UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Espacios invariantes por traslaciones y su generalización a espacios de Hilbert

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Gustavo E. Massaccesi

Director de tesis: Carlos A. Cabrelli

Buenos Aires, 11 de febrero de 2008

Resumen

Los espacios invariantes por traslaciones enteras de $L^2(\mathbb{R}^n)$ son de gran importancia en muchas ramas del análisis matemático, en particular en teoría de aproximación, onditas y elementos finitos. Por otro lado sirven de modelo para numerosas aplicaciones en procesamiento de señales e imágenes, como por ejemplo procesamiento de voz, radar e imágenes médicas.

En estos espacios, juegan un papel central las n traslaciones por los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$ que son operadores unitarios que conmutan entre sí. Esta situación puede generalizarse a un contexto abstracto de un espacio de Hilbert donde estas n traslaciones son reemplazadas por operadores unitarios que conmutan.

En este trabajo se estudian los espacios invariantes con esta generalidad y se prueban y extienden muchas de sus propiedades que son válidas en el contexto de $L^2(\mathbb{R}^n)$. Este desarrollo abstracto también sirve para tener una mejor comprensión de las propiedades relevantes de los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

En una primera parte se describe la teoría $L^2(\mathbb{R}^n)$ de estos espacios. Luego se dan las definiciones y se desarrollan las herramientas que serán necesarias para el contexto general de espacios de Hilbert.

En particular, se caracterizan las bases ortonormales, de Riesz y marcos de estos espacios generadas por los operadores unitarios actuando sobre un conjunto de elementos.

Además analizamos los sistemas de Gabor subadjuntos. En ellos se consideran traslaciones en tiempo y frecuencia que conmutan. Por ello es posible aplicar nuestros nuevos resultados directamente en estos sistemas.

Entre los resultados principales se extiende un resultado de [ACHMR04] para $L^2(\mathbb{R}^n)$ utilizando marcos en lugar de bases de Riesz. Se prueba que el resultado es válido para espacios invariantes de largo finito o dimensión media finita. Este resultado es luego probado con total generalidad en el caso de espacios de Hilbert abstractos.

Por otro lado se extiende al caso abstracto un resultado de [BK06], donde se prueba que dado un sistema finito de generadores de un espacio invariante, existe un conjunto minimal de generadores formado por combinaciones lineales de los generadores originales, sin utilizar traslaciones.

Palbras Clave: Espacios invariantes por traslaciones enteras, Sistemas de Gabor, Conjuntos de generadores, Operadores unitarios que conmutan, Módulos de Hilbert.

Shift invariant spaces and their generalization to Hilbert spaces

Abstract

Shift invariant spaces of $L^2(\mathbb{R}^n)$ are of great importance in many branches of Mathematical Analysis, particularly in Approximation Theory, Wavelets and Finite Elements. On the other hand, they serve as a model for numerous applications in signal and image processing, such as speech processesing, radar and medical images.

In these spaces, the n translations by vectors of the standard basis of $\mathbb{R}^n$ play a central role. They are n unitary operators that commute with each other. This situation can be generalized to an abstract Hilbert space where these n translations are replaced by commuting unitary operators.

In this work, we study invariant spaces with this generality and many of their properties that are valid in the context of $L^2(\mathbb{R}^n)$ are proved and extended. This abstract setting allows us to obtain a better understanding of the relevant properties of the shift invariant spaces of $L^2(\mathbb{R}^n)$.

In the first part we describe the $L^2(\mathbb{R}^n)$ theory of these spaces. Then, we give the definitions and develop tools that will be needed for the generalized context of Hilbert spaces.

In particular, we characterize the orthonormal bases, Riesz bases and frames of these spaces generated by the unitary operators acting on a set of elements.

Moreover, we analyze subadjoint Gabor systems. They use translations in time and frequency that commute. Therefore, it is possible to apply our new results directly into these systems.

One of the main results is an extension of a result of [ACHMR04] for $L^2(\mathbb{R}^n)$ using frames instead of Riesz bases. We show that the result is valid for invariant spaces of finite length or finite average dimension. Then, we prove this result in full generality in the case of abstract Hilbert spaces.

Furthermore, we extend to the abstract case a result of [BK06], which proves that for any finite generator system of an invariant space there is a minimal generator set, formed by linear combinations of the original generators, without using the translations.

Keywords: Shift invariant spaces, Gabor systems, Generating sets, Commuting unitary operators, Hilbert modules.

Agradecimientos

Muchas personas han hecho posible que yo terminara esta tesis.

Primero quería agradecer a mi director, Carlos Cabrelli, que durante estos años me ha guiado y ayudado discutiendo los temas de esta tesis y además ha revisado, corregido y hecho sugerencias para innumerables borradores, versiones preliminares e informes.

Quiero agradecer también el apoyo de mi familia y amigos.

También quería agradecer a la Fundación Ciencias Exactas y Naturales que me otorgó una beca que cubrió la mayor parte de los gastos durante el doctorado.

Además quiero agradecer a todos los que han ayudado respondiéndome consultas, discutiendo puntos oscuros, prestando libros o haciendo comentarios sobre las versiones preliminares: Constanza Sánchez de la Vega, Dora Tilli, Esteban Andruchow, Ezequiel Rela, Fernando López, Pablo Haramburu, José Luis Romero, Luis Silvestre, Matías Graña, Pablo De Nápoli, Patricia Quattrini, Román Sasyk, Leandro Vendramin, Leandro Zuberman y espero no haber olvidado a nadie. En especial a Gabriela Jeronimo por sus múltiples comentarios sobre las versiones preliminares.

Para Dora y Laura.

Índice general

Carátula I

Resumen III

Abstract V

Agradecimientos VII

Dedicatoria IX

Índice general XI

1. Introducción 1
- 1.1. Espacios invariantes por traslaciones . . . 1
- 1.2. Bases y sistemas similares . . . 2
- 1.3. Transformada de Fourier y producto en frecuencias . . . 3
- 1.4. Aplicaciones . . . 4
- 1.5. Sistemas de Gabor subadjuntos . . . 5
- 1.6. Generalización a espacios de Hilbert . . . 6
- 1.7. Organización . . . 6

I. Espacios invariantes por traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$ 9

2. Espacios invariantes por traslaciones 11
- 2.1. Bases de traslaciones . . . 12
- 2.2. Operaciones . . . 13
  - 2.2.1. Transformada de Fourier . . . 13
  - 2.2.2. Producto en frecuencias . . . 15
  - 2.2.3. Multiplicador . . . 17
  - 2.2.4. Operaciones vectoriales . . . 19
- 2.3. Restricción a $L^2(\mathbb{R})^A$ . . . 20

2.3.1. Bases ortonormales 22
2.3.2. Bases de Riesz 23
2.3.3. Ortonormalización 26
2.4. Función dimensión constante 30
2.4.1. Teoremas de Robertson 30
2.5. Marcos 32
2.5.1. Función dimensión 34
2.5.2. Espectro 35

3. Espacios de banda limitada **37**
3.1. Banda $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 37
3.2. Bandas más angostas $(\Omega < \frac{1}{2})$ 38
3.3. Banda más ancha $(\Omega = \frac{3}{2})$ 40
3.4. Complemento ortogonal 41
3.4.1. Construcción de contraejemplos 43

4. Espacios invariantes por traslaciones en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ **45**
4.1. Definiciones 46
4.2. Propiedades de las traslaciones 48

II. Generalización a espacios de Hilbert **51**

5. Introducción y definiciones **53**
5.1. Notación 54

6. Ejemplos **57**
6.1. Sistemas de Gabor 58
6.1.1. Producto en frecuencias y transformada de Zak 59
6.1.2. Caso más general 62
6.2. Ejemplos sencillos 63
6.2.1. La identidad 63
6.2.2. Paridad 66
6.2.3. Diagonal 68
6.3. Sonido estéreo 70
6.3.1. Suma directa 70
6.3.2. Sincronizado 71
6.3.3. Con intercambio 72

7. Cálculo funcional continuo en varias dimensiones **77**
7.1. Espectro 78
7.2. Cálculo funcional continuo 81

8. Producto y multiplicador en abstracto **83**
8.1. Producto en frecuencias 83
8.1.1. Definición 84
8.1.2. Propiedades 85
8.2. Multiplicador 87
8.2.1. Definición 88
8.2.2. Propiedades 90
8.3. Estructura de las operaciones 93

9. Bases y vectores diagonales **97**
9.1. Bases ortonormales y de Riesz 97
9.1.1. Teoremas de Robertson 98
9.2. Vectores diagonales 102
9.2.1. Subespacios invariantes 104

10. Extensión a marcos **107**
10.1. Producto en frecuencias reducido 108
10.1.1. Subespacio de los productos acotados 112
10.1.2. Propiedades 115
10.1.3. Diferencias 117
10.2. Estructura y descomposición 117
10.3. Existencia de marcos de traslaciones 128
10.4. Extensión de los teoremas de Robertson 129
10.5. Función dimensión 132
10.5.1. Robertson y dimensión 133
10.5.2. Cambio a una medida más fuerte 134
10.5.3. Funciones y medidas 134
10.5.4. Cambio a una medida más débil 137
10.5.5. Definición final 137
10.5.6. Dimensión de espacios invariantes por traslaciones de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ 138
10.6. Largo 140
10.7. Espectros 142
10.7.1. Espectro $\tilde{\sigma}$ 142
10.7.2. Espectro σ 145
10.7.3. Clausura esencial 146
10.7.4. Relación entre los espectros 148
10.7.5. Espectro de los espacios invariantes por traslaciones . . 150

III. Aplicaciones 153

11. Existencia de generadores minimales especiales 155

11.1. Diagonalizando vectores 156

11.2. Resultado principal 158

12. Caracterización de conjuntos generadores 163

12.1. Extensión al esquema abstracto 164

12.2. Función dimensión 167

12.3. Dimensión media 170

12.3.1. Aplicación a onditas 174

13. Ejemplos de espectros 177

13.1. Espectro denso 177

13.1.1. Conjunto de Cantor de medida positiva 177

13.1.2. Banda en el complemento 179

13.2. Espectro con medida de Lebesgue cero 180

13.2.1. Conjunto de Cantor clásico 180

13.2.2. Banda en el conjunto de Cantor 183

13.3. Revisitando el sonido estéreo 186

13.3.1. Recalculando el producto 188

13.3.2. Bases y marcos 189

13.3.3. Función dimensión y espectros 198

Apéndices 199

A. Módulos de Hilbert 203

B. Compresión y procesamiento de señales 207

B.1. Algoritmos de compresión genéricos 207

B.2. Archivos de imágenes fotográficas 208

B.3. Compresión de imágenes 209

B.4. Otros algoritmos similares 211

Bibliografía 213

Firmas 217

Capítulo 1

Introducción

1.1. Espacios invariantes por traslaciones

Los *espacios invariantes por traslaciones enteras* son subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ con la propiedad de que si una función $f(x)$ está en el subespacio, también lo estarán las funciones $f(x-1)$ y $f(x+1)$ que se obtienen trasladando una unidad a la función $f(x)$ hacia la derecha y hacia la izquierda respectivamente. A lo largo de este trabajo consideraremos solamente traslaciones enteras, por ello llamaremos a estos espacios simplemente *espacios invariantes por traslaciones.*

Estos espacios sirven de modelo para numerosas aplicaciones en procesamiento de señales e imágenes, como por ejemplo, procesos de la voz, radar e imágenes médicas. Por ejemplo, si al grabar un sonido en un experimento se obtuvo una determinada señal, es posible que al repetir el experimento se obtenga la misma señal adelantada o atrasada una cierta cantidad de tiempo. Es decir, en estos procesos el tiempo no aparece explícitamente en las ecuaciones que los modelan y por ello la elección del momento en que se empieza a medir es arbitraria.

También se pueden considerar los espacios invariantes por traslaciones en varias dimensiones. Por ejemplo para modelar imágenes se considera $L^2(\mathbb{R}^2)$ con traslaciones verticales y horizontales. Al desplazar la imagen hacia la derecha, izquierda, arriba o abajo se vuelve a obtener una imagen.

Además los espacios invariantes por traslaciones aparecen en diversas áreas de la matemática, y por ello hay un gran interés en su estudio y una abundante bibliografía describiendo sus propiedades.

Por ejemplo, en la teoría de *Onditas* (*Wavelets*) se descompone una imagen en distintos niveles de resolución. Cada uno de estos niveles se modela como un espacio invariante por traslaciones. Esta descomposición se utiliza por ejemplo en el formato de compresión de imágenes JPEG2000.

También aparecen los espacios invariantes por traslaciones en los *sistemas de Gabor*. En estos sistemas además de traslaciones en el tiempo se consideran traslaciones en frecuencia. Fijando la traslación en frecuencia se obtiene un espacio invariante por traslaciones para analizar.

En $L^2(\mathbb{R})$ las traslaciones enteras se pueden representar mediante un operador unitario E que traslada a las funciones hacia la derecha

$$Ef(x) = f(x-1)$$

y su inverso hacia la izquierda. Las otras traslaciones enteras se pueden construir a partir de este operador. En cambio, en $L^2(\mathbb{R}^2)$ se deben utilizar dos operadores unitarios, uno para las traslaciones horizontales y otro para las verticales. Una propiedad importante es que *conmutan*, o sea que al cambiar el orden en que se aplican se obtiene el mismo resultado. Esto se puede extender a más dimensiones, es decir, en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ se consideran d operadores de traslación, uno para cada eje.

1.2. Bases y sistemas similares

Para procesar las imágenes o señales por computadora, usualmente se trabaja con los coeficientes de la función representada en una base. Para que las cuentas sean más sencillas es conveniente que sea una *base ortonormal*. También es bueno que la base esté formada por las traslaciones de una o varias funciones originales, de manera que las propiedades de los coeficientes sean uniformes de la misma manera que es el espacio de señales bajo análisis.

Por ello un problema central es encontrar bases que cumplan estas dos condiciones. En cada aplicación aparecen requisitos adicionales. Por ejemplo para el procesamiento de imágenes es frecuente pedir que las funciones de la base sean continuas o simétricas. En el Apéndice B discutimos brevemente cómo se aplican estas bases a la compresión de imágenes.

En general, encontrar estas bases ortonormales de traslaciones es un problema difícil y a veces imposible. Para evitar este problema usualmente se debilita la condición de ortogonalidad y se buscan *bases de Riesz* y *marcos* (*frames*). Estas condiciones están elegidas de manera que las nuevas estructuras tengan suficientes propiedades para que las operaciones con funciones y coeficientes se puedan realizar en forma razonable. Por ejemplo, es esperable que si se toman dos funciones cercanas sus coeficientes sean cercanos y viceversa.

Una propiedad importante de las bases ortonormales es la fórmula que permite reconstruir a toda función g a partir de los coeficiente: Si $f_1, f_2, \ldots$

es una base ortonormal y g es una función cualquiera tenemos que

$$g = \sum_n \langle g, f_n \rangle f_n.$$

Un concepto más general es el de *marcos de Parseval*. Un marco de Parseval es un conjunto de funciones $f_1, f_2, \ldots$ tal que la fórmula de reconstrucción sigue valiendo para toda función g. Sin embargo, en este caso las funciones que lo componen ya no son ortonormales, ni están normalizadas.

En particular, al utilizar marcos se tiene una sobreabundancia de información que es útil para poder reconstruir las funciones originales aun cuando se han perdido parte de los coeficientes, por ejemplo al ser trasmitidos. Además, los coeficientes no son únicos y esto se puede aprovechar para elegirlos convenientemente y buscar representaciones con menos coeficientes no nulos.

Otra posible generalización de las bases ortonormales son las *bases de Riesz biortonormales*. En esta estructura se encuentran dos bases de Riesz $f_1, f_2, \ldots$ y $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots$, tales que

$$g = \sum_n \langle g, f_n \rangle \tilde{f}_n \text{ y } g = \sum_n \left\langle g, \tilde{f}_n \right\rangle f_n,$$

o sea que una de ellas se utiliza para calcular los coeficientes y otra para la reconstrucción. Las bases de Riesz se utilizan por ejemplo en el formato de compresión JPEG2000, debido a que por los diferentes requisitos técnicos no hay ninguna base ortonormal conveniente.

1.3. Transformada de Fourier y producto en frecuencias

La herramienta fundamental en $L^2(\mathbb{R})$ para trabajar en los espacios invariantes por traslaciones es la *transformada de Fourier*, que separa las frecuencias que componen una función. A partir de ella se construyen diversas herramientas como el *producto en frecuencias* y la *multiplicación en frecuencias* que definiremos más adelante.

Por la estructura de los espacios invariantes por traslaciones, las frecuencias están asociadas a valores en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Vamos a representar al toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ como $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$, en donde los bordes opuestos están identificados.

Al combinar estas dos operaciones y restringirlas a un subespacio denso apropiado, se obtiene una estructura de *módulo de Hilbert*. Esta es una generalización de los espacios de Hilbert, en la que los números complejos se reemplazan por funciones acotadas definidas en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Explotamos en profundidad esta analogía. Por ejemplo utilizaremos el algoritmo de Gram-Schmidt para obtener bases ortonormales de traslaciones a partir de bases de Riesz de traslaciones, introduciendo sólo unas mínimas modificaciones.

Las diferencias entre las propiedades algebraicas de los números complejos (que son un cuerpo) y las de las funciones sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ (que son un álgebra solamente) hacen que no siempre se pueda aplicar este método para obtener bases ortonormales de traslaciones. En el caso general, veremos que se debe recurrir a los marcos de Parseval de traslaciones.

De la misma manera, propiedades que en el caso de los espacios de Hilbert toman valores en el cuerpo complejo $\mathbb{C}$, tienen análogo en el caso general que tomarán valores que son una función sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. En particular, definiremos una *función dimensión* y veremos que comparte muchas de las propiedades de la dimensión usual de los espacios de Hilbert.

1.4. Aplicaciones

Como aplicaciones de estas generalizaciones analizaremos algunos resultados recientes.

Decimos que las funciones $f_1, f_2, \ldots$ *generan* un espacio invariante por traslaciones S si el menor espacio invariante por traslaciones que las contiene a todas ellas es S. Interesa analizar en particular los espacios que están generados por una cantidad finita de funciones. A la mínima cantidad de funciones necesarias para generar S la llamamos el *largo* de S (que puede ser infinito).

Si se tienen un espacio invariante por traslaciones S del que se conocen n generadores y que tiene largo l (con $l < n$) interesa encontrar un sistema de generadores que sea minimal, o sea con sólo l generadores. Estos siempre existen, y se pueden obtener utilizando las traslaciones de los n generadores originales. Bownik y Kaiblinger demostraron en [BK06] que es posible obtener los l nuevos generadores tomando combinaciones lineales de los generadores dados (sin usar las traslaciones ni tomar límites). Esto es útil, ya que si las n funciones originales tienen soporte compacto u otra propiedad que se preserva por sumas finitas, las nuevas l funciones generadoras también la tienen. Nosotros generalizamos este resultado, de manera que lo podamos aplicar a sistemas de Gabor y otros esquemas abstractos como los que discutiremos posteriormente.

Por otro lado, si se tiene un espacio invariante por traslaciones S del que se conoce solamente el largo l y que tiene una base de Riesz generada por las traslaciones de l funciones interesa saber si dadas n funciones en S, éstas alcanzan para determinar de manera única a S. Aldroubi, Cabrelli, Hardin, Molter y Rodado encontraron en [ACHMR04] una caracterización de los conjuntos con esta propiedad. Sin embargo, si S no tiene una base de Riesz de traslaciones el largo l no aporta suficiente información. Demostramos que en ese caso es posible encontrar una caracterización alternativa usando la *dimensión media* de S, que corresponde al promedio de la función dimensión. Cuando S tiene una base de Riesz de traslaciones la dimensión media coincide con el largo, y se vuelve a obtener el resultado anterior. También generalizamos ambos resultados a sistemas de Gabor y otros esquemas abstractos como los que discutiremos posteriormente.

1.5. Sistemas de Gabor subadjuntos

También consideramos los *sistemas de Gabor* o de *Weyl-Heisenberg*, en los que las traslaciones son enteras y las modulaciones también son enteras (o 2π enteras, según la notación utilizada). En estos casos particulares las operaciones conmutan, de manera que desde el punto de vista abstracto se tiene una estructura similar a los espacios invariantes por traslaciones.

En estos sistemas también interesa encontrar bases ortonormales que estén formadas por traslaciones y modulaciones de una función fija. Por ejemplo, en el formato de compresión JPEG se utiliza una base ortonormal que se puede considerar como una versión discreta de este tipo de sistema. También se pueden definir las otras estructuras nombradas anteriormente, como las bases de Riesz y marcos de Parseval. Por supuesto, ahora interesa buscar las que están formadas por traslaciones y modulaciones de algunas funciones fijas.

Al igual que en los espacios invariantes por traslaciones, consideramos las funciones en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, pero ahora con el doble de transformaciones. Por ello la transformada de Fourier, el producto en frecuencias y el multiplicador y todos los operadores considerados ya no están interrelacionados como en los espacios invariantes por traslaciones.

Veremos que en estos espacios se puede definir un producto en frecuencias que es análogo al producto en frecuencias de los espacios invariantes por traslaciones. Es más, al definirlo se obtienen funciones integrables al igual que en los espacios invariantes por traslaciones. Esto permite reproducir los resultados de espacios invariantes por traslaciones sin que aparezcan problemas técnicos adicionales, como en los casos más generales que discutiremos después.

Esto nos permitió encontrar resultados nuevos, que corresponden a los análogos para los sistemas de Gabor de los resultados obtenidos en [BK06] y [ACHMR04] y su extensión.

1.6. Generalización a espacios de Hilbert

Consideraremos un esquema más general que engloba a los dos anteriores. Tomamos un espacio de Hilbert en el que se han elegido n operadores unitarios que conmutan. Estos operadores jugarán el papel de las traslaciones en este espacio. Es esperable que en las aplicaciones correspondan a algún tipo de desplazamiento, como es el caso de las traslaciones en frecuencia de los sistemas de Gabor. Sin embargo, no pedimos ningún tipo de requisito adicional y se pueden elegir libremente de acuerdo al problema.

Al tomar este grado de generalidad, aparece una dificultad técnica adicional por la que el equivalente al producto en frecuencias es una medida finita en vez de una función integrable. Por ejemplo, puede ser una medida δ, que corresponde a una carga puntual. Damos varios ejemplos sencillos en donde aparecen estas medidas. También analizamos con más detalle un modelo de sonido en estéreo, en el que se consideran dos señales sincronizadas. En este caso también el equivalente al producto en frecuencias es una medida.

Pudimos extender los resultados de [BK06] y de [ACHMR04] y su generalización mencionada anteriormente a los esquemas abstractos más generales y por ello se pueden aplicar a los ejemplos discutidos.

Sin embargo, algunas propiedades como la construcción de bases ortonormales de traslaciones y marcos de Parseval de traslaciones, sólo se pueden extender a los espacios en que el producto en frecuencias es una función y nunca una medida. Para el caso más general, en las construcciones intermedias debimos introducir generalizaciones adaptadas a las medidas correspondientes. Veremos que en algunos casos, como el del modelo de sonido en estéreo, es posible elegir convenientemente una medida de referencia y reconstruir los resultados de bases ortonormales de traslaciones y marcos de Parseval de traslaciones. Pero esta construcción no se puede hacer en general.

1.7. Organización

En el Capítulo 2 daremos un rápido panorama de los espacios invariantes por traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$, junto con algunas de las principales herramientas como la transformada de Fourier, el producto en frecuencias y la multiplicación en frecuencias. También veremos varios teoremas relacionados con estos espacios. Esta información nos servirá como motivación de las definiciones que haremos en el caso abstracto. Por un lado, aparecen menos detalles técnicos, por lo que las definiciones y demostraciones son más directas. Por otro lado, sirve como un ejemplo conocido y concreto en donde se pueden comparar y entender las definiciones del caso abstracto. En este Capítulo incluiremos solamente unas pocas demostraciones, ya que los resultados son conocidos o se demuestran más adelante con mayor generalidad. Dejamos solamente aquellas que nos parecen reveladoras para entender la estructura de los espacios invariantes por traslaciones y de la notación involucrada.

En particular analizaremos como es posible ver parte de estos espacios como una generalización de un espacio de Hilbert en la que los números complejos se reemplazan por funciones sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Daremos caracterizaciones (conocidas) de las bases ortonormales, bases de Riesz y marcos usando el producto en frecuencias. Es más, usando la analogía anterior podremos usar el algoritmo de Gram-Schmidt para obtener bases ortonormales con propiedades especiales (cuando sea posible).

En el Capítulo 3 veremos varios ejemplos de espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$, que se conocen como espacios de banda limitada. Así es posible ver como funcionan algunas de las definiciones en casos prácticos. Elegimos casos particulares en donde las cuentas son sencillas y facilitan la comprensión de la notación. También servirán como ejemplos y contraejemplos de varios resultados que aparecen en este trabajo.

En el Capítulo 4 describimos las propiedades de los espacios invariantes por traslaciones en varias dimensiones. La estructura es muy similar al caso unidimensional y las herramientas se copian sin dificultad. En particular analizamos la importancia de que las traslaciones en las diferentes direcciones conmuten entre si

En el Capítulo 5 damos una generalización de los espacios invariantes por traslaciones en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ a un espacio de Hilbert abstracto, en el que las traslaciones se reemplazan por n operadores unitarios que conmutan.

En el Capítulo 6 damos algunos ejemplos de espacios con esta estructura. El primer caso es el de los sistemas de Gabor subadjuntos, en los que se consideran traslaciones y modulaciones enteras. Aparecen en las aplicaciones y servirán para aplicar los resultados generales a otro ejemplo interesante. A continuación, veremos varios ejemplos más patológicos. Son ejemplos sencillos, en los que se ven claramente que al generalizar el producto en frecuencias se pueden obtener medidas. Finalmente, se analizaremos un espacio formado por dos copias de $L^2(\mathbb{R})$. Este puede ser útil para fenómenos en los que se miden dos señales al mismo tiempo, como por ejemplo el sonido en estéreo. Veremos tres posibles estructuras y las diferencias que aparecen en la notación.

En el Capítulo 7 daremos una versión adaptada del Cálculo Funcional

Continuo para varios operadores unitarios que conmutan, como lo hacen nuestras traslaciones generalizadas. También caracterizaremos el espectro conjunto relacionado con estos operadores.

En el Capítulo 8 daremos las definiciones del equivalente al producto en frecuencias y multiplicación en frecuencia para el caso abstracto. También demostraremos las propiedades más elementales de estos nuevos objetos.

En el Capítulo 9 continuaremos describiendo varias propiedades generales y veremos como es posible repetir la ortogonalización realizada en los espacios invariantes por traslaciones, para obtener una base ortonormal de traslaciones a partir de una base de Riesz de traslaciones.

En el Capítulo 10 estudiaremos el caso general, es decir que se abandona la hipótesis de que el espacio tiene una base ortonormal de traslaciones. De esta manera estudiaremos espacios que tienen marcos de traslaciones o incluso estructuras aún más débiles. Con ello, veremos la estructura de estos espacios. En particular, daremos una caracterización de los espacios que tienen un marco de traslaciones.

También veremos que al restringir las operaciones convenientemente se obtiene nuevamente un módulo de Hilbert.

En el Capítulo 11 veremos como aplicar estas herramientas a un resultado de Bownik y Kaiblinger demostrado en [BK06]. Este resultado dice que dado un sistema de generadores, existe un sistema de generadores minimal combinando los generadores iniciales. Demostramos que se puede extender al esquema abstracto y por ello a los ejemplos discutidos.

