, entonces $y\ \mathrm{sen}\,(xy-6)\to 0$.

7. Probar que:

   *a)* $\lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2+y^2-xy=39$;

   *b)* $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \mathrm{sen}\,(x\cos y)=0$;

   *c)* $\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy}=0$;

   *d)* $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{y^2+\cos(\pi-x)}{y}=\dfrac{8}{3}$.

   *e)* $\lim_{(x,y)\to(0,1)} ye^{x}=1$;

   *f)* $\lim_{(x,y)\to(c,0)} \dfrac{\mathrm{sen}\,(x^2y)}{x^2-y^2}=0$ si $c\neq 0$;

8. (a) Sea $f:B_r(a,b)\to\mathbb{R}$ tal que $f$ no se anula sobre $B_r(a,b)\setminus\{(a,b)\}$ y $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=0$. Probar que:
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\mathrm{sen}\,(f(x,y))}{f(x,y)}=1.$$

   (b) Sea $f:B_r(a,b)\to\mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=+\infty$. Probar que:
$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\ln(f(x,y))}{f(x,y)}=0.$$

9. Calcular:

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\mathrm{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\mathrm{sen}(xy)}{x}$;

   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

10. Analizar la existencia de los límites restringido a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

*a*) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$; *b*) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$;

*c*) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{y}$; *d*) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

*e*) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{xy+y-x}$; *f*) $f(x,y) = |x|^y$;

*g*) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$; *h*) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

*i*) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}$; *j*) $f(x,y) = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$;

*k*) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$; *l*) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

*m*) $f(x,y) = x\ln\left(x^2+y^2\right)$ *n*) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ \ln(x^2+y^2)$

*o*) $f(x,y) = x\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{y} + y\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{x}$; *p*) $f(x,y) = \operatorname{sen}\dfrac{x}{y}$;

11. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si $(x,y)$ se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x,y)\to(0,0)$

*a*) $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$; *b*) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$;

*c*) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$; *d*) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y)y}{x^4}, & \text{si } 0<y<x^2; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

12. Para cada una de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)$;

(b) $f(x) = x^2 - [x^2]$;

(c) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x\in\mathbb{Q}; \\ -x, & \text{si } x\notin\mathbb{Q}; \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2), & \text{si } |x|\le 1; \\ |x-1|, & \text{si } |x|>1; \end{cases}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } x > 0; \\ x^2 + 1, & \text{si } x \leq 0; \end{cases}$

- Calcular su dominio natural.
- Estudiar la continuidad en cada punto de su dominio. En los puntos de discontinuidad, indicar de qué tipo se trata.
- En los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla (si es posible) de modo que resulte continua.

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2\,|y|^3} & (x,y) \neq (-1,0) \\ 1 & (x,y) = (-1,0) \end{cases}$$

(a) Probar que $f$ no es continua en $(-1,0)$.

(b) Redefinirla en $(x,y) = (-1,0)$, si es posible, de manera tal que resulte continua en $\mathbb{R}^2$.

14. Consideremos la función

$$f(x,y) = xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right).$$

(a) Calcular su dominio.

(b) Determinar si es posible extenderla a $\mathbb{R}^2$ de modo que resulte continua.

15. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,0)$;

(b) $f(x,y) = \begin{cases} |y|^x (1+x)^y, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ y } x > -1; \\ 1, & \text{si } (x,y) = (0,0); \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,2)$;

(c) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x \cos y)$ en $(1,1)$ y $(0,2)$;

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0; \\ 1, & \text{en otro caso}; \end{cases}$ en $(0,0)$ y $(1,1)$;

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } xy \neq 0; \\ 0, & \text{si } xy = 0; \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(-1,2)$.

16. Probar que la siguiente función no tiene límite cuando $(x, y) \to (0, 0)$.

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(xy)}{|x - y|}$$

*Sugerencia:* En primer lugar calcular el dominio de $f$ y mostrar que cero es un candidato a límite. Luego elegir uno de los siguientes caminos para probar la no existencia del límite:

- PLAN A: Encontrar alguna trayectoria que pase por el origen sobre la cual $f$ no tienda a cero.
- PLAN B: Considerar la sucesión de puntos $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$, probar que esta sucesión tiende a cero y calcular el $\lim_{n\to\infty} f(p_n)$.
- PLAN C: Probar si el límite es cero entonces debe existir un entorno del origen en donde $f$ esté acotada. Mostrar que esto último no puede ocurrir.

17. Analizar la existencia de límite en el origen para

$$f(x, y) = \frac{e^{(x^2+y^3)} - 1}{xy - x + y^2}$$

18. Estudiar la continuidad de $f$ en el punto $(1, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^{\frac{4}{3}} y}{(x-1)^2 + y^2|x|} & \text{si} \quad (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

*Sugerencia:* Probar y usar que si $\|(x, y) - (1, 0)\| < \frac{1}{2}$ entonces $(x - 1)^2 + y^2|x| \geq \frac{1}{2}[(x - 1)^2 + y^2]$

19. Estudiar la continuidad de $f$ en el origen de coordenadas.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - \tan(x^2 y)}{\frac{1}{2}x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

20. Probar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

21. Demostrar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y) = g(x)$, entonces $f$ es continua en todo punto de la recta $(a, y)$. Usar esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

   (a) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x)$. (b) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2) + e^y$.

22. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

   (a) $f(x, y) = \left(x^2,\ e^x\right)$ (b) $f(x, y) = \left(\dfrac{\operatorname{sen}\,(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\ ,\ \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}\right)$

23. (a) Hallar todas las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x)^2 - e^x = 0$.
    (b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Im}(f) = [a, b] \cup [c, d]$ con $a < b < c < d$. ¿Es $f$ continua?
    (c) Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una raíz positiva y menor o igual que 1.
    (d) Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces debe ser constante.
    (e) Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

24. (a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1-\|x\|}$. Probar que $f$ es continua y no es acotada.
    (b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que $g$ es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

25. Sea $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{\ln(1 - x^2)}$

    (a) Encontrar el dominio $D$ de $f$ y graficarlo.
    (b) Dado $q = (q_1, q_2) \in Fr(D)$, ¿existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(q_1,q_2)} f(x, y)$?