Análisis I – Matemática I – Análisis II (C)
Primer Cuatrimestre - 2011

Práctica 0: Repaso

Límite en una variable

1. ¿A qué distancia de 16 basta tomar x para asegurar que:

   a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \in (\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8})$? *b)* $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \in (\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{10})$? *c)* $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \in (\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{1000}, \dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{1000})$?

2. Se define $[x]$ la parte entera de x como $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Analizar la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ para cada $a \in \mathbb{R}$ siendo:

   a) $f(x) = x - [x]$. *b)* $f(x) = \dfrac{x}{[x]}$. *c)* $f(x) = |x| + [x]$.

3. Calcular, si existen, los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \operatorname{sen} x}{e^x + \cos x}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen} x$

   d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{\ln(|x|)}$ *e)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ *f)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

   g) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/\tan x}$ *h)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ *i)* $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

Teoremas de Rolle, Lagrange y Cauchy

Teorema de Rolle: Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Teorema de Lagrange: Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Teorema de Cauchy: Si f y g son continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4. Verificar que se cumple el teorema de Rolle para las siguientes funciones en los intervalos indicados:

   (a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el intervalo $[1, 2]$.

(b) $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ en el intervalo $[1, 3]$.

(c) $f(x) = \sin^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

5. Probar que la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^2}$ satisface $f(1) = f(5)$ pero no existe $c \in (1, 5)$ tal que $f'(c) = 0$ ¿Por qué no se puede aplicar el teorema de Rolle?

6. (a) Sea f un polinomio con al menos k raíces distintas, probar que f' tiene al menos $k-1$ raíces distintas.

   (b) Probar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real.

   (c) Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^{a^2 x} + x^3 + x$ si $x \in \mathbb{R}$. Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-1, 0]$.

7. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Demostrar las siguientes afirmaciones:

   (a) Si $f' = g'$ en (a, b), entonces $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

   (b) Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente creciente.

   (c) Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es estrictamente decreciente.

8. Como una consecuencia del Teorema de Lagrange, mostrar que son válidas las siguientes acotaciones

   (a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

   (b) $|1/x - 1/y| \leq |x - y|$, para $x, y > 1$.

   (c) $|\arctan a - \arctan b| \leq \dfrac{1}{2}\,|a - b|$, para $a, b \geq 1$.

9. Encontrar explícitamente el punto intermedio cuya existencia está garantizada por el teorema de Cauchy en el caso de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el segmento $[1, 2]$.