En el Capítulo 12 veremos como aplicar estas herramientas a un resultado obtenido por Aldroubi, Cabrelli, Hardin, Molter y Rodado en [ACHMR04]. En particular analizaremos que propiedades permiten reconocer si tenemos un sistema de generadores de un subespacio. Veremos que es posible utilizar la dimensión media para extender este resultado a espacios que no tienen una base de Riesz de traslaciones. Demostramos que se puede extender al esquema abstracto y por ello a los ejemplos discutidos.

En el Capítulo 13 daremos algunos ejemplos adicionales en los que se ven las diferencias entre las dos nociones de espectro que aparecen a lo largo del trabajo. También analizaremos nuevamente el ejemplo del modelo del sonido en estéreo, y discutiremos como se puede extender algunos resultados eligiendo una medida de referencia adecuada.

En el Apéndice A daremos una definición completa de los módulos de Hilbert y las C^*-álgebras, que se usan durante el trabajo.

En el Apéndice B veremos como se utilizan los espacios invariantes por traslaciones y las bases de traslaciones para la compresión de imágenes fotográficas.

Parte I

Espacios invariantes por traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$

Capítulo 2

Espacios invariantes por traslaciones

Los *espacios invariantes por traslaciones enteras* son subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ con la propiedad de que si una función $f(x)$ está en el subespacio, también lo estará la función

$$E^k f(x) = f(x-k)$$

donde k es un número entero y E^k es el operador traslación por k. Este es un operador unitario o sea que en particular para toda función f tenemos que $\left\|E^k f\right\| = \|f\|$. A lo largo de este trabajo consideraremos solamente traslaciones enteras y operaciones con propiedades similares, por ello llamaremos a estos espacios simplemente *espacios invariantes por traslaciones*.

Uno de los casos más estudiados es el de las funciones de *banda limitada*. Las funciones en estos subespacios tienen sus frecuencias un conjunto fijo, por ejemplo el intervalo $[-\Omega, \Omega]$. Al trasladar la función no cambian las frecuencias que aparecen en su transformada de Fourier y por ello siguen estando en el mismo espacio. Analizaremos varios de estos espacios en el Capítulo 3.

En el Capítulo actual primero definiremos como son las bases de traslaciones y estructuras similares, que respetan la estructura de estos espacios. Después veremos varias operaciones que utilizaremos para construir caracterizaciones y algoritmos. Con ciertas restricciones, estas operaciones forman una estructura de módulo de Hilbert, que es una generalización de los espacios de Hilbert. En este caso, la diferencia es que los escalares en vez de ser números complejos son funciones en el toro $\mathbb{T}$.

Usaremos estas operaciones para ver caracterizaciones de las bases ortonormales de traslaciones. También, aprovechando la similitud con los espacios de Hilbert, veremos que es posible aplicar el algoritmo de Gram-Schmidt para construir bases ortonormales de traslaciones a partir de bases de Riesz de traslaciones.

No todos los espacios invariantes por traslaciones tienen una base ortonormal de traslaciones, así que discutiremos los marcos de Parseval de traslaciones, que son una estructura más general. Con ellos podremos definir una función dimensión, que servirá como análogo de la dimensión de los espacios de Hilbert.

En este Capítulo daremos sólo las demostraciones que iluminan más la estructura de estos espacios ya que muchas de estas propiedades son conocidas y otras las demostraremos más en general en los Capítulos posteriores.

2.1. Bases de traslaciones

En un espacio invariante por traslaciones, nos interesa encontrar bases ortonormales y estructuras similares que estén formadas por las traslaciones de una o más funciones, quizás infinitas de ellas.

Dado un conjunto $F = \{f_1, \ldots, f_r, \ldots\}$ de funciones en $L^2(\mathbb{R})$ definimos el *conjunto de traslaciones* de F como

$$E(F) = \left\{E^k f_i, k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}\right\}.$$

Tanto en F como en $E(F)$ permitiremos que los elementos aparezcan *con multiplicidad*, o sea que puede haber repeticiones de ellos y la cantidad de repeticiones en F se tendrá en cuenta al calcular $E(F)$. Además pueden aparecer repeticiones adicionales si $E^k f_i = E^{k'} f_{i'}$ cuando al menos uno de los índices es distinto.

Si F es un conjunto finito, también utilizaremos la misma notación para el conjunto de sus traslaciones. Cuando tengamos una sola función f usaremos la notación $E(f)$ para representar $E(\{f\})$. También definimos el *espacio invariante por traslaciones generado* por F como el menor espacio invariante por traslaciones que contiene a F, o sea

$$S(F) = \overline{\langle E^k f_i, k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{N}\rangle}.$$

Nuevamente, usaremos la misma notación para conjuntos finitos y para una sola función escribiremos $S(f)$ en vez de $S(\{f\})$. También diremos que las funciones $f_1, \ldots, f_r, \ldots$ que están en F *generan* el espacio invariante por traslaciones $S(F)$.

En general, será útil tener a los elementos de los conjuntos en algún orden determinado y por eso trabajaremos con sucesiones y vectores de funciones.

Para que las traslaciones de F sea una base ortonormal, es claro que no debe haber repeticiones en F. Sin embargo, vamos a estudiar conceptos más generales en los que se permiten repeticiones, como los marcos que veremos en la Sección 2.5.

Este tipo de bases aparece en muchas aplicaciones. Por ejemplo en el Apéndice B vemos como se aplican estas bases a la compresión de imágenes y más en general al procesamiento de señales. Un punto crítico en muchos de estos algoritmos es elegir una base de funciones que sea buena para describir las imágenes o señales bajo estudio. Por ejemplo, se busca que las funciones sean continuas, o de soporte compacto.

2.2. Operaciones

Vamos a mostrar algunas operaciones que se utilizan a menudo para trabajar en los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$. Estas operaciones sirven para transformar a un conjunto inicial de funciones y construir algoritmos que permitan obtener un nuevo conjunto de funciones con propiedades especiales.

En cada caso, vamos a discutir las principales propiedades. Además las reescribiremos de manera que motiven las definiciones que utilizaremos en el caso abstracto.

2.2.1. Transformada de Fourier

La herramienta fundamental para trabajar en los espacios invariantes por traslaciones es la transformada de Fourier. Hay múltiples convenciones para calcular esta transformada. Ahora describiremos la convención que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Si f es un función en $L^1(\mathbb{R})$ definimos su transformada de Fourier

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} x t}\, \mathrm{d}\, x$$

en donde t es un número en $\mathbb{R}$ (correspondiente a una "frecuencia"). Definimos la antitransformada como

$$\check{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x t}\, \mathrm{d}\, x.$$

Estas operaciones se pueden extender de la manera usual a funciones en $L^2(\mathbb{R})$ y en ese caso son isomorfismos isométricos, o sea que

$$\left\|f\right\|_2 = \left\|\hat{f}\right\|_2 = \left\|\check{f}\right\|_2.$$

Además una es la inversa de la otra.

Usaremos varias transformadas de Fourier entre distintos espacios de funciones. En todos los casos respetaremos esta convención de signos, indicando como la transformada la definición en la que parece un signo "$-$" en el exponente y como antitransformada la que tiene un signo "$+$".

Vamos a representar al toro $\mathbb{T}$ como el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ con los extremos identificados. Otra posible representación es el círculo de radio 1 en los números complejos. Para pasar de una representación a la otra utilizaremos la función $z\colon \mathbb{T} \to \{\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| = 1\}$ tal que

$$z(\omega) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\omega}.$$

Para una función f en $L^1(\mathbb{T})$ definiremos su transformada de Fourier como

$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} f(\omega)\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\omega n}\, \mathrm{d}\,\omega,$$

en donde n es un número entero en $\mathbb{Z}$.

Para una sucesión f en $\ell^1(\mathbb{Z})$ definimos su transformada de Fourier como

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n)\, \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\omega n},$$

en donde ω es un punto del toro $\mathbb{T}$.

En ambos casos definimos la antitransformada correspondiente utilizando el signo positivo en la exponencial.

Estas cuatro transformaciones se extienden nuevamente a funciones en $L^2(\mathbb{T})$ y sucesiones $\ell^2(\mathbb{Z})$ respectivamente. Estas extensiones son isomorfismos isométricos y además cada antitransformada es la inversa de la otra transformada, o sea que:

- $^\vee\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$ es la inversa de $^\wedge\colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$.
- $^\vee\colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ es la inversa de $^\wedge\colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2(\mathbb{T})$.

Modulaciones

Junto con las traslaciones, otra operación importante es la modulación. Dada una función f se obtiene la función

$$M^k f(x) = f(x)\, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}kx}$$

para cada número entero k. Este también es un operador unitario, así que $\left\|M^k f\right\| = \|f\|$.

Heurísticamente, esta operación corresponde a una traslación en frecuencias de la función f. La transformada de Fourier se relaciona con las traslaciones de la siguiente manera:

- $\widehat{E^k f} = M^{-k}\hat{f}$ y $\left(E^k f\right)^{\vee} = M^k\check{f}$
- $\widehat{M^k f} = E^k\hat{f}$ y $\left(M^k f\right)^{\vee} = E^{-k}\check{f}$

Usaremos estas relaciones para definir las operaciones en los espacios invariantes por traslaciones. También veremos en la Sección 6.1 los sistemas de Gabor que combinan estas dos operaciones.

2.2.2. Producto en frecuencias

Ahora vamos a ver una operación llamada *producto en frecuencias* que a un par de funciones en $L^2(\mathbb{R})$ le asigna una función definida sobre el toro $\mathbb{T}$. Veremos que tiene muchas propiedades similares a un producto escalar.

Dadas dos funciones f y g en $L^2(\mathbb{R})$ definimos

$$\{f,g\}(\omega) = \sum_k \check{f}(\omega-k)\overline{\check{g}(\omega-k)}. \tag{2.1}$$

Como f y g están en $L^2(\mathbb{R})$, entonces sus antitransformadas de Fourier $\check{f}$ y $\check{g}$ también están en $L^2(\mathbb{R})$. Por ello la función $\check{f}\overline{\check{g}}$ está en $L^1(\mathbb{R})$ y su periodización está en $L^1(\mathbb{T})$.

La definición más utilizada del producto en frecuencias (por ejemplo en [GLT93], [BDR94a], [RS95], [Bow00], [ACHMR04]) involucra las transformadas de Fourier en vez de las antitransformadas, o sea que la expresión queda

$$\{f,g\}^{\text{usual}}(\omega) = \sum_k \hat{f}(\omega-k)\overline{\hat{g}(\omega-k)}.$$

Ambas definiciones difieren en detalles mínimos. La diferencia es que

$$\{f,g\}(\omega) = \{f,g\}^{\text{usual}}(-\omega).$$

Todas las demostraciones y caracterizaciones funcionan con ambas. Sin embargo, para poder relacionar al producto en frecuencias con el cálculo funcional con el operador de traslación E es más cómodo si se toma la definición que elegimos en la Ecuación (2.1).

Muchas de las propiedades de los espacios invariantes por traslaciones se pueden analizar a través de la matriz formada por los productos en frecuencias calculados entre cada par de sus generadores. En particular, se obtiene mucha información del producto en frecuencias de una función f consigo misma $\{f, f\}(\omega)$. Varios algoritmos utilizan esta función para construir nuevas funciones dentro del espacio invariante por traslaciones.

Una notación más usual para esta operación es

$$G_{f,g}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \{f, g\}(\omega).$$

Preferimos utilizar esta notación que recuerda a la de un producto interno. Vamos a ver que, con ciertas restricciones, esta operación y la que definiremos a continuación tienen propiedades similares al producto interno y producto por escalares de un espacio de Hilbert. Con esta notación sus propiedades se expresan de una manera más intuitiva y van a ser más fáciles de utilizar en las secciones siguientes. Vamos a ver que la estructura formada por estas operaciones restringidas es un módulo de Hilbert, que es una generalización de un espacio de Hilbert. En nuestro caso en vez de utilizar números, vamos a tener que utilizar como escalares a las funciones definidas en el toro n-dimensional $\mathbb{T}$.

Utilizaremos también esta notación para definir los análogos en un espacio de Hilbert abstracto en el que se han fijado operadores que desempeñan el papel de las traslaciones. Así podremos extender algunos resultados de los espacios invariantes por traslaciones a esquemas más generales, casi sin hacer modificaciones.

Otra definición

Vamos a dar otra definición del producto en frecuencias en $L^2(\mathbb{R})$. Para ello calculemos la serie de Fourier de $\{f, g\}(\omega)$ en un entero $a \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{\{f,g\}}(a) &= \int_{\mathbb{T}} \sum_k \check{f}(\omega - k)\, \overline{\check{g}(\omega - k)}\, \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\omega a}\, \mathrm{d}\,\omega \\
&= \int_{\mathbb{T}} \sum_k \check{f}(\omega - k)\, \overline{\check{g}(\omega - k)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}(\omega - k) a}}\, \mathrm{d}\,\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \check{f}(\omega)\, \overline{M^a \check{g}(\omega)}\, \mathrm{d}\,\omega = \int_{\mathbb{R}} \check{f}(\omega)\, \overline{(E^a g)^{\vee}(\omega)}\, \mathrm{d}\,\omega \\
&= \left\langle \check{f}, (E^a g)^{\vee} \right\rangle = \langle f, E^a g \rangle,
\end{aligned}$$

en donde podemos agrupar las integrales sobre $\mathbb{T}$ con la suma ya que las como las funciones $\check{f}$ y $\check{g}$ están en $L^2(\mathbb{R})$, entonces $\check{f}\overline{\check{g}}$ está en $L^1(\mathbb{R})$. Así que tenemos que

$$\widehat{\{f,g\}}(a) = \langle f, E^a g \rangle. \tag{2.2}$$

Esta igualdad es importante, porque la usaremos para generalizar el producto en frecuencias.

Veamos otra forma de mirar esta ecuación. Dadas las funciones f y g, consideramos el conjunto de las traslaciones de g

$$E(g) = \{E^a g, a \in \mathbb{Z}\}.$$

Ahora consideramos los productos escalares entre f y todas las traslaciones de g. Esto nos da una sucesión de números complejos

$$\{\langle f, E^a g\rangle\}_{a\in\mathbb{Z}}.$$

Temporalmente podemos asumir que esta sucesión tiene un buen decaimiento, por ejemplo es de soporte finito, está en $\ell^1(\mathbb{Z})$ o al menos en $\ell^2(\mathbb{Z})$. En estos casos podemos usar la inversa de la serie de Fourier y obtener la función

$$\begin{aligned} \{f, g\}(\omega) &= \left(\{\langle f, E^a g\rangle\}_{a\in\mathbb{Z}}\right)^{\vee}(\omega) \\ &= \sum_{a\in\mathbb{Z}} \langle f, E^a g\rangle \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a\omega} = \sum_{a\in\mathbb{Z}} \langle f, E^a g\rangle \, z^a(\omega), \end{aligned} \tag{2.3}$$

en donde usamos la notación $z^a(\omega) = (z(\omega))^a$.

Según el decaimiento de la sucesión de coeficientes, tenemos que la suma es finita, converge puntualmente, o al menos en $L^2(\mathbb{T})$ respectivamente.

En los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$ la Ecuación (2.1) y la Ecuación (2.2) nos dicen que la sucesión $\{\langle f, E^a g\rangle\}_{a\in\mathbb{Z}}$ es la serie de Fourier de una función en $L^1(\mathbb{T})$. Además la aplicación que manda una función de $L^1(\mathbb{T})$ en su serie de Fourier es inyectiva, de manera que la inversa está definida. En particular se tiene que la imagen de $L^1(\mathbb{T})$ por la transformada de Fourier está incluida en $c_0(\mathbb{Z})$, las sucesiones que tienen límite cero. Por la inyectividad, la Ecuación (2.3) tiene sentido, aunque puede ser que las sumatorias no converjan puntualmente.

Sin embargo, vamos a ver que en el caso más general de los espacios abstractos no siempre se tiene un buen decaimiento de los coeficientes y deberemos considerar generalizaciones del producto en frecuencias que son medidas.

2.2.3. Multiplicador

Hay otra operación muy usada para trabajar en los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$, pero casi siempre se utiliza de manera implícita. Consiste en multiplicar la transformada de Fourier de una función f de

$L^2(\mathbb{R})$ por una función periódica m, en el dominio de las frecuencias. De esta manera, se obtiene una nueva función $m \bullet f$ en $L^2(\mathbb{R})$, definida a partir de su antitransformada de Fourier,

$$(m \bullet f)^{\vee} = m\check{f},$$

o sea

$$m \bullet f = \widehat{m\check{f}}. \tag{2.4}$$

Para que esta operación tenga sentido, se debe pedir que $m\hat{f}$ sea una función de $L^2(\mathbb{R})$. Esto es equivalente a pedir que sea finita la expresión

$$\left\|m\hat{f}\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|m(\omega)\hat{f}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\,\omega = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} \left|m(\omega-k)\hat{f}(\omega-k)\right|^2 \mathrm{d}\,\omega.$$

y como m es periódica tenemos que,

$$\begin{aligned}\left\|m\hat{f}\right\|_2^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} |m(\omega)|^2 \left|\hat{f}(\omega-k)\right|^2 \mathrm{d}\,\omega = \int_{\mathbb{T}} |m(\omega)|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\hat{f}(\omega-k)\right|^2 \mathrm{d}\,\omega \\ &= \int_{\mathbb{T}} |m(\omega)|^2 \{f,f\}(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega,\end{aligned}$$

o sea que m tiene que pertenecer a $L^2(\{f,f\})$.

Multiplicador y funciones continuas

Veamos como reescribir el multiplicador de manera que no utilice la transformada de Fourier de manera explícita. Tomemos una función m que sea una exponencial compleja

$$m(\omega) = z^a(\omega) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a\omega},$$

en donde a es un número entero. Entonces tenemos que

$$m \bullet f = \left(m\check{f}\right)^{\wedge} = \left(M^a \check{f}(\omega)\right)^{\wedge} = E^a f.$$

De manera que es sencillo escribir las traslaciones enteras mediante esta multiplicación.

En general, si tenemos un polinomio trigonométrico (quizás con exponentes negativos) de la forma

$$p(z) = \sum_{\substack{k \text{ finito} \\ k\in\mathbb{Z}}} a_k z^k$$

por la linealidad de estas operaciones tenemos que

$$
\begin{aligned}
p(z) \bullet f = \widehat{p(z)\check{f}} &= \sum_{k \text{ finito}} \widehat{a_k z^k(\omega)}\, \check{f}(\omega) \\
&= \sum_{k \text{ finito}} a_k z^k \widehat{(\omega)\, \check{f}}(\omega) = \sum_{k \text{ finito}} a_k E^k f = p(E) f,
\end{aligned}
$$

en donde definimos el operador

$$p(E) = \sum_{\substack{k \text{ finito} \\ k\in\mathbb{Z}}} a_k E^k$$

tal que aplicado a una función f en $L^2(\mathbb{R})$ da

$$p(E) f = \sum_{\substack{k \text{ finito} \\ k\in\mathbb{Z}}} a_k E^k f.$$

Esta igualdad se puede extender a funciones periódicas continuas de la siguiente manera. Dada una función continua y periódica $\tilde{m}$ se la puede identificar como una función m sobre el círculo de los complejos de radio 1, tomando $m(z(\omega)) = \tilde{m}(\omega)$. Además las propiedades de continuidad y medibilidad de una son equivalentes en ambas. Utilizando el cálculo funcional para la función m continua, definida sobre el toro $\mathbb{T}$ tenemos el operador $m(E)$ que es acotado en $L^2(\mathbb{R})$. Como los polinomios son densos en las funciones continuas del toro (con la norma $\| \, \|_\infty$), es posible demostrar que al igual que con los polinomios.

$$(m \circ z) \bullet f = m(E) f. \tag{2.5}$$

2.2.4. Operaciones vectoriales

También vamos a definir la versión vectorial de estas operaciones:

Si $F = (f_1, \ldots, f_r)^t$ y $G = (g_1, \ldots, g_s)^t$ son dos vectores de funciones en $L^2(\mathbb{R})$, definimos la matriz $\{F, G\}$ de funciones en $L^1(\mathbb{T})$ de tamaño $r \times s$ con coeficientes

$$\{F, G\}_{i,j} = \{f_i, g_j\}.$$

Si tenemos un vector $M = (m_1, \ldots, m_r)$ de funciones en el toro tales que m_i está en $L^2(\{f_i, f_i\})$ entonces definimos la función $M \bullet F$ en $L^2(\mathbb{R})$ de manera que

$$M \bullet F = \sum_{i=1}^{r} m_i \bullet f_i.$$

Si tenemos una matriz M de funciones en el toro de tamaño $q \times r$, de filas $(M^1, \ldots, M^q)^t$, tales que $M^j \bullet F$ está bien definido para todo $j = 1, \ldots, q$, entonces definimos el vector de q funciones $M \bullet F$ en $L^2(\mathbb{R})$ de manera que los coeficientes son

$$(M \bullet F)_j = M^j \bullet F.$$

2.3. Restricción a $L^2(\mathbb{R})^A$

Vamos a ver como es posible restringir el dominio de estas operaciones, para obtener una estructura de módulo de Hilbert.

Definimos $L^2(\mathbb{R})^A$ como

$$L^2(\mathbb{R})^A = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \,/\, \{f, f\} \text{ es acotada en } \mathbb{T} \right\}.$$

En la Proposición 10.7 demostraremos que un conjunto de este tipo es un subespacio invariante por traslaciones enteras (no necesariamente cerrado) de $L^2(\mathbb{R})$.

Además definimos

$$\|f\|_* = \sqrt{\|\{f, f\}\|_\infty},$$

en donde se usa la norma $\| \ \|_\infty$de $L^\infty(\mathbb{T})$, las funciones medibles y esencialmente acotadas sobre el toro $\mathbb{T}$. Se puede demostrar que esta es una norma (distinta de la norma usual de $L^2(\mathbb{R})$) y que con esta nueva norma $L^2(\mathbb{R})^A$ queda cerrado, aunque no es un espacio de Hilbert.

Al restringir las dos operaciones al subespacio $L^2(\mathbb{R})^A$ y tomando para el multiplicador sólo funciones en $L^\infty(\mathbb{T})$ (o equivalentemente las funciones acotadas y periódicas) obtenemos muchas propiedades, que citamos a continuación sin demostración:

La suma $+\colon L^2(\mathbb{R})^A \times L^2(\mathbb{R})^A \to L^2(\mathbb{R})^A$ hace que $L^2(\mathbb{R})^A$ sea un *grupo abeliano*, o sea:

- $(\psi + \phi) + \varphi = \psi + (\phi + \varphi)$.
- $\psi + \phi = \phi + \psi$.
- Existe un elemento 0 de $L^2(\mathbb{R})^A$ tal que $0 + \psi = \psi$.
- Para todo ψ de $L^2(\mathbb{R})^A$ existe otro elemento ϕ de M tal que $\psi + \phi = 0$. La notación usual de ϕ es $-\psi$.

Se tiene un producto $\bullet\colon L^\infty(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{R})^A \to L^2(\mathbb{R})^A$ compatible con el producto del álgebra $L^\infty(\mathbb{T})$, o sea:

- $\left(1_{L^\infty(\mathbb{T})} \bullet \psi\right) = \psi$ en donde $1_{L^\infty(\mathbb{T})}$ es la unidad de $L^\infty(\mathbb{T})$.
- $(m \bullet (n \bullet \psi)) = (mn) \bullet \psi$.

El producto $\bullet$ es lineal en ambas variables:

- $((m+n) \bullet \psi) = m \bullet \psi + n \bullet \psi$.
- $(m \bullet (\psi + \phi)) = m \bullet \psi + m \bullet \phi$.

Se tiene un producto interno $\{\ ,\ \} : L^2(\mathbb{R})^A \times L^2(\mathbb{R})^A \to L^\infty(\mathbb{T})$ que es sesquilineal:

- $\{\psi + \phi, \varphi\} = \{\psi, \varphi\} + \{\phi, \varphi\}$.
- $\{m \bullet \psi, \phi\} = m\{\psi, \phi\}$ para todo m en $L^\infty(\mathbb{T})$.
- $\{\psi, \phi\} = \overline{\{\phi, \psi\}}$.
- $\{\psi, \psi\} \geqslant 0$ y $\{\psi, \psi\} = 0$ si y sólo si $\psi = 0$.

Además:

- $L^2(\mathbb{R})^A$ es completo con la norma $\|\ \|_*$.

Estas propiedades dicen que $L^2(\mathbb{R})^A$ es un módulo de Hilbert sobre $L^\infty(\mathbb{T})$. La mayoría puede verificarse en forma directa reemplazando en cada caso por las respectivas definiciones. Más adelante en la Subsección 10.1.2 las demostraremos en general.

Nota 2.1. Si en estas propiedades hacemos los siguientes reemplazos

- $\{\ ,\ \} \to \langle\ ,\ \rangle$
- $\bullet \to .$
- $1_{L^\infty(\mathbb{T})} \to 1$
- $L^2(\mathbb{R})^A \to \mathcal{H}$
- $L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$
- $\|\ \|_* \to \|\ \|$

obtenemos las propiedades de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, con la notación usual.

En nuestro caso, como $L^\infty(\mathbb{T})$ es un anillo y no es un cuerpo como $\mathbb{C}$, nos queda que es un "módulo" en vez de un "espacio vectorial". Para definir un módulo de Hilbert, se pide más que un anillo. Se necesita utilizar una C^*-álgebra, que es un álgebra que tiene una norma y una conjugación adecuadas. La definición completa de estas estructuras está en el Apéndice A.

La práctica usual para manejar módulos de Hilbert es utilizar los mismos símbolos que para espacios de Hilbert. Nuestro problema es que estamos interesados en averiguar las propiedades de los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$, que es un espacio de Hilbert, y para ello los analizamos a través de las propiedades de los subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})^A$, que es un módulo de Hilbert. Así que tenemos dos productos escalares, uno que da un número complejo en $\mathbb{C}$ y el otro da una función acotada en $L^\infty(\mathbb{T})$. Algo análogo pasa con el producto por escalares y con la norma. Para evitar confusiones entre las operaciones asociadas a cada estructura, nos pareció mejor reservar la notación usual para $L^2(\mathbb{R})$ y denotar las otras operaciones con símbolos ligeramente deformados.

Un enfoque similar a este se puede encontrar en [Wil02], en donde se estudian primero las propiedades algebraicas del producto en frecuencias y multiplicador, para después aplicarlas a la reconstrucción de varios resultados de espacios invariantes por traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$ y onditas.

2.3.1. Bases ortonormales

Queremos caracterizar los conjunto de funciones $\{f_1, \ldots, f_r, \ldots\}$ en $L^2(\mathbb{R})$ tales que el conjunto $E(\{f_1, \ldots, f_r, \ldots\})$ de las traslaciones de las f_i es una base ortonormal de $S(\{f_1, \ldots, f_r, \ldots\})$ el espacio invariante por traslaciones generado por $\{f_1, \ldots, f_r, \ldots\}$. El caso finito es análogo.

La condición de ortonormalidad entre las traslaciones es

$$\left\langle E^b f_i, E^c f_j \right\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad b = c \text{ y } i = j \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} .$$

Como E es unitario es equivalente a pedir que

$$\langle f_i, E^a f_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad a = 0 \text{ y } i = j \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases} .$$

Usando la ecuación la Ecuación (2.3) que dice que

$$\{f_i, f_j\}(\omega) = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \langle f_i, E^a f_j \rangle \, \mathrm{e}^{2\pi i a \omega}$$

esto es lo mismo que pedir que

$$\{f_i, f_j\}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases},$$

en donde, por un abuso de notación, llamamos 1 a la función constante 1 sobre el toro $\mathbb{T}$.

Al hacer los reemplazos indicados en la Nota 2.1, obtenemos justamente

$$\langle f_i, f_j\rangle(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases},$$

que es la caracterización de una base ortonormal en un espacio vectorial. En donde ahora el 1 es el número 1.

Con esto vemos que el producto en frecuencias sirve para caracterizar de manera clara los conjuntos cuyas traslaciones forman una base ortonormal de traslaciones. Además vemos que la caracterización es análoga a la de las bases ortonormales de los espacios de Hilbert.

2.3.2. Bases de Riesz

En general es difícil encontrar bases ortonormales de traslaciones de un espacio invariante por traslaciones. Por ello se recurre a nociones similares, que son más débiles.

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, decimos que una sucesión $\{v_a\}_{a\in\mathbb{Z}}$ de elementos de $\mathcal{H}$ es una *base de Riesz* de $\mathcal{H}$, si $\{v_a\}_{a\in\mathbb{Z}}$ es completo y existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|c\|_2^2 \leqslant \left\|\sum_{a\in\mathbb{Z}} c_a v_a\right\|_2^2 \leqslant B\|c\|_2^2 \tag{2.6}$$

para toda sucesión c de soporte finito.

Si $\mathcal{H}$ tiene dimensión finita, la definición es análoga, pero se debe utilizar un conjunto de índices finitos.

Nos interesa encontrar bases formadas por las traslaciones de una o algunas funciones de $L^2(\mathbb{R})$.

Queremos caracterizar los conjunto de funciones $\{f_1, \dots, f_r, \dots\}$ en $L^2(\mathbb{R})$ con la propiedad de que el conjunto $E(\{f_1, \dots, f_r, \dots\})$ es una base de Riesz de $S(\{f_1, \dots, f_r, \dots\})$ el espacio invariante por traslaciones generado por $\{f_1, \dots, f_r, \dots\}$. O sea que existen constantes $0 < A \leqslant B$ tales que

$$A\sum_{i\in\mathbb{N}} \left\|c^i\right\|_2^2 \leqslant \left\|\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^i E^k f_i\right\|_2^2 \leqslant B\sum_{i\in\mathbb{N}} \left\|c^i\right\|_2^2$$

para toda elección de $\{c^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ formada por sucesiones que en total tienen una cantidad finita de términos.

Vamos a reescribir el termino central, llamando $\check{c} = (\check{c}^1, \dots, \check{c}^r, \dots)$

$$\left\|\sum_{i\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^i E^k f_i\right\|_2^2 = \left\|\sum_{i\in\mathbb{N}} \check{c}^i \bullet f_i\right\|_2^2 = \left\|\check{C}\bullet F\right\|_2^2$$
$$= \int_{\mathbb{T}} \left\{\check{C}\bullet F, \check{C}\bullet F\right\} \mathrm{d}\,\omega = \int_{\mathbb{T}} \check{C}\,\langle F, F\rangle\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega.$$

Análogamente, para los extremos tenemos que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left\|c^i\right\|_2^2 = \sum_{i\in\mathbb{N}} \left\|\check{c}^i\right\|_2^2 = \left\|\check{C}\right\|_2^2 = \int_{\mathbb{T}} \check{C}\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega = \int_{\mathbb{T}} \check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega.$$

De esta manera, la definición de base de Riesz se puede escribir equivalentemente como

$$A\int_{\mathbb{T}} \check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant \int_{\mathbb{T}} \check{C}\,\{F, F\}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant B\int_{\mathbb{T}} \check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega, \tag{2.7}$$

en donde $\check{C}$ tiene una cantidad finita de términos no nulos, que son polinomios trigonométricos.

Es fácil ver que si

$$A\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^* \leqslant \check{C}\,\{F, F\}\,\check{C}^* \leqslant B\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*$$

entonces se cumple la Ecuación (2.7). Veamos que en realidad son equivalentes.

Para todo polinomio trigonométrico $p\,(z)$, $\check{C}p\,(z)$ también es un polinomio trigonométrico así que tomando la sucesión de sus coeficientes

$$A\int_{\mathbb{T}} p\,(z)\,\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\overline{p\,(z)}\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant \int_{\mathbb{T}} p\,(z)\,\check{C}\,\{F, F\}\,\check{C}^*\overline{p\,(z)}\,\mathrm{d}\,\omega$$
$$\leqslant B\int_{\mathbb{T}} p\,(z)\,\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\overline{p\,(z)}\,\mathrm{d}\,\omega$$

y entonces

$$A\int_{\mathbb{T}} |p\,(z)|^2\,\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant \int_{\mathbb{T}} |p\,(z)|^2\,\check{C}\,\{F, F\}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega$$
$$\leqslant B\int_{\mathbb{T}} |p\,(z)|^2\,\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega$$

Como $\check{C}$ está formada por una cantidad finita de polinomios trigonométricos entonces la función $\check{C}(\omega)\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*(\omega)$ está acotada uniformemente, por una constante M. Por ello

$$B\int_{\mathbb{T}} |p(z)|^2\,\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant B\int_{\mathbb{T}} |p(z)|^2\,M\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant BM\left\||p(z)|^2\right\|_\infty$$

si tomamos el operador

$$m\circ z \to B\int_{\mathbb{T}} m\circ z\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega \tag{2.8}$$

es lineal y acotado sobre las funciones de la forma $|p(z)|^2$.

Veamos que estas funciones son densas en las funciones continuas positivas. Dada una función $m\circ z$ positiva, $\sqrt{m\circ z}$ también es positiva. Tenemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico que la aproxima

$$\left\|\sqrt{m\circ z} - p(z)\right\|_\infty < \varepsilon,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\|m\circ z - |p(z)|^2\right\|_\infty &= \left\|\left(\sqrt{m\circ z} - p(z)\right)\left(\sqrt{m\circ z} + p(z)\right)\right\|_\infty \\
&= \left\|\sqrt{m\circ z} - p(z)\right\|_\infty \left\|\sqrt{m\circ z} + p(z)\right\|_\infty \\
&\leqslant \varepsilon\left(\left\|\sqrt{m\circ z}\right\|_\infty + \|p(z)\|_\infty\right) \\
&\leqslant \varepsilon\left(\left\|\sqrt{m\circ z}\right\|_\infty + \left\|\sqrt{m\circ z}\right\|_\infty + \varepsilon\right).
\end{aligned}$$

Entonces por densidad, el operador definido en la Ecuación (2.8) se puede extender a las funciones continuas positivas y sigue siendo acotado.

Se puede hacer lo mismo con los otros dos términos y para las funciones continuas y positivas se sigue cumpliendo la desigualdad. Por el teorema de representación de Riesz, estos operadores son medidas, y la desigualdad se extiende a las medidas. En particular para todo conjunto Δ tenemos que

$$A\int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant \int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta\check{C}\{F,F\}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant B\int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*\,\mathrm{d}\,\omega.$$

Si la desigualdad

$$A\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^* \leqslant \check{C}\{F,F\}\,\check{C}^* \leqslant B\check{C}\,\mathrm{Id}\,\check{C}^*$$

no se cumple para casi todo punto, entonces tomando como Δ al conjunto donde alguna de ellas no se cumple llegamos a una contradicción.

Las sucesiones de soporte finito son densas en las sucesiones de $\ell^2(\mathbb{N} \times \mathbb{Z})$, así que la desigualdad anterior se puede extender a todas las sucesiones tales que

$$\left\|\check{C}\right\|_2^2 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left\|\check{c}^i\right\|_2^2 < \infty.$$

Así que podemos escribirla como una desigualdad de operadores

$$A \operatorname{Id} \leqslant \{F, F\}(\omega) \leqslant B \operatorname{Id}. \tag{2.9}$$

Así obtuvimos una caracterización de las bases de Riesz de traslaciones, que se escribe de manera sencilla utilizando el producto en frecuencias. En el caso en que $A = B = 1$ queda nuevamente la caracterización de las bases ortonormales de traslaciones.

2.3.3. Ortonormalización

Si se tiene una base finita o numerable de un espacio de Hilbert, se puede usar el algoritmo de Gram-Schmidt para encontrar una base ortonormal. Queremos hacer lo análogo en espacios invariantes por traslaciones.

A partir de una base de Riesz, formada por las traslaciones de una cantidad finita o numerable de funciones, queremos obtener una base ortonormal del espacio. Si aplicamos el algoritmo de Gram-Schmidt directamente la nueva base es ortonormal pero, casi con seguridad, no estará formada por las traslaciones de una cantidad finita o numerable de vectores. Esto se debe a que cada una de las traslaciones de una función original se ortonormalizan por separado, sin tener en cuenta las transformaciones aplicadas a las otras traslaciones de la misma función.

Para encontrar una base con las propiedades buscadas, vamos a basarnos en la analogía entre el producto en frecuencias y el producto interno y la analogía entre el multiplicador y el producto por escalares. Un algoritmo similar fue utilizado por Goodman, Lee y Tang en [GLT93], pero agregaban la condición adicional de que las funciones originales sean suaves. Además en la demostración sólo utilizaremos las propiedades de los módulos de Hilbert, así que cuando encontremos más ejemplos de estas estructuras la demostración se extenderá directamente, reemplazando $L^\infty(\mathbb{T})$ por $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ para poder considerar el caso multidimensional

A diferencia de los espacios vectoriales de dimensión finita, en los espacios de dimensión infinita es necesario considerar varios conceptos de bases. La condición de independencia lineal muchas veces no es suficiente. En este caso necesitaremos que la base original sea una base de Riesz que es una condición más fuerte que la independencia lineal.

Para poder utilizar la analogía entre espacios de Hilbert y módulos de Hilbert, vamos a restringirnos a funciones en $L^2(\mathbb{R})^A$ que son aquellas en que su producto en frecuencias está acotado.

Ahora podemos aplicar el análogo al proceso de Gram-Schmidt, para encontrar una base ortonormal, a partir de una base de Riesz. El algoritmo está copiado casi textualmente de libro de Kolmogorov [KF72], haciendo los inversos de los cambios indicados en la Nota 2.1. El único punto en donde se presenta una dificultad adicional es al reemplazar la condición de independencia lineal por la de base de Riesz. Discutiremos este punto con atención.

Al realizar la ortonormalización, para normalizar es necesario dividir por la norma de un vector. La independencia lineal asegura que este vector es no nulo y por ello la norma es distinta de cero. Al tratar de utilizarlo en los espacios invariantes por traslaciones, deberemos dividir por una función. Para poder dividir y que el inverso sea acotado, no alcanza con que sea distinta de cero. Ni siquiera alcanza con que sea distinta de cero en todo punto. Necesitaremos que esté acotada uniformemente por debajo. Para eso usaremos el siguiente Lema.

Lema 2.2. *Sea $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots)$ en $L^2(\mathbb{R})^A$ tal que sus traslaciones $E(\Phi)$ es una base de Riesz del subespacio que generan $S(\Phi)$, y sea $M = (m_1, m_2, \dots)^t$ un vector de funciones en $L^\infty(\mathbb{T})$, entonces*

$$\{M \bullet \Phi, M \bullet \Phi\}(\omega) \geqslant |M|^2(\omega)\, A,$$

en donde $|M|^2(\omega) = \sum_k |m_k(\omega)|^2$ y A es la constante inferior asociada a la base de Riesz $E(\Phi)$.

Demostración. Por la Ecuación (2.9) tenemos que $A \leqslant \{\Phi, \Phi\}$ para casi todo ω. Entonces

$$\begin{aligned}\{M \bullet \Phi, M \bullet \Phi\}(\omega) &= M(\omega)\,\{\Phi, \Phi\}(\omega)\, M^*(\omega)\\ &\geqslant A\,(MM^*)(\omega) = |M|^2(\omega)\, A.\end{aligned}$$

□

Para demostrar el teorema, utilizaremos la siguiente notación. Dada una sucesión de funciones $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r, \dots)^t$ definimos el subvector con los primeros r elementos $\Phi_r = (\phi_1, \dots, \phi_r)^t$.

Teorema 2.3 (Gram-Schmidt)**.** *Sea $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r, \dots)^t$ una sucesión de funciones en $L^2(\mathbb{R})^A$ tal que las traslaciones $E(\Phi)$ son una base de Riesz de $S(\Phi)$. Entonces podemos construir $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_r, \dots)^t$ una sucesión de elementos de $L^2(\mathbb{R})^A$ tal que las traslaciones $E(\Psi)$ es una base ortonormal* *de $S(\Phi)$. Es más, para cada número $r \in \mathbb{N}_0$ vale la igualdad de subespacios $S(\Phi_r) = S(\Psi_r)$ y existe una matriz de funciones $M_r \in (L^\infty(\mathbb{T}))^{r\times r}$ tal que $\Psi_r = M_r \bullet \Phi_r$.*

Demostración. Vamos a probarlo inductivamente. Para $r = 0$ no hay nada que probar.

Supongamos que vale para r y veamos que vale para $r+1$. La demostración tiene cuatro pasos:

Paso 1: Ortogonalización

Llamemos

$$\varphi_{r+1} = \phi_{r+1} - \sum_{k\leqslant r} \left\{\phi_{r+1}, \psi_k\right\} \bullet \psi_k = \phi_{r+1} - \left\{\phi_{r+1}, \Psi_r\right\} \bullet \Psi_r.$$

Las operaciones entre $L^2(\mathbb{R})^A$ y $L^\infty(\mathbb{T})$ siempre están definidas y son cerradas, como vimos en la Sección 2.3, entonces $\varphi_{r+1} \in L^2(\mathbb{R})^A$.

El nuevo vector es ortogonal a todos los otros en Ψ_r, porque si tomamos $l \leqslant r$

$$\begin{aligned}\left\{\varphi_{r+1}, \psi_l\right\} &= \left\{\phi_{r+1} - \sum_{k\leqslant r} \left\{\phi_{r+1}, \psi_k\right\} \bullet \psi_k, \psi_l\right\} \\ &= \left\{\phi_{r+1}, \psi_l\right\} - \sum_{k\leqslant r} \left\{\phi_{r+1}, \psi_k\right\} \left\{\psi_k, \psi_l\right\} \\ &= \left\{\phi_{r+1}, \psi_l\right\} - \sum_{k\leqslant r} \left\{\phi_{r+1}, \psi_k\right\} \delta_{k,l} = 0.\end{aligned}$$

Podemos reescribir a φ_{r+1} usando la matriz M_r de la hipótesis inductiva

$$\begin{aligned}\varphi_{r+1} &= \phi_{r+1} - \left\{\phi_{r+1}, \Psi_r\right\} \bullet (M_r \bullet \Phi_r) \\ &= 1 \bullet \phi_{r+1} - \left(\left\{\phi_{r+1}, \Psi_r\right\} M_r\right) \bullet \Phi_r.\end{aligned}$$

y usando ahora el Lema 2.2 con el vector Φ_{r+1}

$$\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\} \geqslant A\left(1^2 + \sum \left|\left\{\phi_{r+1}, \Psi_r\right\} M_r\right|^2\right) \geqslant A. \tag{2.10}$$

Paso 2: Normalización

Definamos ahora

$$\psi_{r+1} = \frac{1}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \bullet \varphi_{r+1}.$$

Por la Ecuación (2.10) la función $\left\{\phi_{r+1}, \phi_{r+1}\right\}$ está acotada inferiormente, así que $\frac{1}{\sqrt{\left\{\phi_{r+1}, \phi_{r+1}\right\}}}$ está en $L^\infty(\mathbb{T})$. Como las operaciones son cerradas está definido ψ_{r+1} que es una función en $L^2(\mathbb{R})^A$. Mallat en [Mal89] utilizó una cuenta similar para obtener una base ortonormal de traslaciones a partir de una base de Riesz de traslaciones, en el caso de una sola función generadora.

Veamos que el nuevo vector está normalizado y sus traslaciones son ortogonales

$$\begin{aligned}\left\{\psi_{r+1}, \psi_{r+1}\right\} &= \left\{\frac{1}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \bullet \varphi_{r+1}, \frac{1}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \bullet \varphi_{r+1}\right\} \\ &= \frac{1}{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}} \left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\} = 1.\end{aligned}$$

Y veamos que sigue siendo ortogonal a los anteriores, si $l \leqslant r$

$$\begin{aligned}\left\{\psi_{r+1}, \psi_l\right\} &= \left\{\frac{1}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \varphi_{r+1}, \psi_l\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \left\{\varphi_{r+1}, \psi_l\right\} = \frac{1}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} 0 = 0.\end{aligned}$$

Así que las traslaciones de Ψ_{r+1} forman una base ortonormal del subespacio que generan, o sea $S(\Psi_{r+1})$.

Paso 3: Igualdad de subespacios

Por la hipótesis inductiva, $S(\Psi_r)$ es igual a $S(\Phi_r)$, que está incluido en $S(\Phi_{r+1})$. Por construcción ψ_{r+1} está en $S(\Phi_{r+1})$, así que $S(\Psi_{r+1})$ está incluido en $S(\Phi_{r+1})$.

Veamos ahora la inclusión inversa. Invirtiendo los pasos que llevan de ϕ_{r+1} a ψ_{r+1} podemos escribir

$$\phi_{r+1} = \left\{\phi_{r+1}, \Psi_r\right\} \bullet \Psi_r + \sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}} \bullet \psi_{r+1}$$

y entonces ϕ_{r+1} está en $S(\Psi_{r+1})$. Por lo tanto $S(\Psi_{r+1})$ está incluido en $S(\Phi_{r+1})$ y ambos subespacios son iguales.

Paso 4: Nueva matriz

Componiendo los dos pasos que llevan de ψ_{r+1} a ϕ_{r+1} podemos escribir

$$\psi_{r+1} = \frac{1}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \bullet \phi_{r+1} - \frac{\left\{\phi_{r+1}, \Psi_k\right\}}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \bullet (M_r \bullet \Phi_r).$$

Como los coeficientes de M_r son funciones acotadas entonces por las propiedades descriptas en la Sección 2.3 las podemos reagrupar

$$\psi_{r+1} = \frac{1}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \bullet \phi_{r+1} - \frac{\left\{\phi_{r+1}, \Psi_k\right\} M_r}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \bullet \Phi_r.$$

De esta Ecuación podemos calcular también los coeficientes de la nueva fila de la matriz M_{r+1}, que en notación de bloques es

$$M_{r+1} = \begin{pmatrix} M_r & 0 \\ -\frac{\left\{\phi_{r+1}, \Psi_k\right\} M_r}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} & \frac{1}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \end{pmatrix}$$

□

2.4. Función dimensión constante

Vamos a ver como definir un análogo a dimensión para los espacios invariantes por traslaciones. Todos estos subespacios tienen dimensión infinita como espacios vectoriales, pero buscamos un concepto que permita contar la cantidad de vectores que se necesitan para generarlo, lo mejor posible. Primero veremos el caso más sencillo en que el espacio invariante por traslaciones tiene una base ortonormal de traslaciones y después en la Subsección 2.5.1 el caso general.

2.4.1. Teoremas de Robertson

Consideremos un espacio invariante por traslaciones S que tiene una base ortonormal formada por las traslaciones de una cantidad finita de funciones $f_1, \ldots, f_r$. La cantidad r de funciones originales es una propiedad muy importante del subespacio S. Vamos a ver que es un número que no depende de la elección de la base de traslaciones, así que está bien definido. Es más, comparte muchas de las propiedades de la dimensión de los espacios vectoriales de dimensión finita. A continuación vamos a demostrar estas similitudes.

Estos resultados fueron demostrados por Robertson en [Rob65], utilizando una notación muy diferente en el contexto de subespacios *errantes* (*wandering*). En los subespacios errantes se considera la acción de un operador unitario cualquiera. En nuestro caso ese operador es E, la traslación de largo 1. La demostración se basa en las propiedades de los espacios invariantes por traslaciones que aparecen en la Sección 2.3. Como los casos más generales cumplen las mismas propiedades, la demostración es idéntica y por ello la pospondremos hasta la Proposición 9.3.

Proposición 2.4 (Robertson)**.** *Sea* $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)^t$ *un vector de funciones en* $L^2(\mathbb{R})$ *tales que las traslaciones de* Φ *son una base ortonormal de* $S(\Phi)$ *y sea* $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_s)^t$ *un vector de funciones en* $L^2(\mathbb{R})$ *tales que las traslaciones de* Ψ *son una base ortonormal de* $S(\Psi)$*. Permitimos que* Φ *o* Ψ *sean sucesiones infinitas y en ese caso tomamos a* r *ó* s *como infinitos según corresponda. Entonces:*

1. *Si* $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ *y* $r = s < \infty$ *entonces* $S(\Phi) = S(\Psi)$*.*
2. *Si* $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ *entonces* $r \leqslant s$*.*
3. *Si* $S(\Phi) = S(\Psi)$ *entonces* $r = s$*.*
4. *Si* $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ *y* $s < \infty$ *entonces existe* $\tilde{\Phi} = \left\{\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_s\right\}$ *tal que* $\phi_k = \tilde{\phi}_k$ *para* $k \leqslant r$ *y además las traslaciones de* $\tilde{\Phi}$ *son una base ortonormal de* $S(\Psi)$*.*

La analogía con los espacios vectoriales es más evidente al llamar a la cantidad de generadores la dimensión del espacio invariante por traslaciones. En análisis funcional, a esta propiedad se la llama generalmente multiplicidad.

Definición 2.5. Sea S un espacio invariante por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$ tal que existe un vector $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)^t$ de funciones tal que las traslaciones de Φ son una base ortonormal de S, entonces definimos

$$\dim_E(S) = r,$$

en donde el subíndice indica que estamos considerando en los cálculos al operador de traslación E. La misma definición se aplica al caso en que Φ es una sucesión infinita y en ese caso

$$\dim_E(S) = \infty.$$

Por la Proposición 2.4 está noción de dimensión esta definida de manera única, aun en el caso en que sea infinita. Sin embargo, como veremos más adelante en los ejemplos en la Sección 3.2, no todo espacio invariante por traslaciones tiene una base ortonormal de traslaciones. Así que esta dimensión no está definida para todo espacio invariante por traslaciones. En la próxima Sección veremos como solucionar esta dificultad.

Por el Teorema 2.3 esta definición se extiende directamente a los espacios que tienen una base de Riesz de este tipo. Salvo para el subespacio trivial (formado sólo por la función constante 0), todos los espacios invariantes por traslaciones tienen dimensión infinita. Por ello esta nueva propiedad nos ayuda a clasificarlos mejor.

Con esta notación reescribimos la Proposición 2.4:

Proposición 2.6. *Si S y T son dos espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$ tales que tienen definidas* $\dim_E(S)$ *y* $\dim_E(T)$*, entonces*

1. *Si $S \subset T$ y $\dim_E(S) = \dim_E(T) < \infty$ entonces $S = T$.*
2. *Si $S \subset T$ entonces $\dim_E(S) \leqslant \dim_E(T)$.*
3. *Si $S = T$ entonces $\dim_E(S) = \dim_E(T)$ (buena definición).*
4. *Si $S \subset T$ y $\dim_E(T) < \infty$, entonces está definida $\dim_E(T \ominus S)$ y además $\dim_E(T \ominus S) = \dim_E(T) - \dim_E(S)$.*

En donde $T \ominus S$ es el complemento ortogonal de S adentro de T. Es importante recalcar que la última propiedad vale solamente cuando el mayor de los espacios invariantes por traslaciones tiene dimensión$_E$ finita. Si la función dimensión$_E$ de T es infinita, se tiene que existe un espacio invariante por traslaciones U tal que $S \oplus U = T$ pero no siempre tiene definida una función dimensión de este tipo. Construiremos un ejemplo más adelante en la Sección 3.4.

2.5. Marcos

Como veremos en la Sección 3.4 no todo espacio invariante por traslaciones tiene una base ortonormal de traslaciones y ni siquiera una base de Riesz. Para obtener una descomposición del espacio invariante por traslaciones es necesario utilizar sistemas con propiedades más débiles, por ejemplo buscar conjuntos F cuyas traslaciones sean un marco.

Decimos que $\{v_a\}$ es un *marco* (*frame*) de $\mathcal{H}$, si existen constantes $0 < A \leqslant B$ tales que

$$A \|w\|^2 \leqslant \sum_a |\langle w, v_a \rangle|^2 \leqslant B \|w\|^2 \tag{2.11}$$

para todo elemento w en $\mathcal{H}$. En particular interesan los *marcos de Parseval* en los que las constantes $A = B = 1$, así que se tiene que

$$\|w\|^2 = \sum_a |\langle w, v_a \rangle|^2 ,$$

que usando polarización se puede reescribir como

$$w = \sum_a \langle w, v_a \rangle v_a$$

para todo elemento w en $\mathcal{H}$, en el sentido débil.

Es importante destacar que a pesar de las similitudes de estos sistemas con las bases ortonormales, la escritura no es única y la norma de los elementos $\{v_a\}$ en general no es 1. Es más, al tomar dos marcos del mismo espacio $\mathcal{H}$, la cantidad de elementos en cada uno de ellos puede ser distinta.

Nosotros buscaremos los marcos formados por traslaciones. Es más, nos concentraremos en los marcos formados por las traslaciones de una sucesión quasi-ortonormal decreciente. Decimos que una sucesión de funciones $F = (f_1, f_2, \ldots, f_r, \ldots)^t$ (quizás finito) es *diagonal* si $\{f_i, f_j\} = 0$ para todo $i \neq j$.

Decimos que F es *quasi-ortonormal* si es diagonal y además $\{f_i, f_i\} = \chi_{A_i}$ en donde A_i es un conjunto en el toro $\mathbb{T}$. Decimos que F es *quasi-ortonormal decreciente* si además $\{f_i, f_i\} \geqslant \{f_{i+1}, f_{i+1}\}$.

Dada una sucesión $F = (f_1 f_2, \ldots, f_r, \ldots)^t$ (quizás finita) quasi-ortonormal y un elemento g de $S(\Psi)$, veremos en el Corolario 10.11 que

$$g = \{g, F\} \bullet F.$$

De ello podremos calcular

$$\{g, g\} = \{g, \{g, F\} \bullet F\} = \{g, F\} \{g, F\}^*,$$

y en particular

$$\begin{aligned}
\langle g, g \rangle &= \{g, g\}^\wedge (0) = \{g, F\}^\wedge * \{g, F\}^{*\wedge} (\mathbf{0}) \\
&= \sum_{a \in \mathbb{Z}} \{g, F\}^\wedge (a) \{F, g\}^\wedge (-a) \\
&= \sum_{a \in \mathbb{Z}} \langle g, E^a F \rangle \left\langle F, E^{-a} g \right\rangle = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \langle g, E^a F \rangle \langle E^a F, g \rangle \\
&= \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sum_r \langle g, E^a f_r \rangle \langle E^a f_r g \rangle = \sum_{a \in \mathbb{Z}} \sum_r |\langle g, E^a f_r \rangle|^2 .
\end{aligned}$$

Así que $E(F) = \{E^a f_r / a \in \mathbb{Z}, r\}$ es un marco de Parseval del subespacio invariante por traslaciones que generan $S(F)$.

Bownik probó en [Bow00] que dado un espacio invariante por traslaciones S en $L^2(\mathbb{R}^d)$, existe un conjunto F cuyas traslaciones son un marco quasi-ortonormal decreciente de S. Nosotros extenderemos este resultado en el Teorema 10.14, aunque aparecerán ciertos problemas técnicos en los casos en que el producto en frecuencias sea una medida.

2.5.1. Función dimensión

Para poder extender la idea de dimensión a todos los espacios invariantes por traslaciones, resulta necesario considerar que esta función en vez de tomar valores numéricos, tome valores en las funciones sobre el toro $\mathbb{T}$. Esto es similar a lo que pasa con el resultado del producto en frecuencias y el producto escalar, que en vez de ser números son funciones sobre el toro.

Bownik en [Bow00] define para cada espacio invariante por traslaciones S de $L^2(\mathbb{R}^n)$ una noción de dimensión local, o sea una función $\dim_E(S)(\omega)$ definida para cada punto ω del toro $\mathbb{T}^n$. Al considerar el caso unidimensional, obtenemos una dimensión definida en el toro $\mathbb{T}$.

Definición 2.7. Dado una sucesión de funciones $F = (f_1, \dots, f_r, \dots)$ quasi-ortonormal decreciente la dimensión del espacio invariante por traslaciones $S = S(F)$ generado por F como

$$\dim_E(S)(\omega) = \operatorname{rango}(\{F, F\}(\omega))$$

para cada punto ω en el toro $\mathbb{T}$.

La misma definición se aplica cuando F es finito. Todo espacio invariante por traslaciones S en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, tiene una sucesión F quasi-ortonormal decreciente tal que $S = S(F)$, así que esta dimensión está definida para todo S.

Veremos más adelante en la Proposición 10.16 que si G es otro vector o sucesión quasi-ortonormal decreciente tal que $S = S(F) = S(G)$ entonces

$$\operatorname{rango}(\{G, G\}(\omega)) = \operatorname{rango}(\{F, F\}(\omega))$$

y por lo tanto la función $\dim_E(S)(\omega)$ está bien definida y depende solamente del subespacio y no de los generadores elegidos.

El caso más sencillo corresponde a los espacios invariantes por traslaciones que tienen una base ortonormal generada por un vector o sucesión F. En ese caso $\{F, F\}$ es la identidad para cada valor de ω y por lo tanto

$$\dim_E(S)(\omega) = \operatorname{card}(F) \text{ (constante).}$$

Por lo visto anteriormente en el Teorema 2.3, pasa lo mismo para una base de Riesz. Los casos en que no existía la dimensión con la Definición 2.5 corresponden a funciones dimensión no constantes.

Podemos extender las propiedades de la Subsección anterior a esta función dimensión. La demostración está más adelante en la Proposición 10.16.

Proposición 2.8. *Sean S y T dos espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$ entonces*

1. *Si* $S \subset T$ *y* $\dim_E(S)(\omega) = \dim_E(T)(\omega) < \infty$ *(p. p.* ω*) entonces* $S = T$.

2. *Si* $S \subset T$ *entonces* $\dim_E(S)(\omega) \leqslant \dim_E(T)(\omega)$.

3. *Si* $S = T$ *entonces* $\dim_E(S)(\omega) = \dim_E(T)(\omega)$ *(buena definición).*

4. *Si* $S \subset T$ *entonces* $\dim_E(T \ominus S)(\omega) = \dim_E(T)(\omega) - \dim_E(S)(\omega)$.

Otra propiedad relacionada con la función dimensión es el largo. El *largo* del espacio invariante por traslaciones S es la mínima cantidad de funciones necesarias para generar S. Si todos los conjuntos generadores son infinitos, el largo será infinito. También se puede definir como

$$\mathrm{largo}_E(S) = \sup\mathrm{ess}\,(\dim_E(S)).$$

2.5.2. Espectro

Además se definen dos nociones de espectro de un espacio invariante por traslaciones S.

Siguiendo las definiciones de [Bow00] y [BDR94a] se define el espectro

$$\tilde{\sigma}_E(S) = \{\omega \in \mathbb{T} / \dim_E(S)(\omega) \neq 0\},$$

en donde el subíndice indica que estamos considerando el operador de traslación E. Los trabajos citados utilizan para este objeto la notación $\sigma(S)$. Preferimos utilizar otra notación ya que es importante compararlo con el espectro de las traslaciones restringido al subespacio bajo estudio, que definimos como

$$\sigma_E(S) = \sigma\left(E|_S\right).$$

En nuestros análisis el operador E estará fijo y por ello es útil pensarlo como una propiedad del subespacio, más que una propiedad del operador.

El segundo espectro es justamente el espectro de un operador unitario restringido a un subespacio, así que está incluido en el círculo de los complejos de radio 1. Para poder relacionar ambos espectros, debemos utilizar la representación del toro $\mathbb{T}$ como el círculo de los complejos de radio 1 en vez del intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Para ser más precisos vamos a comparar $z(\tilde{\sigma}_E(S))$ con $\sigma_E(S)$.

Una diferencia importante es que el primero es un conjunto medible, y en realidad está definido salvo un conjunto de medida 0. En cambio el segundo es un conjunto cerrado. Vamos a ver como se relacionan y ejemplos en donde son iguales en el Capítulo 6 y en donde son distintos en el Capítulo 13.

El análogo al espectro en los espacios vectoriales no es muy interesante y por ello no tiene nombre. Corresponde a un conjunto vacío cuando es el subespacio $\{0\}$ y cuando es otro subespacio corresponde a un conjunto con un punto $\{\omega = 0\}$ ó $\{z = 1\}$, según la representación usada.

Capítulo 3

Espacios de banda limitada

Para aclarar algunos de los conceptos y ver ejemplos y contraejemplos utilizaremos los espacios invariantes por traslaciones de banda limitada. Dada una frecuencia máxima $\Omega \geqslant 0$ en $\mathbb{R}$, consideramos el espacio de todas las funciones cuya transformada de Fourier se anula afuera del intervalo $[-\Omega, \Omega]$,

$$S = L^2 \widehat{([-\Omega, \Omega])} = \left\{ f \in L^2 (\mathbb{R}) \, / \, \mathrm{sop} \, \hat{f} \subset [-\Omega, \Omega] \right\}.$$

Estas funciones no tienen frecuencias altas y por ello son suaves. Por ejemplo al transmitir señales eléctricas a través de cables pierden las frecuencias altas y las señales que se reciben son de este tipo.

Más en general se puede hacer el mismo análisis sobre el subespacio de las funciones cuya transformada de Fourier tiene el soporte en un compacto fijo K. En las trasmisiones radiales, a cada emisora se le asigna un rango de frecuencias para que transmita ("banda"), de manera que su señal no se superponga con las otras emisoras.

3.1. Banda $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

El caso más sencillo corresponde a $\Omega = \frac{1}{2}$. En ese caso tenemos que una base ortonormal de $L^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$ está formada por las funciones

$$g_a (\omega) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \omega a} \chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]} (\omega) ,$$

con $a \in \mathbb{Z}$.

Como la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico, al transformar obtenemos una base ortonormal de $L^2 \widehat{\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)}$ compuesta por las funciones

$$f_a (x) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \cdot a} \widehat{\chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}} (x) = E^a \frac{\sin (\pi x)}{\pi x} = \frac{\sin (\pi (x-a))}{\pi (x-a)}.$$

O sea que el conjunto de las traslaciones de

$$f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

forma una base ortonormal del subespacio $S = L^2\left(\widehat{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\right)$.

Como es una base ortonormal de traslaciones entonces $\{f,f\} = 1$. También se puede verificar esta igualdad en forma directa. Así que la dimensión la podemos calcular como

$$\dim_E(S)(\omega) = \text{rango}(\{f,f\}(\omega)) = \text{rango}(1)(\omega) = 1.$$

Entonces la función dimensión es 1 en todos los puntos del toro $\mathbb{T}$. Por ello $\tilde{\sigma}_E(S) = \mathbb{T}$ y como veremos más adelante en la Subsección 10.7.4 $\sigma_E(S) = \mathbb{T}$.

3.2. Bandas más angostas ($\Omega < \frac{1}{2}$)

También podemos analizar qué pasa si tomamos $0 < \Omega < \frac{1}{2}$. En ese caso tenemos que $L^2([-\Omega,\Omega]) \subset L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$ así que cualquier función de $L^2([-\Omega,\Omega])$ se puede escribir usando la base ortonormal de $L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\right)$ que es

$$g_a(\omega) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(\omega)$$

Dada una función h en $L^2([-\Omega,\Omega])$ tenemos que $h = h\chi_{[-\Omega,\Omega]}$ y por ello

$$\begin{aligned}\langle h, g_a\rangle &= \int_{\mathbb{R}} h(\omega)\overline{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(\omega)}\,\mathrm{d}\,\omega = \int_{\mathbb{R}} h(\omega)\chi_{[-\Omega,\Omega]}\overline{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(\omega)}\,\mathrm{d}\,\omega\\ &= \int_{\mathbb{R}} h(\omega)\overline{\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\chi_{[-\Omega,\Omega]}(\omega)}\,\mathrm{d}\,\omega = \langle h, \tilde{g}_a\rangle\end{aligned}$$

en donde tomamos

$$\tilde{g}_a(\omega) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\chi_{[-\Omega,\Omega]}(\omega).$$

De la misma manera como las funciones g_a forman una base ortonormal entonces

$$\begin{aligned}h &= \chi_{[-\Omega,\Omega]}h = \chi_{[-\Omega,\Omega]}\sum_{a\in\mathbb{Z}}\langle h, g_a\rangle g_a = \chi_{[-\Omega,\Omega]}\sum_{a\in\mathbb{Z}}\langle h, g_a\rangle \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}(\omega)\\ &= \sum_{a\in\mathbb{Z}}\langle h, g_a\rangle \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\chi_{[-\Omega,\Omega]}(\omega) = \sum_{a\in\mathbb{Z}}\langle h, g_a\rangle \tilde{g}_a = \sum_{a\in\mathbb{Z}}\langle h, \tilde{g}_a\rangle \tilde{g}_a\end{aligned}$$

de manera que

$$h = \sum_{a\in\mathbb{Z}}\langle h, \tilde{g}_a\rangle \tilde{g}_a \tag{3.1}$$

y por lo tanto las funciones $\tilde{g}_a$ generan $L^2\left([-\Omega,\Omega]\right)$.

Tomando la transformada de Fourier, se obtiene que $L^2\widehat{\left([-\Omega,\Omega]\right)}$ está generado por las funciones

$$\tilde{f}_a(x) = \widehat{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\cdot a}\chi_{[-\Omega,\Omega]}}(x) = E^a\frac{\sin(2\pi\Omega x)}{\pi\Omega x} = \frac{\sin(2\pi\Omega(x-a))}{\pi\Omega(x-a)}.$$

O sea que el conjunto de las traslaciones de

$$\tilde{f}(x) = \widehat{\chi_{[-\Omega,\Omega]}}(x) = \frac{\sin(2\pi\Omega x)}{\pi\Omega x} \tag{3.2}$$

generan el subespacio $S = L^2\widehat{\left([-\Omega,\Omega]\right)}$.

El producto en frecuencias es

$$\left\{\tilde{f},\tilde{f}\right\} = \sum_k \left|\chi_{[-\Omega,\Omega]}(\omega-k)\right|^2 = \chi_{[-\Omega,\Omega]}$$

porque la función característica $\chi_{[-\Omega,\Omega]}$ se anula afuera del intervalo $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

En este caso, la dimensión la podemos calcular como

$$\begin{aligned}\dim_E(S)(\omega) &= \operatorname{rango}\left(\left\{\tilde{f},\tilde{f}\right\}\right)(\omega)\\ &= \operatorname{rango}\left(\chi_{[-\Omega,\Omega]}(\omega)\right) = \chi_{[-\Omega,\Omega]}(\omega).\end{aligned}$$

Así que la función dimensión es 1 en $[-\Omega,\Omega]$ y 0 afuera. Esta cuenta es sencilla porque Ω es menor que $\frac{1}{2}$.

Entonces $\tilde{\sigma}_E(S) = [-\Omega,\Omega]$ y como veremos más adelante en la Subsección 10.7.4 $\sigma_E(S) = z([-\Omega,\Omega])$, o sea el arco circular que va desde $\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\Omega}$ hasta $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\Omega}$.

Como la función dimensión no es constante, tenemos que los espacios $L^2\widehat{\left([-\Omega,\Omega]\right)}$ con $0 < \Omega < \frac{1}{2}$ no tienen ninguna base ortonormal de traslaciones. Utilizando la transformada de Fourier en la Ecuación (3.1) tenemos que

$$\hat{h} = \sum_{a\in\mathbb{Z}}\left\langle \hat{h},\widehat{\tilde{g}_a}\right\rangle \widehat{\tilde{g}_a} = \sum_{a\in\mathbb{Z}}\left\langle \hat{h},E^a\tilde{f}\right\rangle E^a\tilde{f}$$

de manera que las traslaciones de $\tilde{f}$ forman un marco de Parseval. Es más, como el producto en frecuencias es una función característica, $\tilde{f}$ es un generador quasi-ortonormal.

Más aún, como transformada de Fourier es una isometría, la norma de $\tilde{f}$ es igual a la de $\tilde{g}_0$. Así que

$$\left\|\tilde{f}\right\|_2^2 = \left\|\tilde{g}_0\right\|_2^2 = \left\|\chi_{[-\Omega,\Omega]}\right\|_2^2 = 2\Omega,$$

y por ello $0 < \left\|\tilde{f}\right\|_2 < 1$.

3.3. Banda más ancha ($\Omega = \frac{3}{2}$)

Cuando Ω es mayor que $\frac{1}{2}$ las cuentas son similares, pero hay más detalles para tener en cuenta. Para facilitar las demostraciones sólo vamos a considerar el caso especial en que $\Omega = \frac{3}{2}$.

Al intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ lo podemos descomponer en tres intervalos disjuntos de longitud 1

$$\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right] = \left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right],$$

así que podemos descomponer a

$$L^2\left(\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = L^2\left(\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]\right) \oplus L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \oplus L^2\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right).$$

Por ello tenemos una base ortonormal de $L^2\left(\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)$ que está formada por tres familias de funciones

$$\begin{aligned} g_a^-(\omega) &= \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\,\chi_{\left[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right]}(\omega) \\ g_a^0(\omega) &= \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\,\chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(\omega) \\ g_a^+(\omega) &= \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\,\chi_{\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]}(\omega). \end{aligned}$$

Al usar la transformada de Fourier, se obtiene que $S = \widehat{L^2\left(\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)}$ está generado por las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{f}^-(x) &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x} \\ \tilde{f}^0(x) &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \\ \tilde{f}^+(x) &= \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x}. \end{aligned}$$

Así que tomamos como generadores a $F = \left(\tilde{f}^-, \tilde{f}^0, \tilde{f}^+\right)$. Como las traslaciones forman bases ortonormales entonces podemos calcular la función dimensión como

$$\dim_E(S)(\omega) = \operatorname{rango}(\{F, F\})(\omega) = \operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3,$$

por lo que la función dimensión vale 3 en todo el toro $\mathbb{T}$. Entonces los espectros valen $\sigma_E(S) = \mathbb{T}$ y como veremos más adelante en la Subsección 10.7.4 $\tilde{\sigma}_E(S) = \mathbb{T}$.

3.4. Complemento ortogonal

Finalmente veamos un ejemplo que no es de banda limitada, sino que es el complemento ortogonal de un espacio de banda limitada. Nos será útil como ejemplo para ver que varios resultados no se pueden extender.

Considerando un $0 < \Omega < \frac{1}{2}$, tomemos el espacio de las funciones con soporte afuera de $[-\Omega, \Omega]$:

$$L^2 (\mathbb{R} \setminus [-\Omega, \Omega]) = L^2 (\mathbb{R}) \ominus L^2 ([-\Omega, \Omega]) .$$

Primero descomponemos a $\mathbb{R}$ en intervalos de longitud 1 tomando

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right] = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (C_k \cup D_k) ,$$

donde

$$\begin{aligned} C_k &= [k - \Omega, k + \Omega] \\ D_k &= \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right] \setminus [k - \Omega, k + \Omega] . \end{aligned}$$

Es importante notar que todos estos conjuntos son disjuntos, salvo por conjuntos de medida cero.

Una posible descomposición de $\mathbb{R} \setminus [-\Omega, \Omega]$ usando estos conjuntos es

$$\mathbb{R} \setminus [-\Omega, \Omega] = D_0 \cup \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} (C_k \cup D_k) .$$

Vamos a considerar otra descomposición combinando los conjuntos C_{k+1} con D_k para $k \geqslant 0$. La nueva descomposición es

$$\mathbb{R} \setminus [-\Omega, \Omega] = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k < 0}} (C_k \cup D_k) \cup \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \geqslant 0}} (C_{k+1} \cup D_k) ,$$

que produce una descomposición de $L^2 (\mathbb{R} \setminus [-\Omega, \Omega])$

$$L^2 (\mathbb{R} \setminus [-\Omega, \Omega]) = \bigoplus_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k < 0}} L^2 (C_k \cup D_k) \oplus \bigoplus_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \geqslant 0}} L^2 (C_{k+1} \cup D_k) .$$

En el espacio $L^2 (C_0 \cup D_0) = L^2 \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)$ ya sabemos que las funciones

$$g^a = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} x a} \chi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]}$$

forman una base ortonormal. Veamos qué pasa en $L^2(C_1 \cup D_0)$.

Dada una función h en $L^2(C_0 \cup D_0)$ definimos una nueva función $\tau(h)$ en $L^2(C_1 \cup D_0)$ como

$$\tau(h) = E^1\left(h\chi_{C_0}\right) + h\chi_{D_0}.$$

Este es un isomorfismo y además es isométrico porque

$$\begin{aligned}
\|\tau(h)\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} \left|E^1\left(h\chi_{C_0}\right) + h\chi_{D_0}\right|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} \left|E^1\left(h\chi_{C_0}\right)\right|^2 + \left|h\chi_{D_0}\right|^2 d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|h\chi_{C_0}\right|^2 + \left|h\chi_{D_0}\right|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} \left|h\chi_{C_0} + h\chi_{D_0}\right|^2 d\omega \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left|h\chi_{C_0\cup D_0}\right|^2 d\omega = \|h\|_2^2,
\end{aligned}$$

y la inversa es

$$\tau^{-1}(h) = E^{-1}\left(h\chi_{C_1}\right) + h\chi_{D_0}.$$

Por ello tomando la imagen por τ de la base ortonormal de $L^2(C_0 \cup D_0)$ obtenemos una base ortonormal de $L^2(C_1 \cup D_0)$. La base ortonormal es entonces

$$\begin{aligned}
\tau(g^n) &= \tau\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xn}\,\chi_{D_0\cup C_0}\right) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xn}\,\chi_{D_0} + E^1\left(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xn}\,\chi_{C_0}\right) \\
&= \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xn}\,\chi_{D_0} + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(x-1)n}\,\chi_{C_1} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xn}\,\chi_{D_0} + \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xn}\,\chi_{C_1}\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}1n} \\
&= \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xn}\left(\chi_{D_0} + \chi_{C_1}\right) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xn}\,\chi_{D_0\cup C_1}.
\end{aligned}$$

Como la transformada de Fourier es un isomorfismo isométrio tenemos que

$$S = L^2\left(\widehat{\mathbb{R}\setminus[-\Omega,\Omega]}\right) = \bigoplus_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k<0}} L^2\left(\widehat{C_k \cup D_k}\right) \oplus \bigoplus_{\substack{k\in\mathbb{Z}\\ k\geqslant 0}} L^2\left(\widehat{C_{k+1} \cup D_k}\right).$$

Al igual que en el caso anterior, para los subespacios

$$L^2\left(\widehat{C_k \cup D_k}\right) = L^2\left(\widehat{\left[k-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}\right]}\right)$$

tenemos una base ortonormal formada por las traslaciones de

$$g_k = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xk}\,\widehat{\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xk}\,\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}.$$

Para el subespacio $L^2\left(\widehat{C_1 \cup D_0}\right)$ tomamos las funciones

$$\widehat{g^a} = \widehat{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}xa}\,\chi_{D_0\cup C_1}} = E^a\widehat{\chi_{D_0\cup C_1}},$$

Por lo que las traslaciones de $\breve{g}_0 = \widehat{g^a}$ forman una base ortonormal de $L^2\left(\widehat{C_1 \cup D_0}\right)$

Similarmente, para el subespacio $L^2\left(\widehat{C_{k+1} \cup D_k}\right)$ con $k > 0$ tomamos como generador de la base ortonormal a

$$\breve{g}_k = \widehat{\chi_{C_{k+1}\cup D_k}} = e^{2\pi i x k}\, \widehat{\chi_{C_1\cup D_0}}.$$

Así que este espacio también tiene una base ortonormal de traslaciones que es infinita. Por ello $\dim_E(S)(\omega) = \infty$. El espectro entonces será $\tilde{\sigma}_E(S) = \mathbb{T}$ y como veremos más adelante en la Subsección 10.7.4 $\sigma_E(S) = z(\mathbb{T})$, o sea todo el círculo de radio 1.

3.4.1. Construcción de contraejemplos

De la misma manera que en el caso anterior, tenemos que podemos descomponer a toda la recta $\mathbb{R}$ como

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]$$

y por ello las traslaciones de las funciones

$$g_k = e^{2\pi i x k}\, \widehat{\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}} = e^{2\pi i x k}\, \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}, \tag{3.3}$$

con α entero, forman una base ortonormal. Así que $\dim_E\left(L^2(\mathbb{R})\right)(\omega) = \infty$. El espectro entonces será $\tilde{\sigma}_E\left(L^2(\mathbb{R})\right) = \mathbb{T}$ y como veremos más adelante en la Subsección 10.7.4 $\sigma_E\left(L^2(\mathbb{R})\right) = z(\mathbb{T})$, o sea todo el círculo de radio 1.

Ahora tenemos dos espacios invariantes por traslaciones $T = L^2(\mathbb{R})$ y $S = L^2\left(\widehat{\mathbb{R}\setminus[-\Omega, \Omega]}\right)$ tales que $S \subset T$, pero el problema es que $\dim_E(T) = \infty$ y por ello no se pueden aplicar ninguna de las versiones del teorema de Robertson ni resultados similares que veremos más adelante. En particular, tenemos que:

- $\dim_E(S) = \dim_E(T)$ pero $S \neq T$.
- $\dim\operatorname{med}_E(S) = \dim\operatorname{med}_E(T)$ pero $S \neq T$, en donde $\dim\operatorname{med}_E(S)$ es el promedio de la función dimensión, que definimos en la Definición 12.9.
- Por más que S y T tienen una base ortonormal de traslaciones, $T \ominus S$ no la tiene porque es el espacio $L^2\left(\widehat{[-\Omega, \Omega]}\right)$ que vimos en la Sección 3.2.

Capítulo 4

Espacios invariantes por traslaciones en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$

En este Capítulo vamos a ver como se definen los espacios invariantes por traslaciones enteras en varias dimensiones. Por ejemplo, al trabajar con imágenes es usual representarlas como funciones en $L^2(\mathbb{R}^2)$. Es esperable que el subespacio de las imágenes a analizar sea invariante por traslaciones a derecha, izquierda, arriba y abajo. Las definiciones del caso multidimensional son análogas al caso unidimensional. Las demostraciones también son muy similares, y por eso sólo daremos los resultados.

En el caso multidimensional consideraremos nuevamente las traslaciones enteras. Dada una función f en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ definimos

$$\mathbf{E}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{k})$$

donde $\mathbf{k}$ es un vector arbitrario de enteros y $\mathbf{E}^{\mathbf{k}}$ es el operador traslación por $\mathbf{k}$.

Para generar estas traslaciones (como grupo) alcanza con considerar las traslaciones en una unidad a lo largo de cada uno de los ejes, que llamaremos $E_1, \ldots, E_d$ definidas por

$$E_i f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{e}_i)$$

en donde $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ son los vectores de la base canónica. Con estos d operadores definimos el vector de operadores

$$\mathbf{E} = (E_1, \ldots, E_d).$$

Podemos utilizar una notación exponencial para definir el operador $E^{\mathbf{k}}$ en donde para el vector $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ formado por números enteros, tenemos

$$\mathbf{E}^{\mathbf{k}} = E_1^{k_1} \cdots E_d^{k_d}$$

Las dos definiciones que dimos de $\mathbf{E}^{\mathbf{k}}$ coinciden y más adelante en el Capítulo 5, al generalizar esta estructura a un espacio de Hilbert abstracto, va a ser útil la segunda.

Análogamente al caso unidimensional, los espacios invariantes por traslaciones enteras son los subespacios cerrados de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ con la propiedad de que si una función $f(x)$ está en el subespacio, también lo estará la función $\mathbf{E}^{\mathbf{k}}f$ para todo vector $\mathbf{k}$ de números enteros.

A partir de un conjunto $F = \{f_1, \ldots, f_r, \ldots\}$ definiremos

$$E(F) = \left\{\mathbf{E}^{\mathbf{k}}f_j / \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \text{ y } j \in \mathbb{N}\right\}$$

contando ambos conjuntos con multiplicidad, o sea que permitimos que haya repeticiones. Además si hay repeticiones en F o se tiene que $\mathbf{E}^{\mathbf{k}}f_j = \mathbf{E}^{\mathbf{k}'}f_{j'}$ para pares $(\mathbf{k}, j)$ y $(\mathbf{k}', j')$ distintos, entonces aparecen repeticiones en $E(F)$. El espacio invariante por traslaciones será

$$S(F) = \overline{\langle \mathbf{E}^{\mathbf{k}}f_j / \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \text{ y } j \in \mathbb{N}\rangle}.$$

Para ambas definiciones usaremos la misma notación para conjuntos finitos, cambiando el conjunto de índices. Y para el caso en que se toma una sola función f usaremos nuevamente $E(f)$ y $S(f)$ respectivamente.

4.1. Definiciones

Dadas dos funciones f, g en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ definimos el *producto en frecuencias*, que es una función definida sobre el toro d-dimensional $\mathbb{T}^d$ como

$$\{f, f\}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} \check{f}(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{k})\,\overline{\check{g}(\boldsymbol{\omega} - \mathbf{k})}. \tag{4.1}$$

Esta función está en $L^1\left(\mathbb{T}^d\right)$ y también es posible escribirla como

$$\widehat{\{f, f\}}(\mathbf{a}) = \langle f, \mathbf{E}^{\mathbf{a}}g\rangle \tag{4.2}$$

en donde $\mathbf{a}$ es un vector formado por números enteros.

El multiplicador se define de la misma manera que en $L^2(\mathbb{R})$. Se considera una función f de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ y una función periódica m, tal que $m(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k}) = m(\boldsymbol{\omega})$ para todo vector de enteros $\mathbf{k}$. A partir de ellos se obtiene una nueva función $m \bullet f$ en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, definida como

$$(m \bullet f)^{\vee} = m\check{f},$$

o sea

$$m \bullet f = \widehat{m\check{f}},$$

en donde usamos la transformada y antitransformada de Fourier en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Consideramos ahora las exponenciales en cada dirección $z_1, \ldots, z_d$ tales que

$$z_i(\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_i}$$

en donde $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d$ son nuevamente los vectores de la base canónica. Si tomamos

$$m(\boldsymbol{\omega}) = z_i(\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_i}$$

entonces

$$m \bullet f = \left(\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \boldsymbol{\omega} \mathbf{e}_i} \check{f}(\boldsymbol{\omega})\right)^{\wedge} = E_i f.$$

Con estas d funciones definimos el vector de funciones

$$\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_d)$$

y podemos utilizar una notación exponencial para definir la función $\mathbf{z}^{\mathbf{k}}$. Dado un vector $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ formado por números enteros, definimos la función

$$\mathbf{z}^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\omega}) = z_1^{k_1}(\boldsymbol{\omega}) \cdots z_d^{k_d}(\boldsymbol{\omega}) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \boldsymbol{\omega} \mathbf{k}}.$$

Con esta notación tenemos que

$$\mathbf{z}^{\mathbf{k}} \bullet f = \mathbf{E}^{\mathbf{k}} f.$$

Más en general, si $p(\mathbf{z})$ es un polinomio trigonométrico

$$p(\mathbf{z}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \\ \text{finito}}} a_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

tenemos que

$$p(\mathbf{z}) \bullet f = p(\mathbf{E}) f,$$

en donde $p(\mathbf{E})$ es el operador definido por

$$p(\mathbf{E}) = \sum_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \\ \text{finito}}} a_{\mathbf{k}} \mathbf{E}^{\mathbf{k}}.$$

Aunque queda claro qué es $p(\mathbf{E})$, no es tan claro qué es $m(\mathbf{E})$ cuando m es una función continua. Por ejemplo, si $d = 2$ tomemos una función $m(\mathbf{z}) = p(z_1) q(z_2)$ en donde $p(z_1)$ y $q(z_2)$ son polinomios trigonométricos, y entonces $m(\mathbf{E}) = p(E_1) q(E_2)$. Esta igualdad se puede extender al caso en que p y q son funciones continuas y a dimensiones mayores. Vamos a ver en la Sección 7.2 que es posible hacer una generalización del cálculo funcional de un operador normal, para conjuntos de operadores normales que conmutan. De esta manera vamos a ver que tiene sentido tomar a $m(\mathbf{E})$ como un operador, y ver que cumple

$$(m \circ \mathbf{z}) \bullet f = m(\mathbf{E}) f.$$

También es posible extender los resultados sobre bases ortonormales y de Riesz, utilizando los reemplazos obvios. Por ejemplo si tenemos un conjunto de funciones $F = (f_1, \ldots, f_r)$, entonces las traslaciones de F son una base ortonormal si y sólo si la matriz $\{F, F\}(\omega)$ es la identidad para casi todo punto ω en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.

Bownik demostró en [Bow00] que todo espacio invariante por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^d)$ está generado por una sucesión F quasi-ortonormal decreciente (quizás finita). Así que podemos definir la *función dimensión* como

$$\dim_E(S)(\boldsymbol{\omega}) = \operatorname{rango}(\{F, F\}(\boldsymbol{\omega})),$$

que ahora es una función definida sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Esta función no depende de la elección de F, así que es una propiedad intrínseca del espacio.

Definimos el *largo* como la mínima cantidad de generadores y nuevamente es igual al supremo esencial de la función dimensión.

Los ejemplos de espacios de banda limitada también se extienden en forma directa. Si tomamos $L^2\left(\widehat{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d}\right)$ tiene una base ortonormal de traslaciones y función dimensión constantemente 1. Análogamente si tomamos un $0 < \Omega < \frac{1}{2}$, el espacio $L^2\left(\widehat{[-\Omega, \Omega]^d}\right)$ no tiene una base ortonormal de traslaciones ya que su función dimensión es $\chi_{[-\Omega,\Omega]^d}$. Sin embargo al tomar $\Omega = \frac{3}{2}$ es necesario partir al cubo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]^d$ en 3^d cubos que son traslaciones de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^d$. Así que el espacio $L^2\left(\widehat{\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]^d}\right)$ tiene una base ortonormal de traslaciones y función dimensión constantemente 3^d, en vez de 3.

Restringiéndonos a $L^2(\mathbb{R}^d)^A$, este espacio resulta un módulo de Hilbert sobre $L^\infty(\mathbb{T}^d)$. O sea que todas las propiedades listadas en la Sección 2.3 siguen valiendo, cambiando $L^2(\mathbb{R})^A$ por $L^2(\mathbb{R}^d)^A$ y $L^\infty(\mathbb{T})$ por $L^\infty(\mathbb{T}^d)$.

4.2. Propiedades de las traslaciones

Una propiedad interesante del producto en frecuencias es que si las traslaciones de una función f forman una base ortonormal, entonces $\{f, f\} = 1$.

Vimos la demostración de esta propiedad para el caso unidimensional en la Subsección 2.3.1 y se extiende directamente al caso multidimensional.

La fórmula del producto en frecuencias que aparece en la Ecuación (4.2) es

$$\widehat{\{f, f\}}(\mathbf{a}) = \langle f, \mathbf{E}^{\mathbf{a}} f \rangle .$$

Escrito así es claro que estamos comparando a f con todas las traslaciones de f, y la única que tiene que ser no nula es la correspondiente a $\mathbf{a} = 0$.

En este punto, la propiedad de que las traslaciones conmuten es crucial. Por ello, si por ejemplo $d = 2$, alcanza con comparar a f con $E_1^{k_1} E_2^{k_2} f$ y no es necesario compararla también con $E_2^{k_2} E_1^{k_1} f$, o combinaciones más generales como $E_1^{k_1+1} E_2^{k_2} E_1^{-1} f$.

Todas las otras propiedades también dependen en mayor o menor medida de que las traslaciones conmuten. Aunque se conocen algunos resultados para grupos generados por operadores que no conmutan, son más técnicos y difíciles de usar.

Otra propiedad importante de las traslaciones es que son unitarias. Eso asegura que la norma de todas las funciones en $\{\mathbf{E}^{\alpha} f\}$ sea la misma, que es una condición necesaria para que formen una base ortonormal.

En el caso abstracto que empezaremos a ver en la próximo Capítulo, usaremos varios resultados del cálculo funcional. El cálculo funcional para un operador normal se puede generalizar a varios operadores normales que conmutan. Esta es otra razón por la que resulta conveniente mantener la conmutatividad de los operadores. Por otro lado, el espectro de los operadores unitarios es el círculo de los complejos de radio 1, o sea $z(\mathbb{T})$. Por ello, al elegir operadores unitarios, usando la identificación vía z podremos seguir trabajando en el toro $\mathbb{T}$, o $\mathbb{T}^n$ al tomar varios operadores

Parte II

Generalización a espacios de Hilbert

Capítulo 5

Introducción y definiciones

Vamos a estudiar la generalización de los espacios invariantes por traslaciones a espacios de Hilbert abstractos. Vamos a reemplazar el grupo de las traslaciones enteras en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ por un grupo generado por n operadores unitarios que conmutan, definidos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

Por un lado, interesa entender cuáles de las propiedades de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ y sus traslaciones son relevantes para obtener los distintos resultados de los espacios invariantes por traslaciones. Por otro lado, el objetivo es poder aplicar los métodos desarrollados para espacios invariantes por traslaciones en otros contextos, que compartan las propiedades fundamentales.

Las traslaciones enteras de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ están generadas (como grupo) por las d traslaciones en una unidad a lo largo de cada eje $E_1, \ldots, E_d$. Vamos a considerar solamente dos de las propiedades de estos operadores:

- Son operadores unitarios, o sea que son inversibles y $\|E_i f\| = \|f\|$ (para $i = 1, \ldots, d$).
- Conmutan, o sea que $E_i E_j f = E_j E_i f$ (para $i, j = 1, \ldots, d$).

Entonces vamos a trabajar un espacio de Hilbert abstracto $\mathcal{H}$ en el que se han fijado d operadores $T_1, \ldots, T_d$ que son unitarios y conmutan.

Las traslaciones en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ tienen otras propiedades adicionales que no vamos a pedir en el caso abstracto. Una de las más obvias es que ninguna de las traslaciones es la identidad. Es más, E_i^a no es la identidad para todo entero a distinto de 0 y todo $i = 1, \ldots, d$.

Otra propiedad interesante es que siempre se puede definir un producto en frecuencias que cumpla con la Ecuación (4.2)

$$\widehat{\{f, g\}}\,(\mathbf{a}) = \langle f, \mathbf{E}^{\mathbf{a}} g \rangle$$

y que sea una función. Esta propiedad es más fuerte que la anterior. Veremos que en algunos casos es necesario utilizar productos en frecuencias que son medidas.

La idea de hacer las demostraciones en abstracto es poder aplicar las herramientas conocidas de los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$ a otros esquemas que cumplan al menos las dos condiciones que fijamos. Así, en los casos concretos se podrán elegir los operadores de manera que resulten convenientes para el problema bajo estudio.

Veremos en la Sección 6.1 que los sistemas de Gabor subadjuntos cumplen las dos condiciones fundamentales y también cumplen que tienen un análogo al producto en frecuencias que es una medida. Así que podremos extender todos los resultados sin dificultad.

Analizaremos otro ejemplo interesante en la Subsección 6.3.3, en donde se tienen dos señales sincronizadas, como el sonido en estéreo. En ese caso el producto en frecuencias es una medida. Así que algunos resultados conocidos para $L^2(\mathbb{R})$ se extienden en forma directa, pero en otros necesitan ser modificados para ser extendidos como veremos en la Sección 13.3.

Este tipo de generalización abstracta de los espacios invariantes por traslaciones a través de operadores fue utilizada por Goodman, Lee y Tang en [GLT93] para analizar multionditas en una dimensión, en donde se considera un operador que representa a las traslaciones y otro operador que no conmuta y actúa como la dilatación. Mi tesis de licenciatura [Mas02] estuvo basada en ese trabajo, extendiéndolo a multionditas en varias dimensiones a través de un conjunto de operadores que conmutan. Otros trabajos en donde aparecen este tipo de análisis abstracto son [HLPS99], [HL01], [Pap03], [Tan00]. En estos trabajos se supone que el espacio bajo estudio tiene una base ortonormal o un marco de traslaciones.

A diferencia de esos trabajos, nosotros analizaremos probaremos que muchos de los resultados siguen siendo válidos por más que se eliminen esas hipótesis. Sin embargo, para trabajar con esta generalidad vamos a ver que el equivalente al producto en frecuencias deja de ser una función y se debe considerar como una medida.

5.1. Notación

En lo que sigue, $\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert abstracto con producto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Además $T_1, \dots, T_d$ serán d operadores unitarios, que actúan en $\mathcal{H}$, o sea

$$T_i \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H} \text{ para } i = 1, \dots, d,$$

y conmutan, o sea que

$$T_i T_j = T_j T_i \text{ para } i, j = 1, \ldots, d.$$

Utilizaremos esencialmente la misma notación que vimos en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Tomamos el vector de operadores $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_d)$ y para el vector de números enteros $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)^t$ definimos el operador $\mathbf{T}^{\mathbf{k}}$

$$\mathbf{T}^{\mathbf{k}} = T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d}.$$

Ahora interesa considerar los *espacios invariantes por* $\mathbf{T}$, que son los subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ con la propiedad de que si un elemento ϕ está en el subespacio, también lo estará el elemento $T^{\mathbf{k}}\phi$.

A partir de un conjunto $F = \{f_1, \ldots, f_r, \ldots\}$ definiremos el *conjunto de las traslaciones por* $\mathbf{T}$ de F como

$$E\left(F\right) = \left\{\mathbf{T}^{\mathbf{k}} f_i / \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \text{ y } i \in \mathbb{N}\right\}$$

contando ambos conjuntos con multiplicidad. El espacio invariante por $\mathbf{T}$ *generado* por F será

$$S\left(F\right) = \overline{\langle \mathbf{T}^{\mathbf{k}} f_i / \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \text{ y } i \in \mathbb{N}\rangle}.$$

Nuevamente extendemos las definiciones a conjuntos finitos y de un solo elemento como hicimos antes. Además, cuando quede claro del contexto no aclararemos el vector $\mathbf{T}$ que se está utilizando.

En el próximo Capítulo veremos ejemplos de casos particulares de espacios invariantes por conjuntos de operadores unitarios, que se apartan del caso clásico. En los Capítulos siguientes veremos como extender los resultados de los espacios invariantes por traslaciones de $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ a los espacios abstractos.

Capítulo 6

Ejemplos

En el Capítulo 3 vimos como ejemplos de espacios invariantes por traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$ a los espacios de banda limitada. Estos espacios, y en general todos los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$ son subespacios cerrados de $L^2(\mathbb{R})$ y entonces son espacios de Hilbert con la estructura heredada. Al ser invariantes por traslaciones, las traslaciones restringidas a ese espacio siguen siendo unitarias. Por cada uno de ellos sirve también como ejemplo para nuestro esquema abstracto.

Vamos a ver ahora algunos ejemplos más de nuestro esquema abstracto, pero que no son espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$.

El primer ejemplo corresponde a los sistemas de Gabor autoadjuntos y subadjuntos. Es un tipo de estructura que se utiliza en las aplicaciones y entra dentro de nuestro esquema abstracto. Así podremos extender a esta otra estructura varios resultados de los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$.

Después veremos varios ejemplos que están elegidos porque representan algunos casos patológicos. Su principal utilidad es ver como en el caso general aparecen espontáneamente medidas como posibles valores del producto en frecuencias.

Finalmente analizamos el caso en que se tienen dos copias de $L^2(\mathbb{R})$. Es un modelo para representar señales medidas en forma simultaneas, por ejemplo las del sonido en estéreo. Analizamos distintas formas de elegir los operadores, que presentan características muy distintas.

En cada caso encontraremos un producto en frecuencias y a partir de él definiremos la función dimensión y el espectro.

Más adelante, en el Capítulo 13 veremos más ejemplos que servirán para aclarar las propiedades del espectro.

6.1. Sistemas de Gabor

Vamos a ver un esquema concreto conocido como sistemas de Gabor. Es muy utilizado para el procesamiento de señales. En [RS97] Ron y Shen analizan este tipo de sistemas y definen un producto en frecuencias similar al que definiremos nosotros. Nosotros repetiremos la definición, pero resaltando los aspectos que se relacionan con la conmutatividad de los operadores involucrados.

El espacio en donde se trabaja también es $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, pero además de las traslaciones se consideran las modulaciones de las funciones generadoras.

En $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$al modular una función f se obtiene la función

$$\mathbf{M}^{\mathbf{k}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

para cada posible vector de números enteros $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)^t$.

Heurísticamente, esta operación corresponde a una traslación en frecuencias de la función f. Estas modulaciones están generadas por las modulaciones $M_1, \ldots, M_d$ que corresponden a las modulaciones asociadas a los vectores de la base canónica. Con estos operadores definimos el vector de modulaciones $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_d)$.

Veamos las relaciones de conmutación entre los operadores de traslación y modulación. Consideremos primero traslaciones en tiempo a y frecuencia b no necesariamente enteros. Pueden ser en ejes distintos siguiendo los vectores $\mathbf{e}_i$ y $\mathbf{e}_j$ o en la misma dirección si $i = j$. Dada una función f en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
E_i^a M_j^b f(\mathbf{x}) &= E_i^a\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} a \mathbf{e}_j \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} b \mathbf{e}_j (\mathbf{x} - a\mathbf{e}_i)} f(\mathbf{x} - a\mathbf{e}_i) \\
&= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ab \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i}\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} b \mathbf{e}_i \mathbf{x}} f(\mathbf{x} - a\mathbf{e}_i) = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ab \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i} M_j^b f(\mathbf{x} - a\mathbf{e}_i) \\
&= \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ab \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i} M_j^b E_i^a f(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

Así que

$$E_i^a M_j^b = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ab \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i} M_j^b E_i^a,$$

y hay dos casos para analizar:

Si tienen direcciones ortogonales, o sea que $i \neq j$, entonces $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 0$. Por lo tanto queda que $E_i^a M_j^b = M_j^b E_i^a$, o sea que E_i^a y M_j^b conmutan cuando $i \neq j$.

Si tienen la mima dirección, o sea que $i = j$, entonces $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = 1$ y por lo tanto queda que $E_i^a M_i^b = \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} ab} M_i^b E_i^a$. Si ab no es un entero, tenemos que $E_i^a M_i^b \neq M_j^b E_i^a$ y los operadores no conmutan. En cambio, si ab es un entero los operadores conmutan.

Para simplificar la notación, vamos a tomar siempre a y b enteros. Cualquier otro conjunto de valores se puede reducir a este por cambios de variables. Con esto vimos que las traslaciones y modulaciones enteras conmutan, aunque es útil recordar que en general no es así.

Vamos a analizar las propiedades del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ considerando los $2d$ operadores $M_1, \ldots, M_d, E_1, \ldots, E_d$, que forman un conjunto de operadores unitarios que conmutan. Aunque el espacio subyacente es el mismo, ahora la estructura es distinta ya que incluye a las modulaciones. Por ejemplo, los subespacios a considerar serán los subespacios cerrados estables por traslaciones enteras y modulaciones enteras.

También podemos comparar este sistema con un espacio invariante por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ y analizar sus diferencias. En $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ se consideran las $2d$ traslaciones $E_1, \ldots, E_{2d}$, así que la cantidad de operadores es la misma y en ambos casos todos los operadores elegidos conmutan entre si. En $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ podemos definir las traslaciones en $1/2$ unidad, por ejemplo $E_1^{1/2}$, que conmutan con todas las demás traslaciones $E_1, \ldots, E_{2d}$. En cambio al considerar $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ con los $2d$ operadores $E_1, \ldots, E_d, M_1, \ldots, M_d$, si se definen las traslaciones o modulaciones en $1/2$ estas ya no conmutan con los otros operadores porque $E_1^{1/2}M_1 = -M_1E_1^{1/2}$ y también $E_1M_1^{1/2} = -M_1^{1/2}E_1$.

Más en general, en el caso de los espacios invariantes por traslaciones podemos considerar las traslaciones en longitudes arbitrarias y estas forman un grupo continuo de operadores que conmutan entre si. En cambio al agregar las traslaciones y modulaciones arbitrarias a las consideradas en un sistema de Gabor, junto con los complejos de módulo 1, queda un grupo continuo que no es conmutativo.

Nosotros vamos a explotar las similitudes entre las traslaciones enteras en $L^2(\mathbb{R}^{2d})$ y las traslaciones y modulaciones enteras en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Sin embargo es importante recordar que estas similitudes desaparecen cuando se consideran las versiones continuas de estas transformaciones. En particular, los grupos no conmutativos son siempre mucho más difíciles de manejar.

6.1.1. Producto en frecuencias y transformada de Zak

Tomaremos las traslaciones y modulaciones de longitud 1. O sea que nuestro vector de operadores será

$$\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_d, T_{d+1}, \ldots, T_d) = (M_1, \ldots, M_d, E_1, \ldots, E_d).$$

Ron y Shen analizan este tipo de sistemas en [RS97] y los clasifican como sistema de Gabor *autoadjuntos*.

Para calcular el producto en frecuencias usaremos la transformada de Zak. Hay varias convenciones de signos para definirla. Nosotros usaremos:

$$\tilde{\mathcal{Z}} f(\mathbf{t}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{t} + \mathbf{k}) \, e^{2\pi i \mathbf{k} \boldsymbol{\omega}}$$

en donde ω y t pertenecen al toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Es un isomorfismo isométrio entre $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ y $L^2\left(\mathbb{T}^{2d}\right)$, al igual que la transformada de Fourier.

Definimos el producto en frecuencias como

$$\{f, g\}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\omega}) = \tilde{\mathcal{Z}} f(\mathbf{t}, \boldsymbol{\omega}) \, \overline{\tilde{\mathcal{Z}} g(\mathbf{t}, \boldsymbol{\omega})}. \tag{6.1}$$

Entonces para todo par de vectores enteros $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\widehat{\{f, g\}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i (\mathbf{a t} + \mathbf{b} \boldsymbol{\omega})} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{t} + \mathbf{k}) \, \mathrm{e}^{2\pi i \mathbf{k} \boldsymbol{\omega}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \bar{g}(\mathbf{t} + \mathbf{k}') \, \mathrm{e}^{-2\pi i \mathbf{k}' \boldsymbol{\omega}} \, \mathrm{d}\, \mathbf{t} \, \mathrm{d}\, \boldsymbol{\omega} \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i \mathbf{a t}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{t} + \mathbf{k}) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \bar{g}(\mathbf{t} + \mathbf{k}') \, \mathrm{d}\, \mathbf{t} \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{e}^{-2\pi i (\mathbf{b} - \mathbf{k} + \mathbf{k}') \boldsymbol{\omega}} \, \mathrm{d}\, \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}$$

La última integral vale 1 si $\mathbf{b} - \mathbf{k} + \mathbf{k}' = \mathbf{0}$ y sino vale 0. Así que

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{t} + \mathbf{k}) \, \overline{g(\mathbf{t} + \mathbf{k} - \mathbf{b}) \, \mathrm{e}^{-2\pi i \mathbf{a t}}} \, \mathrm{d}\, \mathbf{t} \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} f(\mathbf{t} + \mathbf{k}) \, \overline{\mathbf{M}^{\mathbf{a}} \mathbf{E}^{\mathbf{b}} g(\mathbf{t} + \mathbf{k})} \, \mathrm{d}\, \mathbf{t} \\
&= \left\langle f, \mathbf{M}^{\mathbf{a}} \mathbf{E}^{\mathbf{b}} g \right\rangle,
\end{aligned}$$

que podemos escribir usando el vector $\mathbf{T}$ simplemente como

$$\widehat{\{f, g\}}(\mathbf{c}) = \langle f, \mathbf{T}^{\mathbf{c}} g \rangle .$$

Cómo se ve en la Ecuación (6.1), el producto en frecuencias sigue siendo una función en $L^1\left(\mathbb{T}^{2d}\right)$, porque es el producto en frecuencias de dos funciones en $L^2\left(\mathbb{T}^{2d}\right)$.

Usando la fórmula de Zak, es posible encontrar una expresión para el multiplicador. Dada una función m definida sobre el toro $2d$-dimensional $\mathbb{T}^{2d}$, definimos

$$m \bullet f = \tilde{\mathcal{Z}}^{-1}\left(m \tilde{\mathcal{Z}}(f)\right).$$

Para que esto esté definido necesitamos que $m\tilde{\mathcal{Z}}(f)$ esté en $L^2\left(\mathbb{T}^{2d}\right)$, o sea que sea finito

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^{2d}} \left|m(\mathbf{t},\boldsymbol{\omega})\,\tilde{\mathcal{Z}}f(\mathbf{t},\boldsymbol{\omega})\right|^2 \mathrm{d}\,\mathbf{t}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega} &= \int_{\mathbb{T}^{2d}} |m(\mathbf{t},\boldsymbol{\omega})|^2 \left|\tilde{\mathcal{Z}}f(\mathbf{t},\boldsymbol{\omega})\right|^2 \mathrm{d}\,\mathbf{t}\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega}\\ &= \int_{\mathbb{T}^{2d}} |m(\mathbf{t},\boldsymbol{\omega})|^2 \,\mathrm{d}\,\{f,f\}(\mathbf{t},\boldsymbol{\omega}),\end{aligned}$$

o sea cuando m está en $L^2\left(\mathbb{T}^{2d}\right)_{\{f,f\}}$.

Para ver qué pasa con $m \bullet f$ cuando m es una función del tipo z_i tenemos que separar en dos casos.

Si $m = z_i$ con $i = 1, \ldots, d$ entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{Z}}(z_i \bullet f) = z_i \tilde{\mathcal{Z}}(f) &= \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\mathbf{e}_i,\mathbf{0})(\mathbf{t},\boldsymbol{\omega})} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} f(\mathbf{t}+\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\mathbf{k}\boldsymbol{\omega}}\\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\mathbf{e}_i\mathbf{t}} f(\mathbf{t}+\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\mathbf{k}\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathcal{Z}}(M_i f),\end{aligned}$$

y por lo tanto $z_i \bullet f = M_i f$.

Si $m = z_{i+d}$ con $i = 1, \ldots, d$ entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{Z}}(z_{i+d} \bullet f) = z_{i+d} \tilde{\mathcal{Z}}(f) &= \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\mathbf{0},\mathbf{e}_i)(\mathbf{t},\boldsymbol{\omega})} \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} f(\mathbf{t}+\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\mathbf{k}\boldsymbol{\omega}}\\ &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} f(\mathbf{t}+\mathbf{k})\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(\mathbf{k}+\mathbf{e}_i)\boldsymbol{\omega}} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} f(\mathbf{t}+\mathbf{k}-\mathbf{e}_i)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\mathbf{k}\boldsymbol{\omega}}\\ &= \tilde{\mathcal{Z}}(T_i f),\end{aligned}$$

y por lo tanto $z_{i+d} \bullet f = T_i f$.

Si tomamos la función

$$f = \chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^d},$$

sus modulaciones enteras de estas funciones son una base ortonormal de $L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^d\right)$. Al tomar las traslaciones enteras forman una base de cada intervalo con bordes semienteros. Así que $E(f)$ es una base ortonormal de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Por ello la función dimensión es la constante 1 y los espectros serán $\tilde{\sigma}\left(L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right) = \mathbb{T}^2$ y $\tilde{\sigma}\left(L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right) = \mathbf{z}\left(\mathbb{T}^2\right)$.

Acá encontramos una diferencia importante. Como sistemas de Gabor autoadjuntos $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ tiene función dimensión 1. En cambio como espacios invariantes por traslaciones $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ y $L^2\left(\mathbb{R}^{2d}\right)$ y tienen función dimensión ∞. Otra diferencia es que el producto en frecuencias de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ como sistema de Gabor es una función en el toro bidimensional $\mathbb{T}^2$ y en cambio el producto en frecuencias de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ como espacio invariante por traslaciones es una función en el toro $\mathbb{T}$.

6.1.2. Caso más general

Vamos a hacer un análisis similar considerando traslaciones enteras de longitud 1 y permitiendo que las modulaciones enteras tengan asociadas saltos de frecuencia enteros más grandes. Consideramos entonces

$$\mathbf{T} = \left(E_1, \ldots, E_d, M_1^{d_1}, \ldots, M_d^{d_d}\right)$$

donde $d_1, \ldots, d_d$ son números enteros no nulos. Con estos números definimos la matriz diagonal $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$.

En [RS97] llaman a este tipo de sistema de Gabor *subadjunto*.

Entonces definimos el producto en frecuencias como

$$\{f, g\}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|D|} \sum_{k_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{d_d-1} \tilde{\mathcal{Z}} f\left(D^{-1}(\mathbf{t}+\mathbf{k}), \boldsymbol{\omega}\right) \overline{\tilde{\mathcal{Z}} g\left(D^{-1}(\mathbf{t}+\mathbf{k}), \boldsymbol{\omega}\right)}$$

en donde $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d)$.

Con una cuenta similar a la anterior obtenemos que

$$\widehat{\{f, g\}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \left\langle f, \mathbf{M}^{D\mathbf{a}} \mathbf{E}^{\mathbf{b}} g \right\rangle$$

para todo par de vectores enteros $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ y $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_d)$. En esta fórmula aparece la matriz diagonal D de en el exponente, de manera que

$$\mathbf{M}^{D\mathbf{a}} = M_1^{d_1 a_1} \cdots M_d^{d_d a_d} = \left(M_1^{d_1}\right)^{a_1} \cdots \left(M_d^{d_d}\right)^{a_d}$$

En este caso, como las transformadas de Zak de las funciones f y g se dilatan con la matriz D, para que la transformación no cambie las normas hay que dividir por el módulo del determinante de D, que vale justamente $|D| = |d_1 \cdot \ldots \cdot d_d|$.

Nuevamente como $\tilde{\mathcal{Z}} f$ y $\tilde{\mathcal{Z}} g$ están en $L^2\left(\mathbb{T}^{2d}\right)$ su producto está en $L^1\left(\mathbb{T}^{2d}\right)$ y al dilatar y sumar el resultado sigue estando en $L^1\left(\mathbb{T}^{2d}\right)$. Así que el producto en frecuencias sigue siendo una función en $L^1\left(\mathbb{T}^{2d}\right)$.

Dada una función m sobre el toro $2d$-dimensional $\mathbb{T}^{2d}$. La extendemos periódicamente a todo $\mathbb{R}^{2d}$ (en realidad solo interés el rectángulo de lados $d_1, \ldots, d_d$) y definimos

$$m \bullet f = \tilde{\mathcal{Z}}^{-1}\left(m(D\mathbf{t}, \boldsymbol{\omega})\, \tilde{\mathcal{Z}}(f)(\mathbf{t}, \boldsymbol{\omega})\right).$$

y de manera similar al caso anterior tenemos que $z_i \bullet f = M_i^{d_i} f$ y $z_{i+d} \bullet f = T_i f$.

Si tomamos la función

$$f = \chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^d},$$

sus modulaciones enteras de estas funciones son una base ortonormal de $L^2\left(\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^d\right)$. Al tomar las traslaciones enteras forman una base de cada intervalo con bordes semienteros. Pero ahora no tenemos disponibles en nuestro vector de operadores $\mathbf{T}$ a todas las modulaciones enteras, sino solamente las que son de la forma $\mathbf{M}^{D\mathbf{a}}$. Dada una modulación arbitraria $\mathbf{M}^{\mathbf{j}}$ siempre la podemos escribir como $\mathbf{M}^{\mathbf{j}} = \mathbf{M}^{D\mathbf{a}+\mathbf{k}}$ con $\mathbf{a}$ un vector de enteros y $\mathbf{k}$ un vector tal que $0 \leqslant k_i < d_i$. Por ello como generadores de la base debemos considerar las funciones

$$f_{\mathbf{k}} = \mathbf{M}^{\mathbf{k}} \chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^d} \text{ con } 0 \leqslant k_i < d_i.$$

En total son $d_1 \cdot \ldots \cdot d_d = |D|$ funciones, así que la función dimensión es la constante $|D|$ y los espectros serán $\tilde{\sigma}\left(L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right) = \mathbb{T}^2$ y $\tilde{\sigma}\left(L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right) = \mathbf{z}\left(\mathbb{T}^2\right)$.

6.2. Ejemplos sencillos

Ahora vamos a ver tres ejemplos sencillos. Los operadores elegidos no son los que muestran la mayor utilidad del esquema abstracto, sino que son aquellos que permiten ver algunos problemas que aparecen al tratar de hacer la generalización a espacios de Hilbert abstractos. Vamos a ver que es en estos casos el equivalente al producto en frecuencias es una medida. En la Sección 8.1 siempre es posible, encontrar una medida que cumpla este papel. Por ejemplo, nunca aparece un producto en frecuencias que sea la derivada de la distribución delta.

6.2.1. La identidad

Este es un caso muy sencillo que se puede aplicar a un espacio de Hilbert cualquiera. Para poder comparar mejor los resultados con los demás ejemplos vamos a tomar $\mathcal{H}$ nuevamente igual a $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Definimos un sólo operador de traslación T, que es justamente la identidad:

$$Tf(x) = \operatorname{Id} f(x) = f(x)$$

Al analizar la sucesión $\{\langle f, T^a g\rangle\}_{a\in\mathbb{Z}}$ tenemos que

$$\langle f, T^a g\rangle = \langle f, g\rangle$$

es la sucesión constante. Por analogía con los casos anteriores, nos gustaría definir en este caso un producto en frecuencias $\{f,g\}(\boldsymbol{\omega})$ que sea una función en $L^1(\mathbb{T})$ tal que valga

$$\widehat{\{f,g\}}(a)=\langle f,T^a g\rangle \tag{6.2}$$

Pero la transformada de Fourier de cualquier función de $L^1(\mathbb{T})$ tiende a cero en infinito. Así que en particular no puede ser constante. Con esto vemos que en la extensión a espacios de Hilbert abstractos aparecen fenómenos nuevos que hay que estudiar en detalle.

Ya que no es una función en $L^1(\mathbb{T})$, busquemos un objeto que cumpla la Ecuación (6.2) en algún sentido. Por ahora sólo vamos a encontrarlo, más adelante en la Subsección 8.1.1 vamos a dar un método para hallarlo a partir de la sucesión.

La distribución delta δ_{ω_0} se define como la funcional que aplicada a una función continua m definida en el toro, le asigna el valor de m en el punto ω_0. Usualmente se representa esta aplicación como una integral

$$\int_{\mathbb{T}} m(\omega)\,\delta_{\omega_0}(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega=g(\omega_0)$$

La linealidad de la funcional, hace que las propiedades de linealidad de la integral sigan valiendo. Esta es una distribución, que se puede pensar como una carga puntual de valor 1 en el punto ω_0.

En particular podemos escribir la Ecuación (6.2) usando la forma explícita de la transformada de Fourier

$$\int_{\mathbb{T}}\{f,g\}\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\omega a}\,\mathrm{d}\,\omega=\langle f,T^a g\rangle=\langle f,g\rangle\,,$$

de manera que si proponemos un producto

$$\{f,g\}=k\delta_0$$

donde k es una constante a determinar y el producto en frecuencias corresponde a una carga puntual de valor k en el punto $\omega_0=0$. Entonces tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}}\{f,g\}(\omega)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\omega a}\,\mathrm{d}\,\omega=\int_{\mathbb{T}}k\delta_0\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\omega a}\,\mathrm{d}\,\omega=k\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}0a}=k$$

Así obtenemos nuevamente la sucesión constante de valor k, por lo que debemos tomar $k=\langle f,g\rangle$. De esta manera tenemos que

$$\{f,g\}=\langle f,g\rangle\,\delta_0.$$

Para definir el multiplicador, tomamos una función f de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ y utilizando un polinomio trigonométrico $p(z)$ tal que

$$p(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k$$

tenemos que

$$p(\mathrm{Id}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \,\mathrm{Id}^k = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\right) \mathrm{Id} = p(z(0))\,\mathrm{Id}$$

o sea que

$$p(z) \bullet f = p(z(0))\, f$$

La generalización natural a una función continua m,

$$m \bullet f = m(0)\, f$$

Extenderlo a funciones no continuas (borelianas) es más complicado. En particular, hay que analizar qué pasa si m no es continua en 0. (Veremos que en realidad da la misma fórmula, pero para que esto ande, no hay que identificar las funciones borelianas módulo integral cero.)

Si tomamos $F = (f_1, f_2, \dots)$ una base ortonormal de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ entonces

$$\begin{aligned} \{f_i, f_j\} &= \langle f_i, f_i\rangle\, \delta_0 = \delta_0 \\ \{f_i, f_j\} &= \langle f_i, f_j\rangle\, \delta_0 = 0 \text{ si } i \neq j \end{aligned}$$

así que

$$\{F, F\} = \begin{pmatrix} \delta_0 & 0 & \cdots \\ 0 & \delta_0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

En este caso no es posible encontrar una base ortonormal de traslaciones y ni siguiera un vector quasi-ortonormal decreciente. Veremos como manejar estos casos en la Sección 10.1. Veremos que como el soporte de todas los productos es el punto 0 entonces los espectros son $\tilde{\sigma}_I\left(L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right) = \{0\}$ y $\sigma_I\left(L^2\left(\mathbb{R}^d\right)\right) = z(\{0\})$.

Este ejemplo se puede extender al caso "multidimensional", tomando n operadores iguales a la identidad.

$$T^1 = T^2 = \cdots = T^n = \mathrm{Id}$$

Tampoco es muy interesante, y el producto en frecuencias es también una delta en el 0 de $\mathbb{T}^n$.

6.2.2. Paridad

Nuevamente en $L^2(\mathbb{R})$ vamos a definir otro operador, que es la "paridad":

$$T^1 f(x) = Pf(x) = f(-x).$$

Este operador "da vuelta" las funciones. El nombre viene se debe a que las funciones pares son autovectores con autovalor 1, y las impares tienen autovalor -1. En particular

$$P^2 f(x) = Pf(-x) = f(x).$$

Para compresión de imágenes resulta conveniente que las funciones de la base sean simétricas o antisimétrica, porque disimulan mejor los errores que produce el procesamiento.

Al analizar la sucesión $\{\langle f, T^a g\rangle\}_{a\in\mathbb{Z}}$ tenemos que

$$\langle f, T^a g\rangle = \begin{cases} \langle f, g\rangle & \text{si} \quad a \text{ es par} \\ \langle f, Pg\rangle & \text{si} \quad a \text{ es impar} \end{cases}$$

de manera que es la sucesión que alterna entre dos valores. En particular no tiende a cero (salvo en el caso trivial). Así que no podemos definir en este caso un producto en frecuencias $\{f, g\}(\boldsymbol{\omega})$ que sea una función en $L^1(\mathbb{T})$ cuya transformada de Fourier tome estos valores.

Buscando un poco, proponemos uno de la forma

$$\{f, g\} = \frac{1}{2}k_0\delta_0 + \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}}\delta_{\frac{1}{2}}$$

en donde k_0 y $k_{\frac{1}{2}}$ son dos números complejos que vamos a determinar. Esto corresponde a una carga puntual de valor $\frac{1}{2}k_0$ en el punto $\omega_0 = 0$ y otra de valor $\frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}}$ en el punto $\omega_0 = \frac{1}{2}$ (que está identificado con $-\frac{1}{2}$).

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} \{f, g\}(\boldsymbol{\omega})\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\boldsymbol{\omega} a}\, \mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega} &= \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{1}{2}k_0\delta_0 + \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}}\delta_{\frac{1}{2}}\right) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\boldsymbol{\omega} a}\, \mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2}k_0\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} 0 a} + \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}}\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\frac{1}{2}a} = \frac{1}{2}k_0 + \frac{1}{2}k_{\frac{1}{2}}(-1)^a \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(k_0 + k_{\frac{1}{2}}\right) & \text{si} \quad a \text{ es par} \\ \frac{1}{2}\left(k_0 - k_{\frac{1}{2}}\right) & \text{si} \quad a \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces la única posible elección de k_0 y $k_{\frac{1}{2}}$ es

$$\begin{aligned} k_0 &= \langle f, g\rangle + \langle f, Pg\rangle \\ k_{\frac{1}{2}} &= \langle f, g\rangle - \langle f, Pg\rangle, \end{aligned}$$

y entonces tenemos que

$$\{f,g\} = \frac{\langle f,g\rangle + \langle f,Pg\rangle}{2}\delta_0 + \frac{\langle f,g\rangle - \langle f,Pg\rangle}{2}\delta_{\frac{1}{2}}.$$

Nuevamente obtuvimos una medida. No probamos unicidad, eso queda para más adelante cuando veamos el método general en la Sección 8.1.

Para definir el multiplicador, dada una función f de $L^2(\mathbb{R})$ y utilizando un polinomio trigonométrico $p(z)$ tal que

$$p(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k,$$

entonces

$$p(P) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k P^k = \left(\sum_{\text{par}} a_k\right)\mathrm{Id} + \left(\sum_{\text{impar}} a_k\right)P.$$

La suma sobre los coeficientes pares se puede escribir usando que

$$\frac{1^n + (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } \; a \text{ es par} \\ 0 & \text{si } \; a \text{ es impar} \end{cases}$$

como

$$\begin{aligned}\sum_{\text{par}} a_k &= \sum_{a\in\mathbb{Z}} \frac{1^n + (-1)^n}{2} a_k = \frac{\sum_{a\in\mathbb{Z}} 1^n a_k + \sum_{a\in\mathbb{Z}} (-1)^n a_k}{2} \\ &= \frac{p(1) + p(-1)}{2} = \frac{p(z(0)) + p\left(z\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{2},\end{aligned}$$

ya que $z(0) = 1$ y $z\left(\frac{1}{2}\right) = -1$. De la misma manera

$$\begin{aligned}\sum_{\text{impar}} a_k &= \sum_{a\in\mathbb{Z}} \frac{1^n - (-1)^n}{2} a_k = \frac{\sum_{a\in\mathbb{Z}} 1^n a_k - \sum_{a\in\mathbb{Z}} (-1)^n a_k}{2} \\ &= \frac{p(1) - p(-1)}{2} = \frac{p(z(0)) - p\left(z\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{2}.\end{aligned}$$

Entonces

$$p(P) = \frac{p(z(0)) + p\left(z\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{2}\mathrm{Id} + \frac{p(z(0)) - p\left(z\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{2}P,$$

de manera que

$$p(z) \bullet f = \frac{p(z(0)) + p\left(z\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{2} f + \frac{p(z(0)) - p\left(z\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{2} Pf.$$

Y en realidad esta fórmula se extiende a las funciones borelianas.

Nuevamente, los espectros se pueden calcular por el soporte de estas medidas. En este caso, el espectro $\tilde{\sigma}_P(L^2(\mathbb{R}))$ es $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ y el espectro $\sigma_P(L^2(\mathbb{R}))$ es $\{1,-1\} = z\left(\left\{0,\frac{1}{2}\right\}\right)$ por lo que veremos en la Subsección 10.7.4.

6.2.3. Diagonal

Nuevamente tomaremos $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, pero esta vez vamos a tomar dos veces el operador de traslación, o sea que

$$T_1 f(x) = T_2 f(x) = Ef(x) = f(x-1).$$

En los espacios invariantes por traslaciones consideramos $L^2(\mathbb{R})$, pero sólo una vez el operador de traslación.

Al analizar la sucesión $\left\{\left\langle f, T_1^a T_2^b g\right\rangle\right\}_{a,b\in\mathbb{Z}}$tenemos que

$$\left\langle f, T_1^a T_2^b g\right\rangle = \left\langle f, E^a E^b g\right\rangle = \left\langle f, E^{a+b} g\right\rangle$$

Los valores de esta sucesión son constantes sobre las diagonales $a + b = \text{cte}$. De manera que si f no es ortogonal a todas las traslaciones de g, la sucesión no tiende a cero en infinito, en todas las direcciones.

En este caso para $\{f, g\}_{(E,E)}(\boldsymbol{\omega})$ vamos a usar una medida que no es puntual, sino que está concentrada en la diagonal $\omega = \varkappa$, de la forma

$$\{f, g\}_{(E,E)}(\omega, \varkappa) = \delta_{\omega=\varkappa} \frac{1}{\sqrt{2}} h(\omega)$$

En donde si m es una función continua definida en el toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2$

$$\int_{\mathbb{T}^2} m(\omega, \varkappa)\, \delta_{\omega=\varkappa}(\omega, \varkappa)\, \mathrm{d}\,\omega\, \mathrm{d}\,\varkappa = \int_{\mathbb{T}} m(\omega, \omega) \sqrt{2}\, \mathrm{d}\,\omega$$

El $\sqrt{2}$ aparece ya que la diagonal del toro 2-dimensional $\mathbb{T}^2$ es un segmento que mide $\sqrt{2}$, mientras que el toro $\mathbb{T}$ es un segmento que mide 1. En particular si integramos la función constantemente 1, obtenemos

$$\int_{\mathbb{T}^2} 1 \delta_{\omega=\varkappa}(\omega, \varkappa)\, \mathrm{d}\,\omega\, \mathrm{d}\,\varkappa = \int_{\mathbb{T}} 1\sqrt{2}\, \mathrm{d}\,\omega = \sqrt{2}$$

que es la longitud de la diagonal. Por ello, para facilitar las cuentas, incluimos explícitamente un $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en el modelo propuesto del producto.

Sólo nos falta determinar la función h.

$$\begin{aligned}
\widehat{\{f, g\}}_{(E,E)}(a, b) &= \int_{\mathbb{T}^2} \{f, g\}_{(E,E)}(\boldsymbol{\omega}, \varkappa)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\varkappa b}\, \mathrm{d}\,\omega\, \mathrm{d}\,\varkappa \\
&= \int_{\mathbb{T}^2} \delta_{\omega=\varkappa} \frac{1}{\sqrt{2}} h(\omega)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\varkappa b}\, \mathrm{d}\,\omega\, \mathrm{d}\,\varkappa \\
&= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{\sqrt{2}} h(\omega)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a}\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega b} \sqrt{2}\, \mathrm{d}\,\omega \\
&= \int_{\mathbb{T}} h(\omega)\, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega a+b}\, \mathrm{d}\,\omega = \hat{h}(a+b)
\end{aligned}$$

De manera que tenemos

$$\widehat{\{f,g\}_{(E,E)}}\,(a,b) = \hat{h}\,(a+b) = \left\langle f, E^{a+b}g \right\rangle$$

o sea que

$$\hat{h}\,(c) = \langle f, E^{c}g \rangle$$

y por lo tanto h tiene que ser el producto en frecuencias $\{f,g\}_E$ que teníamos para los espacios invariantes por traslaciones, considerando una sola vez la traslación.

$$\{f,g\}_{(E,E)}\,(\omega,\varkappa) = \delta_{\omega=\varkappa}\frac{1}{\sqrt{2}}\,\{f,g\}_E\,(\omega)$$

Nuevamente obtuvimos una medida.

Para definir el multiplicador, dada una función f de $L^2\,(\mathbb{R})$ y utilizando un polinomio trigonométrico $p\,(z_1,z_2)$ tal que

$$p\,(z_1,z_2) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}^d} a_{a,b}z_1^a z_2^b$$

entonces podemos definir el polinomio de la diagonal como

$$p_d\,(z\,(\omega)) = p\,(z\,(\omega)\,,z\,(\omega))$$

y de esta manera

$$p\,(z_1,z_2)\bullet f = p\,(E,E)\,f = p_d\,(E)\,f = p_d\,(z)\bullet_E f$$

en donde $\bullet_E$ es el multiplicados que teníamos para los espacios invariantes por traslaciones, considerando una sola vez la traslación. La misma fórmula se aplica a funciones continuas y borelianas, sólo tiene en cuenta el valor sobre la diagonal.

En este caso el soporte de la distribución es la diagonal. Podemos volver a tomar las funciones

$$g_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}xk}\,\widehat{\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}}.$$

Ahora no forman una base ortonormal, pero sus productos al menos son iguales a $\frac{1}{\sqrt{2}}\delta_{\omega=\varkappa}$. Así que usando el soporte para definir el espectro queda

$$\tilde{\sigma}_{(E,E)}\left(L^2\,(\mathbb{R})\right) = \left\{(\omega,\varkappa)\in\mathbb{T}^2/\omega=\varkappa\right\}$$

y

$$\sigma_{(E,E)}\left(L^2\,(\mathbb{R})\right) = \mathbf{z}\left(\tilde{\sigma}_{(E,E)}\left(L^2\,(\mathbb{R})\right)\right).$$

6.3. Sonido estéreo

Ahora consideraremos dos copias de $L^2(\mathbb{R})$ al mismo tiempo. Este puede ser un modelo de señales que se miden por dos canales simultáneamente. Un ejemplo típico es el sonido en estéreo, en el que cada señal corresponde a cada uno de los dos micrófonos o parlantes que se utilizan.

Aunque nos limitaremos a dos copias, se puede hacer el mismo tipo de construcciones con más copias de $L^2(\mathbb{R})$, por ejemplo para representar sistemas más complejos de sonido que utilizan cinco micrófonos. También para procesar imágenes se puede hacer algo similar tomando tres copias de $L^2(\mathbb{R}^2)$, para representar la información de cada color.

En todos los casos que vamos a analizar tomamos $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$, o sea que los elementos son ahora pares de funciones (f, g) en $L^2(\mathbb{R})$. Dados dos pares (f, g) y $\left(\tilde{f}, \tilde{g}\right)$ tomamos el escalar $\left\langle (f, g), \left(\tilde{f}, \tilde{g}\right) \right\rangle = \left\langle f, \tilde{f} \right\rangle + \langle g, \tilde{g} \rangle$.

Vamos a ver tres formas de combinar la información en estas dos copias de $L^2(\mathbb{R})$. La diferencia son como elegimos los operadores en el nuevo espacio. Este cambio en los operadores produce cambios en el producto y en las otras construcciones asociadas.

6.3.1. Suma directa

En el primer caso tomamos los dos operadores de traslación en cada copia de $L^2(\mathbb{R})$ y los extendemos a la otra usando la identidad

$$\begin{aligned} T_1 &= E \oplus \mathrm{Id} \\ T_2 &= \mathrm{Id} \oplus E \end{aligned}$$

o sea que dado un par (f, g) en con las funciones f y g en $L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} T_1(f, g) &= (Ef, g) \\ T_2(f, g) &= (f, Eg). \end{aligned}$$

La idea de esto, es que T_1 traslada sólo la primera copia y T_2 traslada sólo la segunda copia. De manera que seguimos con la posibilidad de trasladar las señales igual que antes.

Ahora tenemos que

$$\left\langle (f, g), \mathbf{T}^{(a,b)} \left(\tilde{f}, \tilde{g}\right) \right\rangle = \left\langle f, E^a \tilde{f} \right\rangle + \left\langle g, E^b \tilde{g} \right\rangle$$

y veamos que el producto en frecuencias es

$$\left\{ (f, g), \left(\tilde{f}, \tilde{g}\right) \right\} (\omega_1, \omega_2) = \left\{ f, \tilde{f} \right\} (\omega_1) + \{g, \tilde{g}\} (\omega_2)$$

porque

$$\left\{ \widehat{(f,g)\,,\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)} \right\}(a,b) = \left\{ f,\tilde{f} \right\}\widehat{(\omega_1)} + \{g,\tilde{g}\}(a,b) = \widehat{\left\{ f,\tilde{f} \right\}}(a) + \widehat{\{g,\tilde{g}\}}(b)$$
$$= \left\langle f, E^a \tilde{f} \right\rangle + \left\langle g, E^b \tilde{g} \right\rangle = \left\langle (f,g)\,, \mathbf{T}^{(a,b)}\left(\tilde{f},\tilde{g}\right) \right\rangle$$

Para definir el multiplicador, dada una función f de $L^2(\mathbb{R})$ y utilizando un polinomio trigonométrico $p(z_1,z_2)$ tal que

$$p(z_1,z_2) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}^d} a_{a,b} z_1^a z_2^b$$

entonces si $m = p(\mathbf{z})$ tomamos

$$m \bullet (f,g) = \sum_{a,b\in\mathbb{Z}^d} a_{a,b}\left(E^a f, E^b g\right)$$

Al igual que en el caso de $L^2(\mathbb{R}^2)$ es un poco más difícil ver que es $m \bullet (f,g)$ en el caso general, pero se lo puede extender usando el cálculo funcional.

Tomemos las funciones g_k definidas en la Ecuación (3.3) cuyas traslaciones forman una base $L^2(\mathbb{R})$, y consideramos los pares de funciones de la forma (g_k, g_j). Las traslaciones por T_1 y T_2 de esta familia de funciones forman una base ortonormal de $S = L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$. Por ello el espectro $\tilde{\sigma}(S) = \mathbb{T}^2$, y por lo que veremos en la Subsección 10.7.4 $\sigma(S) = z(\mathbb{T}^2)$.

6.3.2. Sincronizado

En el segundo caso tomamos un sólo operador que es la suma directa de los dos operadores de traslación en cada copia,

$$T = E \oplus E,$$

o sea que dado un par (f,g) en $L^2(\mathbb{R})$

$$T(f,g) = (Ef, Eg)\,.$$

La idea de esto, es que si se tiene una señal en los dos canales medida en forma simultanea y se le aplica este operador, la sincronización no cambia porque se trasladan de la misma manera las dos señales.

En este caso como

$$\left\langle (f,g)\,, T^\alpha\left(\tilde{f},\tilde{g}\right) \right\rangle = \left\langle f, T^\alpha \tilde{f} \right\rangle + \left\langle g, T^\alpha \tilde{g} \right\rangle$$

es fácil comprobar que

$$\left\{(f,g),\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\right\}=\{f,g\}+\left\{\tilde{f},\tilde{g}\right\}$$

porque

$$\begin{aligned}\widehat{\left\{(f,g),\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\right\}}(\alpha)&=\widehat{\{f,g\}+\left\{\tilde{f},\tilde{g}\right\}}(\alpha)=\widehat{\{f,g\}}(\alpha)+\widehat{\left\{\tilde{f},\tilde{g}\right\}}(\alpha)\\&=\langle f,E^{\alpha}g\rangle+\left\langle\tilde{f},E^{\alpha}\tilde{g}\right\rangle=\left\langle(f,g),T^{\alpha}\left(\tilde{f},\tilde{g}\right)\right\rangle\end{aligned}$$

Además

$$T^{\alpha}=E^{\alpha}\oplus E^{\alpha}$$

y entonces si $p(z)$ es un polinomio trigonométrico tenemos que

$$\begin{aligned}p(T)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_kT^k=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_k\left(E^k\oplus E^k\right)\\&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_kE^k\oplus\sum_{k\in\mathbb{Z}}a_kE^k=p(E)\oplus p(E)\end{aligned}$$

o sea que

$$p(z)\bullet(f,g)=(p(z)\bullet_E f,p(z)\bullet_E g).$$

y como siempre se extiende a las otras funciones continuas y a las otras funciones.

Tomemos las funciones g_k definidas en la Ecuación (3.3) cuyas traslaciones forman una base $L^2(\mathbb{R})$, y consideramos los pares de funciones de la forma $(0,g_k)$ y $(g_k,0)$. Las traslaciones por $\mathbf{T}$ de estas dos familias de funciones combinadas forman una base ortonormal de $S=L^2(\mathbb{R})\otimes L^2(\mathbb{R})$. Por ello el espectro $\tilde{\sigma}(S)=\mathbb{T}$, y por lo que veremos en la Subsección 10.7.4 $\sigma(S)=z(\mathbb{T})$.

6.3.3. Con intercambio

En el tercer caso tomamos nuevamente dos operadores. Uno es la suma directa de los dos operadores

$$T_1=E\oplus E,$$

o sea

$$T_1(f,g)=(Ef,Eg).$$

El otro es el operador de intercambio T_2 que dado un par (f,g) en $L^2(\mathbb{R})$

$$T_2(f,g)=(g,f).$$

La idea del primer operador es que si se tiene una señal en los dos canales medida en forma simultanea, la sincronización no cambia al trasladar al mismo tiempo las dos señales. El segundo operador tampoco rompe la sincronización, pero permite intercambiar las señales. Al oírlo, el efecto del sonido estéreo hace que parezca que el sonido viene del otro lado.

En este caso como

$$\left\langle (f,g)\,,\mathbf{T}^{(\alpha,\beta)}\left(\tilde f,\tilde g\right)\right\rangle = \begin{cases} \left\langle f,T_1^\alpha \tilde f\right\rangle + \langle g,T_1^\alpha \tilde g\rangle & \text{si} \quad \beta \text{ es par} \\ \langle f,T_1^\alpha \tilde g\rangle + \left\langle g,T_1^\alpha \tilde f\right\rangle & \text{si} \quad \beta \text{ es impar}\end{cases} \tag{6.3}$$

propondremos para el producto en frecuencias una medida del tipo

$$\left\{(f,g)\,,\left(\tilde f,\tilde g\right)\right\}(\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{2}h_0(\omega_1)\,\delta_0(\omega_2) + \frac{1}{2}h_{\frac12}(\omega_1)\,\delta_{\frac12}(\omega_2)$$

que corresponde a dos cargas lineales, una sobre el segmento $\omega_2 = 0$ y la otra sobre el segmento $\omega_2 = \frac{1}{2}$. Entonces

$$\begin{aligned}\widehat{\left\{(f,g)\,,\left(\tilde f,\tilde g\right)\right\}}(\alpha,\beta) &= \widehat{\frac{1}{2}h_0(\omega_1)\,\delta_0(\omega_2) + \frac{1}{2}h_{\frac12}(\omega_1)\,\delta_{\frac12}(\omega_2)}(\alpha,\beta) \\ &= \frac{1}{2}\widehat{h_0}(\alpha)\,\widehat{\delta_0}(\beta) + \frac{1}{2}\widehat{h_{\frac12}}(\alpha)\,\widehat{\delta_{\frac12}}(\beta) \\ &= \frac{1}{2}\widehat{h_0}(\alpha)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}0\beta} + \frac{1}{2}\widehat{h_{\frac12}}(\alpha)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\frac12\beta} \\ &= \frac{1}{2}\widehat{h_0}(\alpha) + \frac{1}{2}\widehat{h_{\frac12}}(\alpha)\,(-1)^\beta \\ &= \begin{cases} \frac12\left(\widehat{h_0}(\alpha) + \widehat{h_{\frac12}}(\alpha)\right) & \text{si} \quad \beta \text{ es par} \\ \frac12\left(\widehat{h_0}(\alpha) - \widehat{h_{\frac12}}(\alpha)\right) & \text{si} \quad \beta \text{ es impar}\end{cases}\end{aligned} \tag{6.4}$$

Al compararlo con la Ecuación (6.3) tenemos que

$$\begin{aligned}\widehat{h_0}(\alpha) &= \left\langle f,T^\alpha \tilde f\right\rangle + \langle g,T^\alpha \tilde g\rangle + \langle f,T^\alpha \tilde g\rangle + \left\langle g,T^\alpha \tilde f\right\rangle \\ &= \left\langle (f+g)\,,T^\alpha\left(\tilde f+\tilde g\right)\right\rangle = \widehat{\left\{f+g,\tilde f+\tilde g\right\}}(\alpha) \\ \widehat{h_{\frac12}}(\alpha) &= \left\langle f,T^\alpha \tilde f\right\rangle + \langle g,T^\alpha \tilde g\rangle - \langle f,T^\alpha \tilde g\rangle - \left\langle g,T^\alpha \tilde f\right\rangle \\ &= \left\langle (f-g)\,,T^\alpha\left(\tilde f-\tilde g\right)\right\rangle = \widehat{\left\{f-g,\tilde f-\tilde g\right\}}(\alpha)\end{aligned}$$

así que tenemos que

$$\begin{aligned}\left\{(f,g)\,,\left(\tilde f,\tilde g\right)\right\}(\omega_1,\omega_2) = {}& \frac12\left\{f+g,\tilde f+\tilde g\right\}(\omega_1)\,\delta_0(\omega_2) \\ &+ \frac12\left\{f-g,\tilde f-\tilde g\right\}(\omega_1)\,\delta_{\frac12}(\omega_2)\,.\end{aligned} \tag{6.5}$$

Para definir el multiplicador primero analicemos qué pasa si m es un polinomio trigonométrico $p(z)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} p(\mathbf{T}) &= \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} a_{\mathbf{k}}\mathbf{T}^{\mathbf{k}} = \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} a_{\mathbf{k}} T_1^{k_1} T_2^{k_2} = \sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}\\ k_2 \text{ par}}} a_{\mathbf{k}} T_1^{k_1} + \sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}\\ k_2 \text{ impar}}} a_{\mathbf{k}} T_1^{k_1} T_2 \\ &= \sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}\\ k_2 \text{ par}}} a_{\mathbf{k}} T_1^{k_1} + T_2 \sum_{\substack{k_1\in\mathbb{Z}\\ k_2 \text{ impar}}} a_{\mathbf{k}} T_1^{k_1} \end{aligned}$$

Ahora podemos reemplazar la condición de paridad e imparidad por $\frac{1+(-1)^{k_2}}{2}$ y $\frac{1-(-1)^{k_2}}{2}$ respectivamente. Y luego reemplazar los números 1 por el operador identidad Id

$$\begin{aligned} p(\mathbf{T}) &= \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} a_{\mathbf{k}} \left(\frac{1+(-1)^{k_2}}{2} + \frac{1-(-1)^{k_2}}{2}\right) T_1^{k_1} \\ &= \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} a_{\mathbf{k}} \left(\frac{\mathrm{Id}+(-\mathrm{Id})^{k_2}}{2} + \frac{\mathrm{Id}-(-\mathrm{Id})^{k_2}}{2} T_2\right) T_1^{k_1} \\ &= \sum_{k_1,k_2\in\mathbb{Z}} a_{\mathbf{k}} \left(\frac{\mathrm{Id}^{k_2} T_1^{k_1}+(-\mathrm{Id})^{k_2} T_1^{k_1}}{2} + \frac{\mathrm{Id}^{k_2} T_1^{k_1}-(-\mathrm{Id})^{k_2} T_1^{k_1}}{2} T_2\right) \\ &= \frac{p(T_1,\mathrm{Id})+p(T_1,-\mathrm{Id})}{2} + \frac{p(T_1,\mathrm{Id})-p(T_1,-\mathrm{Id})}{2} T_2. \end{aligned}$$

Si tomamos el polinomio trigonométrico $p_0(z)$ que se obtiene al restringir $p(\mathbf{z})$ al segmento $\omega_2 = 0$ obtenemos $p_0(z_1(\omega_1)) = p(z_1(\omega_1), z_2(0)) = p(z_1(\omega_1), 1)$ entonces

$$p_0(T_1) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} a_{\mathbf{k}} 1^{k_2} T_1^{k_1} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} a_{\mathbf{k}} \mathrm{Id}^{k_2} T_1^{k_1} = p(T_1,\mathrm{Id}).$$

De la misma manera, restringiendo a $p(\mathbf{z})$ al segmento $\omega_2 = \frac{1}{2}$ (identificado con $-\frac{1}{2}$) obtenemos $p_{\frac{1}{2}}(z_1(\omega_1)) = p\left(z_1(\omega_1), z_2\left(\frac{1}{2}\right)\right) = p(z_1(\omega_1), -1)$ entonces

$$p_{\frac{1}{2}}(T_1) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} a_{\mathbf{k}} (-1)^{k_2} T_1^{k_1} = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^2} a_{\mathbf{k}} (-\mathrm{Id})^{k_2} T_1^{k_1} = p(T_1,-\mathrm{Id}).$$

Ahora podemos reemplazar en la fórmula de $p(\mathbf{T})$ y queda

$$p(\mathbf{T}) = \frac{p_0(T_1)+p_{\frac{1}{2}}(T_1)}{2} + \frac{p_0(T_1)-p_{\frac{1}{2}}(T_1)}{2} T_2$$

Así que

$$\begin{aligned}
p(z_1, z_2) \bullet (f, g) &= \frac{p_0(T_1) + p_{\frac{1}{2}}(T_1)}{2}(f, g) + \frac{p_0(T_1) - p_{\frac{1}{2}}(T_1)}{2} T_2(f, g) \\
&= \frac{p_0(T_1) + p_{\frac{1}{2}}(T_1)}{2}(f, g) + \frac{p_0(T_1) - p_{\frac{1}{2}}(T_1)}{2}(g, f) \\
&= \left(\frac{p_0(z) + p_{\frac{1}{2}}(z)}{2} \bullet f + \frac{p_0(z) - p_{\frac{1}{2}}(z)}{2} \bullet g \right. \\
&\left. , \frac{p_0(z) + p_{\frac{1}{2}}(z)}{2} \bullet g + \frac{p_0(z) - p_{\frac{1}{2}}(z)}{2} \bullet f \right)
\end{aligned}$$

y como siempre se extiende a las otras funciones continuas y a las otras funciones.

Discutiremos la función dimensión y los espectros de este caso en particular con mucho más detalles en la Sección 13.3.

Capítulo 7

Cálculo funcional continuo en varias dimensiones

Nuestro objetivo es extender la Ecuación (4.2) definida para los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^d)$ a los espacios de Hilbert abstractos. Con la nueva notación, esta Ecuación se escribe como

$$\widehat{\{f,g\}}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle f, \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}} g\rangle \text{ con } \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^d.$$

Siguiendo la misma idea utiliza la Ecuación (2.3) la podríamos reescribir formalmente como

$$\{f,g\}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^d} \langle f, \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}} g\rangle \, \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\omega}}.$$

Sin embargo en $L^2(\mathbb{R}^d)$ la convergencia de la seria no es buena ya que la sucesión $\left(\langle f, \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}} g\rangle\right)_{\boldsymbol{\alpha}\in Z^d}$ no está en $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Como vimos en los ejemplos anteriores, las sucesiones análogas en los espacios de Hilbert abstractos tienen peores propiedades de convergencia. Por ejemplo en la Subsección 6.2.1 analizamos un caso en que la sucesión es constantemente 1.

Por ello no podremos aplicar directamente esta última fórmula, sino que deberemos utilizar herramientas del cálculo funcional para encontrar a $\{f,g\}$ a partir de los valores de la sucesión $\left(\langle f, \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}} g\rangle\right)_{\boldsymbol{\alpha}\in Z^d}$. Como en estos espacios se consideran d operadores, antes de calcular $\{f,g\}$ deberemos analizar algunos resultados del cálculo funcional para varios operadores.

Los resultados clásicos del cálculo funcional para operadores normales se pueden extender a varios operadores normales que conmutan. Vamos dar una versión ligeramente modificada que se adapta mejor a nuestros operadores unitarios. En el Capítulo 8 la utilizaremos para definir el cálculo funcional boreliano y demostrar que las operaciones propuestas en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ están bien definidas.

Vamos a llamar $C(X)$ al conjunto de las funciones complejas continuas en el espacio métrico X, y llamaremos $B(\mathcal{H})$ al conjunto de los operadores acotados que actúan en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

7.1. Espectro

Para definir el cálculo funcional continuo, lo usual es restringir las operaciones al *espectro conjunto* de los operadores $T_1, \ldots, T_n$. A nosotros nos va a resultar más conveniente considerar las funciones definidas en todo el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Vamos a ver que este conjunto es suficientemente grande para incluir todo el espectro conjunto de los operadores, porque son unitarios. De esta manera podremos eliminar las referencias al espectro conjunto en gran parte del trabajo.

Para probar este resultado, vamos a utilizar el siguiente resultado, que se puede encontrar por ejemplo en el libro de Conway [Con97].

Proposición 7.1 ([Con97, Exercise VII.2.2])**.** *Sea $\mathcal{A}$ una $\mathbb{C}^*$-álgebra abeliana con un número finito de $\mathbb{C}^*$-generadores $a_1, \ldots, a_n$, entonces existe un subconjunto compacto X de $\mathbb{C}^n$ y un $*$-isomorfismo isométrico $\rho\colon \mathcal{A} \to C(X)$ tal que $\rho(a_k) = z_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, donde $z_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_k$.*

Donde *isométrico* significa que

$$\|\rho(a)\| = \|a\| \text{ para todo } a \in \mathcal{A},$$

$*$*-isomorfismo* significa que el mapa ρ es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-espacios vectoriales y que también es un $*$*-homeomorfismo algebraico*, o sea que

- $\mathcal{T}(fg) = \mathcal{T}(f)\mathcal{T}(g)$ para todo $f, g \in C(X)$
- $\mathcal{T}(\lambda f) = \lambda\mathcal{T}(f)$ para todo $f \in C(X)$, $\lambda \in \mathbb{C}$
- $\mathcal{T}(1) = 1$
- $\mathcal{T}(f^*) = \mathcal{T}(f)^*$.

La definición de $\mathbb{C}^*$-álgebras aparece en el Apéndice en la Definición A.1.

En el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en que estamos trabajando, se tienen elegidos operadores $T_1, \ldots, T_n$ y por ello vamos a considerar $a_k = T_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Los operadores $T_1, \ldots, T_n$ son normales y conmutan, así que la $\mathbb{C}^*$-álgebra $\mathcal{A}$ generada por ellos (y la identidad) es abeliana. Al conjunto X definido en la

Proposición 7.1 lo llamaremos *espectro conjunto* de los operadores $T_1, \ldots, T_n$ y lo denotaremos por

$$\sigma(\mathbf{T}) = \sigma(T_1, \ldots, T_n) = X.$$

Veremos que este conjunto tiene el mismo tipo de propiedades que el espectro de un operador y además como se relaciona con los espectros de cada operador.

Además definimos el mapa $\mathcal{T}' = \rho^{-1}$. Este es un $*$-isomorfismo isométrico de $C(\sigma(\mathbf{T}))$ en $\mathcal{A}$, con $\mathcal{T}'(z_k) = T_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Veremos ahora una caracterización simple de $\sigma(\mathbf{T})$.

Proposición 7.2. *Dado $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ formado por operadores normales que conmutan, entonces*

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{T}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n / \nexists A_1, \ldots, A_n \in B(\mathcal{H}) \\ /A_1(T_1 - x_1) + \cdots + A_n(T_n - x_n) = \mathrm{Id}\}.\end{aligned}$$

Demostración. Hay que probar las dos inclusiones:

Parte 1: Veamos que $\sigma(\mathbf{T}) \supset \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n / \nexists A_1, \ldots, A_n\}$

Tomemos un vector de números complejos $\mathbf{x}$ en $\sigma(\mathbf{T})$ y n operadores acotados $A_1, \ldots, A_n$ tales que

$$A_1(T_1 - x_1) + \cdots + A_n(T_n - x_n) = \mathrm{Id}$$

Dado un $\varepsilon > 0$ y un número M tal que $\|A_k\| \leqslant M$, $1 \leqslant k \leqslant n$. sea f una función continua en $\sigma(\mathbf{T})$, tal que $f(\mathbf{x}) = 1$, $\|f\|_{\infty,\sigma(\mathbf{T})} = 1$ y

$$\mathrm{sop}(f) \subset [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon] \times \cdots \times [x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon].$$

Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\|(T_k - x_k)\mathcal{T}'(f)\| = \|\mathcal{T}'((z_k - x_k)f)\| = \|(z_k - x_k)f\|_{\infty,\sigma(\mathbf{T})} \\ \leqslant \|(z_k - x_k)\|_{\infty,\mathrm{sop}(f)} \|f\|_{\infty,\sigma(\mathbf{T})} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Además

$$(A_1(T_1 - x_1) + \cdots + A_n(T_n - x_n))\mathcal{T}'(f) = \mathrm{Id}\,\mathcal{T}'(f),$$

así que por un lado

$$\begin{aligned}&\|(A_1(T_1 - x_1) + \cdots + A_n(T_n - x_n))\mathcal{T}'(f)\| \\ &\leqslant \|A_1(T_1 - x_1)\mathcal{T}'(f)\| + \cdots + \|A_n(T_n - x_n)\mathcal{T}'(f)\| \\ &\leqslant M\varepsilon + \cdots + M\varepsilon = nM\varepsilon\end{aligned}$$

y por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}&\|(A_1(T_1-x_1)+\cdots+A_n(T_n-x_n))\,\mathcal{T}'(f)\| =\\ &= \|\mathcal{T}'(f)\| = \|f\|_{\infty,\sigma(\mathbf{T})} = 1.\end{aligned}$$

Entonces, si tomamos un valor de $\varepsilon < 1/nM$ llegamos a una contradicción.

Parte 2: Veamos que $\sigma(\mathbf{T}) \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n / \nexists A_1, \ldots, A_n\}$

Para probar la otra inclusión, tomemos un vector de números complejos $\mathbf{x}$ afuera de $\sigma(\mathbf{T})$, y la función

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{|z_1-x_1|^2+\cdots+|z_n-x_n|^2}.$$

Esta función es continua en $\sigma(\mathbf{T})$, y es acotada porque $\sigma(\mathbf{T})$ es un conjunto compacto.

Llamamos $B = \mathcal{T}'(f)$ y $A_k = B(T_k-x_k)^*$ para $1 \leqslant k \leqslant n$, entonces

$$\begin{aligned}A_k(T_k-x_k) &= B(T_k-x_k)^*(T_k-x_k) = \mathcal{T}'(f(\mathbf{z}))\,\mathcal{T}'(z_k-x_k)^*\,\mathcal{T}'(z_k-x_k)\\ &= \mathcal{T}'\left(f(\mathbf{z})\,|(z_k-x_k)|^2\right)\end{aligned}$$

para $1 \leqslant k \leqslant n$.

De esta manera

$$\begin{aligned}&A_1(T_1-x_1)+\cdots+A_n(T_n-x_n)\\ &= \mathcal{T}'\left(f(\mathbf{z})\,|(z_1-x_1)|^2\right)+\cdots+\mathcal{T}'\left(f(\mathbf{z})\,|(z_n-x_n)|^2\right)\\ &= \mathcal{T}'\left(f(\mathbf{z})\left(|(z_1-x_1)|^2+\cdots+|(z_n-x_n)|^2\right)\right) = \mathcal{T}'(1) = \mathrm{Id}.\end{aligned}$$

□

Corolario 7.3. *Dado* $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ *formado por operadores normales que conmutan, entonces*

$$\sigma(\mathbf{T}) \subset \sigma(T_1) \times \cdots \times \sigma(T_n)$$

Demostración. Ahora tenemos que si $1 \leqslant k \leqslant n$ y $x_i \notin \sigma(T_k)$, entonces existe un operador B tal que $(T_k-x_k)B = \mathrm{Id}$. Si tomamos $A_k = B$, y $A_j = 0$ si $j \neq k$, $1 \leqslant j \leqslant n$ entonces tenemos que

$$A_1(T_1-x_1)+\cdots+A_n(T_n-x_n) = A_k(T_k-x_k) = \mathrm{Id},$$

y por ello $\sigma(\mathbf{T}) \subset \sigma(T_1) \times \cdots \times \sigma(T_n)$. □

En nuestro caso, vamos a trabajar con operadores $T_1, \ldots, T_n$ que son unitarios, no sólo normales. Por ello $\sigma(T_k) \subset \mathbb{T}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ y entonces tenemos que $\sigma(\mathbf{T}) \subset \mathbb{T}^n$.

7.2. Cálculo funcional continuo

Ahora damos la formulación clásica del cálculo funcional continuo para varios operadores, en el caso en que son unitarios. Además veremos una versión adaptada que considera a las funciones definidas sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ en vez de definidas sobre el espectro.

Proposición 7.4. *Sea $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ un vector de operadores unitarios que conmutan, entonces existe un conjunto cerrado $\sigma(\mathbf{T})$ incluido en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ y único mapa $\mathcal{T}' \colon C(\sigma(\mathbf{T})) \to B(\mathcal{H})$ con las siguientes propiedades:*

1. *$\mathcal{T}'$ es un *-homeomorfismo algebraico*
2. *$\|\mathcal{T}'(f)\| = \|f\|_{\infty,\sigma(\mathbf{T})}$ para toda función $f \in C(\sigma(\mathbf{T}))$*
3. *$\mathcal{T}'(z_k) = T_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$*

Demostración. Es justamente el $\mathcal{T}'$ definido anteriormente, teniendo en cuenta que como los operadores son unitarios el espectro conjunto está incluido en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. □

Proposición 7.5. *Sea $\mathbf{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ un vector de operadores unitarios que conmutan, entonces existe un único mapa $\mathcal{T} \colon C(\mathbb{T}^n) \to B(\mathcal{H})$ con las siguientes propiedades:*

1. *$\mathcal{T}$ es un *-homeomorfismo algebraico*
2. *$\|\mathcal{T}(f)\| \leqslant \|f\|_{\infty,\mathbb{T}^n}$ para toda función $f \in C(\mathbb{T}^n)$*
3. *$\mathcal{T}(z_k) = T_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$*

Demostración. Tomamos el mapa $\mathcal{T}'$ definido anteriormente. Como vimos que $\sigma(\mathbf{T}) \subset \mathbb{T}^n$, definimos la extensión del mapa $\mathcal{T}'$ de la siguiente manera

$$\mathcal{T}(f) = \mathcal{T}'\left(f|_{\sigma(\mathbf{T})}\right) \text{ para toda función } f \in C(\mathbb{T}^n)$$

Esta extensión en nuevamente un *-homeomorfismo, tal que $\mathcal{T}(z_k) = T_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Como tomamos la función restringida nos queda que

$$\|\mathcal{T}(f)\| = \|f\|_{\infty,\sigma(\mathbf{T})} \leqslant \|f\|_{\infty,\mathbb{T}^n}.$$

□

Por ejemplo, si f es un monomio trigonométrico

$$f = c\mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}} = cz_1^{\boldsymbol{\alpha}_1} \cdots z_n^{\boldsymbol{\alpha}_n},$$

donde c es un número complejo y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son enteros, la acción de este mapa es

$$\mathcal{T}(f) = c\mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}} = cT_1^{\boldsymbol{\alpha}_1} \cdots T_n^{\boldsymbol{\alpha}_n}.$$

Por linealidad, se tiene inmediatamente que para polinomios trigonométricos

$$f = p(z) = \sum_{\mathbf{k} \text{ finito}} a_{\mathbf{k}} \mathbf{z}^{\mathbf{k}}$$

podemos definir el operador

$$\mathcal{T}(f) = p(\mathbf{T}) = \sum_{\mathbf{k} \text{ finito}} a_{\mathbf{k}} \mathbf{T}^{\mathbf{k}}$$

Como es usual en el cálculo funcional continuo para un solo operador, vamos a extender la notación usada para polinomios $p(\mathbf{T})$ a las funciones continuas. Si f es una función continua en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, definimos el operador

$$f(\mathbf{T}) = \mathcal{T}(f).$$

En general esta será la notación que vamos a utilizar.

Capítulo 8

Producto y multiplicador en abstracto

En este Capítulo vamos a ver como definir el producto en frecuencias y el multiplicador en los espacios de Hilbert abstractos. Estas definiciones van a ser compatibles con las de los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$ y las de los ejemplos vistos en el Capítulo 6. En particular veremos que siempre es posible definir al producto en frecuencias como una medida. También discutiremos las propiedades más sencillas de estas operaciones.

8.1. Producto en frecuencias

En el caso abstracto vamos a definir el producto en frecuencias extendido a partir de una de las propiedades del producto en frecuencias de los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$. La propiedad que vamos a utilizar es la Ecuación (2.2), que volvemos a copiar

$$\widehat{\{\varphi, \psi\}}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \varphi, \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}} \psi \rangle \tag{8.1}$$

Esto es, dadas dos funciones φ y ψ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tomamos el conjunto de todas las traslaciones enteras de ψ, o sea $\{\mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi / \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n\}$ y calculamos los productos escalares contra la otra función fija φ. Esto nos da una sucesión $(\langle \varphi, \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi \rangle)_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n}$ y buscamos la única función $\{\varphi, \psi\}$ en $L^1(\mathbb{T}^n)$ cuya transformada de Fourier da justo la sucesión de productos escalares que obtuvimos.

En el caso de los espacios invariantes por traslaciones pudimos ver que dado cualquier par de funciones, la sucesión que se obtiene $(\langle \varphi, \mathbf{E}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi \rangle)_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n}$ está en el álgebra $\widehat{L^1(\mathbb{T}^n)}$, o sea que en este caso $\{\varphi, \psi\}$ es una función de $L^1(\mathbb{T}^n)$.

Utilizamos el mismo procedimiento para definir el producto en frecuencias en abstracto. Dados dos elementos φ y ψ en $\mathcal{H}$, tomamos la sucesión de productos escalares $\left(\langle\varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\rangle\right)_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^n}$ usando ahora los operadores que conmutan $T_1, \ldots, T_n$. En este caso el problema es que la serie no está necesariamente en $\widehat{L^1(\mathbb{T}^n)}$, o sea que quizá no sea la transformada de Fourier de ninguna función de $\widehat{L^1(\mathbb{T}^n)}$. Así que debemos extender las posibles elecciones de los resultados de esta operación a un espacio más grande que contenga a $L^1(\mathbb{T}^n)$. Veremos que este espacio son las medidas borelianas complejas sobre $\mathbb{T}^n$.

De aquí en adelante consideraremos varias veces medidas definidas en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. En la mayoría de los casos serán medidas complejas borelianas regulares y finitas. A menos que aclaremos lo contrario las medidas con las que trabajaremos serán de este tipo. En los casos en que tengamos que utilizar medidas que solamente toman valores cero o positivos, diremos que es una *medida positiva.*

8.1.1. Definición

Vamos ahora a definir formalmente esta operación llamada producto en frecuencias y ver porque alcanza con considerar a las medidas como posibles resultados. Dados φ y ψ dos elementos de $\mathcal{H}$, para cada función continua $f \circ \mathbf{z} = f(\mathbf{z}(\boldsymbol{\omega}))$ en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, consideramos la funcional

$$f \circ \mathbf{z} \to \langle f(\mathbf{T})\varphi, \psi\rangle .$$

Esta funcional es lineal y continua ya que

$$|\langle f(\mathbf{T})\varphi, \psi\rangle| \leqslant \|f(\mathbf{T})\varphi\| \|\psi\| \leqslant \|f(\mathbf{T})\| \|\varphi\| \|\psi\| \leqslant \|f \circ \mathbf{z}\|_\infty \|\varphi\| \|\psi\| .$$

Por el teorema de representación de Riesz ([Con97]), existe una única medida compleja, que notaremos como $\{\varphi, \psi\}$, definida sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tal que para cada función continua f vale

$$\langle f(\mathbf{T})\varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} f(\mathbf{z}(\boldsymbol{\omega}))\, \mathrm{d}\{\varphi, \psi\}(\boldsymbol{\omega}) .$$

Esta medida será la generalización del producto.

En particular, podemos calcular los momentos de esta medida, o sea la secuencia de valores

$$\int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{z}^{-\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\{\varphi, \psi\}(\boldsymbol{\omega}) = \left\langle \mathbf{T}^{-\boldsymbol{\alpha}}\varphi, \psi\right\rangle ,$$

que se puede reescribir utilizando la transformada de Fourier como

$$\widehat{\{\varphi, \psi\}}(\alpha) = \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{z}^{-\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\{\varphi, \psi\}(\boldsymbol{\omega}) = \left\langle \mathbf{T}^{-\boldsymbol{\alpha}}\varphi, \psi\right\rangle = \langle\varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\rangle .$$

Agrupando el primer y último miembro reconstruimos la Ecuación (8.1), o sea

$$\widehat{\{\varphi,\psi\}}(\alpha) = \langle \varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\rangle .$$

La transformada de Fourier definida sobre el espacio de las medidas es inyectiva. Así que la sucesión de los momentos alcanza para determinar de manera única la medida correspondiente al producto.

Definición 8.1. Dados dos elementos φ y ψ de $\mathcal{H}$, definimos $\{\varphi,\psi\}$ como la única medida compleja sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tal que

$$\widehat{\{\varphi,\psi\}}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\rangle .$$

En estos casos, estamos identificando como es usual a las funciones de $L^1(\mathbb{T}^n)$ con las medidas absolutamente continuas sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.

La transformada de Fourier sobre las medidas complejas sobre el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ en las series de $\ell^\infty(\mathbb{Z}^n)$ es inyectiva, aunque no sobreyectiva. Así que usando la inversa sobre la imagen podemos escribir al menos formalmente

$$\{\varphi,\psi\}(\boldsymbol{\omega}) = \left(\left(\langle \varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\rangle\right)_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^n}\right)^{\vee}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^n} \langle \varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\rangle\, \mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{\omega}),$$

aunque la serie no converge puntualmente.

8.1.2. Propiedades

Veamos algunas propiedades elementales del producto en frecuencias en abstracto.

Proposición 8.2. *Sean φ, ψ y ϕ elementos de $\mathcal{H}$, y sea λ un número complejo. Entonces valen las siguientes propiedades:*

1. $\{\lambda\varphi,\psi\} = \lambda\{\varphi,\psi\}$
2. $\{\varphi+\phi,\psi\} = \{\varphi,\psi\} + \{\phi,\psi\}$
3. $\{\psi,\varphi\} = \overline{\{\varphi,\psi\}}$
4. $\{\varphi,\varphi\} \geqslant 0$ *y en particular* $\{\varphi,\varphi\} = 0$ *si y solo si* $\varphi = 0$

Demostración. Los primeros dos Ítemes se ven directamente de la linealidad de la transformada de Fourier. Por ejemplo

$$\widehat{\{\lambda\varphi,\psi\}}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle\lambda\varphi,\mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\rangle = \lambda\langle\varphi,\mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\rangle = \lambda\widehat{\{\varphi,\psi\}}(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda\,\widehat{\{\varphi,\psi\}}(\boldsymbol{\alpha})\,.$$

El segundo se demuestra de manera análoga. Para el tercero tenemos que

$$\widehat{\{\psi,\varphi\}}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle\psi,\mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\varphi\rangle = \overline{\langle\varphi,\mathbf{T}^{-\boldsymbol{\alpha}}\psi\rangle} = \overline{\widehat{\{\psi,\varphi\}}(-\boldsymbol{\alpha})} = \overline{\widehat{\{\psi,\varphi\}}}(\boldsymbol{\alpha})\,.$$

En particular usando el tercer Ítem obtenemos que $\{\varphi,\varphi\}$ es real, y sólo falta ver que es positiva. La demostración del cuarto Ítem es más fácil utilizando una función auxiliar continua f tal que $f(\mathbf{z}) \geqslant 0$. Tomamos $g = \bar{g} = \sqrt{f}$ que también es continua y entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} f(\mathbf{z})\,\mathrm{d}\{\varphi,\varphi\}(\boldsymbol{\omega}) &= \langle f(\mathbf{T})\varphi,\varphi\rangle \\ &= \langle g(\mathbf{T})^* g(\mathbf{T})\varphi,\varphi\rangle = \langle g(\mathbf{T})\varphi, g(\mathbf{T})\varphi\rangle \geqslant 0.\end{aligned}$$

Como integrando cualquier función no negativa y continua f con la medida $\{\varphi,\varphi\}$ da un valor no negativo, la medida es positiva.

Además, tomando la función constante $f = 1$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}^n} 1\,\mathrm{d}\{\varphi,\varphi\}(\boldsymbol{\omega}) = \langle\varphi,\varphi\rangle \geqslant 0, \tag{8.2}$$

por lo que $\{\varphi,\varphi\}$ es la medida cero sólo si $\varphi = 0$. □

Es importante notar que $\{\varphi,\varphi\}$ es una medida positiva.

Nota 8.3. Es más, la Ecuación (8.2) dice que si φ es un elementos de $\mathcal{H}$ entonces la norma de la medida $\{\varphi,\varphi\}$ es igual al cuadrado de la norma de φ

$$\|\{\varphi,\varphi\}\|_{\text{medida}} = \int \mathrm{d}\{\varphi,\varphi\}(\boldsymbol{\omega}) = \langle\varphi,\varphi\rangle\,.$$

En particular si $\{\varphi,\varphi\}$ es una función en $L^1(\mathbb{T}^n)$

$$\|\{\varphi,\varphi\}\|_1 = \int \{\varphi,\varphi\}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \langle\varphi,\varphi\rangle\,.$$

Va a ser útil más adelante la siguiente propiedad.

Lema 8.4. *Sean φ y ψ dos elementos de $\mathcal{H}$. Descompongamos $\psi = \psi_\parallel + \psi_\perp$, donde $\psi_\parallel$ es la proyección de ψ en $S(\varphi)$ y $\psi_\perp$ es ortogonal a este espacio. Entonces $\{\varphi,\psi\} = \{\varphi,\psi_\parallel\}$.*

Demostración. Usamos la descomposición de ψ para descomponer $\{\varphi, \psi\}$, de manera que

$$\{\varphi, \psi\} = \left\{\varphi, \psi_{\parallel} + \psi_{\perp}\right\} = \left\{\varphi, \psi_{\parallel}\right\} + \{\varphi, \psi_{\perp}\}.$$

Solo nos falta ver que $\{\varphi, \psi_{\perp}\} = 0$. Para ello usamos que $\psi_{\perp}$ es ortogonal a $S(\varphi)$ y entonces para todo vector de enteros

$$\widehat{\{\varphi, \psi_{\perp}\}}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle \varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}} \psi_{\perp} \rangle = \left\langle \mathbf{T}^{-\boldsymbol{\alpha}} \varphi, \psi_{\perp} \right\rangle = 0.$$

□

8.2. Multiplicador

Vamos a definir una nueva operación a la que también llamaremos multiplicador, para que cumpla el papel que tenía el multiplicador en los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Habíamos visto en la Ecuación (2.5) que si $m(\mathbf{z}) = (m \circ \mathbf{z})$ es una función continua entonces

$$(m \circ \mathbf{z}) \bullet \varphi = m(\mathbf{E})\, \varphi.$$

De esta propiedad concluimos que $(m \circ \mathbf{z}) \bullet \varphi$ está en $S(\varphi)$, que es el subespacio generado por las traslaciones de φ.

Esta definición se puede utilizar en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ abstracto, utilizando los operadores correspondientes al cálculo funcional continuo que vimos en la Sección 7.2. Sin embargo necesitamos extenderla para utilizarla con funciones no continuas. En particular vamos a necesitar una definición que se pueda aplicar a funciones características e incluso a funciones no acotadas. En estos casos puede no existir un operador acotado $m(\mathbf{T})$, pero sin embargo puede estar definido $(m \circ \mathbf{z}) \bullet \varphi$ al menos para algunos elementos φ.

Para extender la operación, vamos a partir de la forma débil de la Ecuación anterior. Para toda función ψ en $L^2(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\langle (m \circ \mathbf{z}) \bullet \varphi, \psi \rangle = \langle m(\mathbf{E})\, \varphi, \psi \rangle.$$

Primero reescribimos el producto escalar en términos del producto en frecuencias

$$\langle (m \circ \mathbf{z}) \bullet \varphi, \psi \rangle = \{(m \circ \mathbf{z}) \bullet \varphi, \psi\}^{\wedge}(\mathbf{0}) = \int_{\mathbb{T}^n} \{(m \circ \mathbf{z}) \bullet \varphi, \psi\}(\omega)\, \mathrm{d}\,\omega,$$

y expandiendo las definiciones del producto y multiplicador queda

$$\begin{aligned}\langle (m\circ \mathbf{z})\bullet \varphi ,\psi \rangle &= \int_{\mathbb{T}^n}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n} m\left(\mathbf{z}\left(\omega\right)\right)\check{\varphi}\left(\omega+\mathbf{k}\right)\overline{\check{\psi}\left(\omega+\mathbf{k}\right)}\,\mathrm{d}\,\omega \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} m\left(\mathbf{z}\left(\omega\right)\right)\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^n}\check{\varphi}\left(\omega+\mathbf{k}\right)\overline{\check{\psi}\left(\omega+\mathbf{k}\right)}\,\mathrm{d}\,\omega \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} m\left(\mathbf{z}\left(\omega\right)\right)\left\{\varphi,\psi\right\}\left(\omega\right)\mathrm{d}\,\omega.\end{aligned}$$

Agrupando el primer y último miembro tenemos

$$\langle (m\circ \mathbf{z})\bullet \varphi ,\psi \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} m\left(\mathbf{z}\left(\omega\right)\right)\left\{\varphi,\psi\right\}\left(\omega\right)\mathrm{d}\,\omega.$$

Esta es la fórmula que vamos a utilizar como definición del multiplicador para en el caso de tener un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ abstracto, aunque utilizaremos la nueva notación de manera que si el producto en frecuencias es una función de $L^1\left(\mathbb{T}^n\right)$ queda escrito como

$$\langle (m\circ \mathbf{z})\bullet \varphi ,\psi \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} m\left(\mathbf{z}\left(\omega\right)\right)\left\{\varphi,\psi\right\}\left(\omega\right)\mathrm{d}\,\omega.$$

Aunque en los casos en que el producto en frecuencias es una medida, es más correcto escribirlo como

$$\langle (m\circ \mathbf{z})\bullet \varphi ,\psi \rangle = \int_{\mathbb{T}^n} m\left(\mathbf{z}\left(\omega\right)\right)\mathrm{d}\left\{\varphi,\psi\right\}\left(\omega\right).$$

8.2.1. Definición

Ahora vamos a ver que es posible utilizar la Ecuación anterior para definir una operación como la buscada.

Fijemos un elemento φ de $\mathcal{H}$. El subespacio generado $S\left(\varphi\right)$ es cerrado e invariante por $\mathbf{T}$, así que podemos restringir momentáneamente todas las operaciones a ese subespacio. Dada una función continua $m\left(\mathbf{z}\right) = (m\circ\mathbf{z})$ definida en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, está definido el operador $m\left(\mathbf{T}\right)$ como vimos en la Sección 7.2.

Calculemos entonces

$$\begin{aligned}\left\|m\left(\mathbf{T}\right)\varphi\right\|^2 &= \langle m\left(\mathbf{T}\right)\varphi, m\left(\mathbf{T}\right)\varphi\rangle = \langle m\left(\mathbf{T}\right)^* m\left(\mathbf{T}\right)\varphi,\varphi\rangle \\ &= \langle \overline{m}\left(\mathbf{T}\right) m\left(\mathbf{T}\right)\varphi,\varphi\rangle = \left\langle \left|m\right|^2\left(\mathbf{T}\right)\varphi,\varphi\right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}^n}\left|m\left(\mathbf{z}\left(\omega\right)\right)\right|^2\mathrm{d}\left\{\varphi,\varphi\right\}\left(\omega\right) = \left\|m\right\|^2_{L^2\left(\left\{\varphi,\varphi\right\}\right)},\end{aligned}$$

así que
$$\|m(\mathbf{T})\varphi\| = \|m\|^2_{L^2(\{\varphi,\varphi\})} \tag{8.3}$$

Dado otro elemento ψ de $S(\varphi)$, podemos definir la funcional $\mathcal{T}_\psi$ tal que para cada función continua m definida en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$.

$$\mathcal{T}_\psi(m \circ \mathbf{z}) = \int_{\mathbb{T}^n} m(\mathbf{z}(\omega))\,\mathrm{d}\{\varphi,\psi\}(\omega).$$

Esta funcional es acotada porque

$$|\mathcal{T}_\psi(m \circ \mathbf{z})| = |\langle m(\mathbf{T})\varphi, \psi\rangle| \leqslant \|m(\mathbf{T})\varphi\|\,\|\psi\| = \|m\|^2_{L^2(\{\varphi,\varphi\})}\,\|\psi\|$$

así que $\mathcal{T}_\psi$ se extiende linealmente de manera única a cualquier función $m(\mathbf{z})$ en $L^2(\{\varphi,\varphi\})$.

Ahora resulta útil cambiar el punto de vista. Fijando una función $m(\mathbf{z})$ en $L^2(\{\varphi,\varphi\})$, podemos definir otra funcional Υ_m. Al aplicar esta funcional a un elemento ψ de $S(\varphi)$ nos da

$$\Upsilon_m(\psi) = \mathcal{T}_\psi(m).$$

Esta funcional también es lineal y continua porque

$$\begin{aligned}\|\Upsilon_m\| &= \sup_{\|\psi\|=1} |\Upsilon_m(\psi)| = \sup_{\|\psi\|=1} |\mathcal{T}_\psi(m)| \\ &\leqslant \sup_{\|\psi\|=1} \|m\|^2_{L^2(\{\varphi,\varphi\})}\,\|\psi\| = \|m\|^2_{L^2(\{\varphi,\varphi\})}.\end{aligned}$$

Así que como $S(\varphi)$ es un espacio de Hilbert, existe un único elemento $\rho_{\varphi,m}$ en $S(\varphi)$ tal que $\Upsilon_m(\psi) = \langle \rho_{\varphi,m}, \psi\rangle$ para todo ψ en $S(\varphi)$. Este elemento será justamente el valor del multiplicador.

Definición 8.5. Dado un elemento φ de $\mathcal{H}$ y una función m en $L^2(\{\varphi,\varphi\})$, definimos $m \bullet \varphi$ como el único elemento de $S(\varphi)$ tal que para todo elemento ψ en $S(\varphi)$ se verifica que

$$\langle m \bullet \varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} m(\omega)\,\mathrm{d}\{\varphi,\psi\}(\omega).$$

Si $(m \circ \mathbf{z})$ es una función boreliana y acotada, entonces $(m \circ \mathbf{z}) \bullet \varphi$ está definida para todo elemento φ. Vamos a ver que en realidad en ese caso podemos definir un operador acotado $m(\mathbf{T})$ tal que $m(\mathbf{T})\varphi = (m \circ \mathbf{z}) \bullet \varphi$. Es más, veremos que si $m(\mathbf{z})$ es una función continua entonces $m(\mathbf{T})$ es el operador que se obtiene del cálculo funcional continuo.

8.2.2. Propiedades

Vamos a ver algunas propiedades elementales de la nueva operación.

Proposición 8.6. *Sea φ un elemento de $\mathcal{H}$:*

1. *Si λ es un número complejo y m es una función en $L^2(\{\varphi,\varphi\})$ entonces $(\lambda m)\bullet\varphi = m\bullet(\lambda x) = \lambda(m\bullet\varphi)$.*
2. *Si m y $\tilde{m}$ son dos funciones en $L^2(\{\varphi,\varphi\})$, entonces $(m+\tilde{m})\bullet\varphi = m\bullet\varphi + \tilde{m}\bullet\varphi$.*
3. *Si $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector de enteros, entonces $\mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}}\bullet\varphi = \mathbf{T}^{\alpha}\varphi$, en particular $1\bullet\varphi = \varphi$.*
4. *Si $m(\mathbf{z})$ es una función continua en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, entonces $m(\mathbf{z})\bullet\varphi = m(\mathbf{T})\varphi$.*

Demostración. Los primeros dos Ítemes se demuestran sin dificultad.

Para probar el Ítem 3, usaremos la forma débil de la ecuación. Para todo elemento ψ en $S(\varphi)$ tenemos que

$$\langle \mathbf{T}^{\alpha}\varphi,\psi\rangle = \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\{\varphi,\psi\}(\boldsymbol{\omega}) = \langle \mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}}\bullet\varphi,\psi\rangle .$$

Entonces como $\mathbf{T}^{\alpha}\varphi$ y $\mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}}\bullet\varphi$ están en $S(\varphi)$ tienen que ser iguales. Por linealidad, esta igualdad se extiende inmediatamente a los polinomios trigonométricos $p(\mathbf{z})$, entonces

$$p(\mathbf{z})\bullet\varphi = p(\mathbf{T})\varphi.$$

Veamos ahora el Ítem 4. Por el Ítem 2 de la Proposición 7.5 la asignación $m(\mathbf{z}) = (m\circ\mathbf{z}) \to m(\mathbf{T})\varphi$ es continua en la norma $\|\ \|_\infty$. La asignación $m(\mathbf{z}) \to m(\mathbf{z})\bullet\varphi$ es continua en la misma norma, debido a que

$$\begin{aligned}\|m(\mathbf{z})\bullet\varphi\| &= \left\|\Upsilon_{m(\mathbf{z})}\right\| = \sup_{\|\psi\|=1}\left|\Upsilon_{m(\mathbf{z})}(\psi)\right| = \sup_{\|\psi\|=1}\left|\mathcal{T}_{\psi}(m(\mathbf{z}))\right| \\ &= \sup_{\|\psi\|=1}\left|\langle m(\mathbf{T})\varphi,\psi\rangle\right| \leqslant \sup_{\|\psi\|=1}\|m(\mathbf{T})\varphi\|\,\|\psi\| \\ &= \|m(\mathbf{T})\varphi\| \leqslant \|m(\mathbf{T})\|\,\|\varphi\| \leqslant \|m(\mathbf{z})\|_\infty\,\|\varphi\| .\end{aligned}$$

Como ambas coinciden en un los polinomios trigonométricos, que son densos en las funciones continuas, las dos asignaciones tienen que ser iguales para toda función continua m. □

En el Ítem 3 se ve el caso más sencillo, en el que la función es una exponencial compleja. Cuando m es continua, del Ítem 4 se deduce una de las propiedades que nos interesaba preservar en el multiplicador, o sea que

$$m \bullet \varphi = m(\mathbf{T})\,\varphi.$$

De la misma manera, si m es una función boreliana y acotada, definida sobre el toro n-dimensional, entonces para todo elemento φ está definido $m \bullet \varphi$. La transformación

$$\varphi \to m(\mathbf{T})\,\varphi$$

es lineal y continua ya que

$$\|m \bullet \varphi\| \leqslant \|m\|_\infty \|\varphi\|.$$

Así que se puede representar mediante un operador acotado de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$. En general a este operador también se lo conoce como $m(\mathbf{T})$, y esta operación se conoce como cálculo funcional boreliano, que es una extensión del cálculo funcional continuo.

Algo importante es que como las medidas $\{\varphi, \psi\}$, y en particular $\{\varphi, \varphi\}$, no son siempre absolutamente continuas. En la Subsección 6.2.1 vimos un ejemplo en el que es una medida del tipo delta. En estos casos, es importante el valor que toma la función m en los puntos particulares, o sobre los conjuntos de medida de Lebesgue cero. Debido a esto no es posible cocientar las funciones borelianas que difieren sólo en un conjunto de medida cero como es usual.

Ahora veremos una propiedad que relaciona el producto en frecuencias con el multiplicador.

Proposición 8.7. *Sea φ un elemento de $\mathcal{H}$ y m una función en $L^2(\{\varphi, \varphi\})$. Si ψ es otro elemento de $\mathcal{H}$, entonces $\{m \bullet \varphi, \psi\} = m\{\varphi, \psi\}$.*

Demostración. Vamos a demostrarlo en varios pasos.

Paso 1. Primero veamos que si $\boldsymbol{\alpha}$ es un vector de enteros, entonces $\{\varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\} = \mathbf{z}^{-\boldsymbol{\alpha}}\{\varphi, \psi\}$

Para cualquier vector de enteros $\boldsymbol{\beta}$ tenemos que

$$\begin{aligned}(\{\varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\})^\wedge(\beta) &= \left\langle \varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\beta}}\mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi \right\rangle = \left\langle \mathbf{T}^{-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}}\varphi, \psi \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{z}^{-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}}\,\mathrm{d}\{\varphi, \psi\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{z}^{-\boldsymbol{\beta}}\,\mathrm{d}\left(\mathbf{z}^{-\boldsymbol{\alpha}}\{\varphi, \psi\}\right)(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \left(\mathbf{z}^{-\boldsymbol{\alpha}}\{\varphi, \psi\}\right)^\wedge(\beta).\end{aligned}$$

Paso 2. Ahora veamos que $\{m \bullet \varphi, \psi\} = m\{\varphi, \psi\}$.

Para todo vector de enteros $\boldsymbol{\alpha}$, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left(\{m \bullet \varphi, \psi\}\right)^{\wedge}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle m \bullet \varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\rangle &= \int_{\mathbb{T}^n} m(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\{\varphi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\psi\}(\mathbf{z}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \mathbf{z}^{-\boldsymbol{\alpha}} m(\mathbf{z})\, \mathrm{d}\{\varphi, \psi\}(\mathbf{z}) = \left(m\{\varphi, \psi\}\right)^{\wedge}(\boldsymbol{\alpha}).
\end{aligned}
$$

□

La propiedad que acabamos de demostrar relaciona al multiplicador con el producto en frecuencias en el caso abstracto. Esta propiedad es una generalización de propiedad análoga de las operaciones en los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$.

Además, esta propiedad es la linealidad del producto en frecuencias con respecto a funciones en $L^2(\{\varphi, \varphi\})$. O sea que el producto en frecuencias es sesquilineal no solo con respecto a los números complejos, sino que también es sesquilineal con las funciones de $L^2(\{\varphi, \varphi\})$ usando como producto el multiplicador. El análogo de esta propiedad en los espacios de Hilbert (sin traslaciones) es

$$\lambda \langle v, w\rangle = \langle \lambda v, w\rangle.$$

Vamos a finalizar con algunas propiedades adicionales, que vamos a necesitar más adelante.

Proposición 8.8. *Sea φ un elemento de $\mathcal{H}$ y sea $\Pi\colon L^2(\{\varphi, \varphi\}) \to S(\varphi)$ la función definida por $\Pi(m) = m \bullet \varphi$, entonces Π es un isomorfismo isométrio.*

Demostración. Si m es una función continua, tenemos que Π es una isometría por la Ecuación (8.3). Como las funciones continuas son un subconjunto denso de $L^2(\{\varphi, \varphi\})$, es posible extender la isometría a todo este espacio.

Para cada vector de enteros $\boldsymbol{\alpha}$ la función $\mathbf{z}^{\boldsymbol{\alpha}}$ es continua y está en $L^2(\{\varphi, \varphi\})$, así que la imagen de Π incluye todas las traslaciones de φ. Por ser una isometría, incluye a todo el subespacio cerrado generado por estas traslaciones que es justamente $S(\varphi)$, así que es suryectiva. □

Es útil reescribirlo de la siguiente manera:

Nota 8.9 (parametrización). Para cada elemento ψ en $S(\varphi)$, existe una única función $m = \Pi^{-1}(\psi)$ en $L^2(\{\varphi, \varphi\})$ tal que $\psi = m \bullet \varphi$.

Proposición 8.10 (asociatividad)**.** *Sea φ un elemento de $\mathcal{H}$ y sea $\tilde{m}$ una función boreliana en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tal que está definido $\tilde{m} \bullet \varphi$. Sea m otra función boreliana en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Entonces $(m\tilde{m}) \bullet \varphi$ está definido si y sólo si $m \bullet (\tilde{m} \bullet \varphi)$ está definido. En ese caso $m \bullet (\tilde{m} \bullet \varphi) = (m\tilde{m}) \bullet \varphi$.*

Demostración. La función $m\tilde{m}$ es también boreliana. Calculemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^n} |m(\boldsymbol{\omega})|^2 \,\mathrm{d}\{\tilde{m}\bullet\varphi, \tilde{m}\bullet\varphi\}(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{T}^n} |m(\boldsymbol{\omega})|^2 |\tilde{m}(\boldsymbol{\omega})|^2 \,\mathrm{d}\{\varphi,\varphi\}(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} |m\tilde{m}(\boldsymbol{\omega})|^2 \,\mathrm{d}\{\varphi,\varphi\}(\boldsymbol{\omega})\end{aligned}$$

Esto nos dice que la norma de m en $L^2(\{\tilde{m}\bullet\varphi, \tilde{m}\bullet\varphi\})$ es igual a la norma de $m\tilde{m}$ en $L^2(\{\varphi,\varphi\})$. Así que si está definido $(m\tilde{m})\bullet\varphi$ o $m\bullet(\tilde{m}\bullet\varphi)$ entonces el otro también lo está. Falta ver que son iguales.

Es claro que $(m\tilde{m})\bullet\varphi$ está en $S(\varphi)$. Además, como $\tilde{m}\bullet\varphi$ está en $S(\varphi)$, entonces el $S(\tilde{m}\bullet\varphi)$ un subespacio de $S(\varphi)$, así que $m\bullet(\tilde{m}\bullet\varphi)$ está en $S(\varphi)$. Entonces, tomando cualquier elemento ψ en $S(\varphi)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle m\bullet(\tilde{m}\bullet\varphi), \psi\rangle &= \int_{\mathbb{T}^n} m(\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}\{\tilde{m}\bullet\varphi, \psi\}(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} m(\boldsymbol{\omega})\,\tilde{m}(\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}\{\varphi,\psi\}(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} (m\tilde{m})(\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}\{\varphi,\psi\}(\boldsymbol{\omega}) = \langle (m\tilde{m})\bullet\varphi, \psi\rangle,\end{aligned}$$

y por lo tanto son iguales. □

En particular, si m y $\tilde{m}$ son borelianas y acotadas todos los multiplicadores están definidos y siempre se verifica que $m\bullet(\tilde{m}\bullet\varphi) = (m\tilde{m})\bullet\varphi$.

Proposición 8.11. *Sea φ y ψ dos elementos de $\mathcal{H}$ y sea m una función en $L^2(\{\varphi,\varphi\})$ y $L^2(\{\psi,\psi\})$ entonces $m\bullet(\varphi+\psi) = m\bullet\varphi + m\bullet\psi$.*

Demostración. Para todo elemento ϕ tenemos que

$$\begin{aligned}\langle m\bullet(\varphi+\psi), \phi\rangle &= \int_{\mathbb{T}^n} m(\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}\{(\varphi+\psi), \phi\}(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} m(\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}\{\varphi,\phi\}(\boldsymbol{\omega}) + \int_{\mathbb{T}^n} m(\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}\{\psi,\phi\}(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \langle m\bullet\varphi, \phi\rangle + \langle m\bullet\psi, \phi\rangle = \langle m\bullet\varphi + m\bullet\psi, \phi\rangle.\end{aligned}$$

□

8.3. Estructura de las operaciones

Ahora vamos a recopilar las propiedades que demostramos anteriormente. Veremos que son similares a las propiedades que se utilizan para definir el Módulo de Hilbert. En esta versión, las operaciones no están restringidas a un subespacio conveniente. Por ello algunas de las operaciones no son cerradas, otras no estén definidas y aparecen problemas técnicos similares. Sin embargo a veces necesitaremos usarlas con está máxima extensión en las demostraciones que aparecen más adelante. En la Subsección 10.1.2 veremos que es posible restringir las operaciones y obtener la estructura de Módulo de Hilbert.

La suma $+\colon \mathcal{H}\times\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ hace que $\mathcal{H}$ sea un *grupo abeliano.*

- $(\psi+\phi)+\varphi=\psi+(\phi+\varphi)$
- $\psi+\phi=\phi+\psi$
- Existe un elemento 0 de $L^2(\mathbb{R})^A$ tal que $0+\psi=\psi$
- Para todo ψ de $L^2(\mathbb{R})^A$ existe otro elemento ϕ de M tal que $\psi+\phi=0$. La notación usual de ϕ es $-\psi$.

Las cuatro propiedades anteriores vienen de la estructura de $\mathcal{H}$ como espacio vectorial, así que no hace falta demostrarlas.

Se tiene un producto $\bullet\colon C\subset\mathcal{B}(\mathbb{T}^n)\times\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ compatible con el producto del álgebra $\mathcal{B}(\mathbb{T}^n)$, formada por las funciones borelianas no necesariamente acotadas. Este producto en frecuencias está solamente definido para el subconjunto C, formado por los pares (m,ψ) tales que m está en $L^2(\{\psi,\psi\})$.

- $(1\bullet\psi)=\psi$ en donde 1 es la unidad de función constante 1 en $\mathbb{T}^n$ (Demostrada en la Proposición 8.6)
- $(m\bullet(n\bullet\psi))=(mn)\bullet\psi$, si ambos miembros están definidos (Demostrada en la Proposición 8.10)

El producto $\bullet$ es lineal en ambas variables

- $((m+n)\bullet\psi)=m\bullet\psi+n\bullet\psi$ (Demostrada en la Proposición 8.6)
- $(m\bullet(\psi+\phi))=m\bullet\psi+m\bullet\phi$ (Demostrada en la Proposición 8.11)

Se tiene un producto interno $\{\ ,\ \}:\mathcal{H}\times\mathcal{H}\to M(\mathbb{T}^n)$, en donde $M(\mathbb{T}^n)$ son las medidas borelianas complejas. Este producto es sesquilineal, o sea

- $\{\psi+\phi,\varphi\}=\{\psi,\varphi\}+\{\phi,\varphi\}$
- $\{m\psi,\phi\}=m\{\psi,\phi\}$ para todo m en $\mathcal{B}(\mathbb{T}^n)$ tal que (m,ψ) está en C (Demostrada en la Proposición 8.7)

- $\{\psi, \phi\} = \overline{\{\phi, \psi\}}$
- $\{\psi, \psi\} \geqslant 0$ y $\{\psi, \psi\} = 0$ si y sólo si $\psi = 0$

Las otras tres están demostradas en la Proposición 8.2.

La norma de $\mathcal{H}$ se puede escribir como $\|\psi\| = \sqrt{\|\{\psi, \psi\}\|_1}$ en donde se usa la norma $\| \ \|_1$de $M(\mathbb{T}^n)$

- $\mathcal{H}$ es completo con la norma $\| \ \|$

La equivalencia de la norma está en la Nota 8.3 y $\mathcal{H}$ es completo porque es un espacio de Hilbert.

Capítulo 9

Bases y vectores diagonales

9.1. Bases ortonormales y de Riesz

Ahora veremos la generalización de varias propiedades de los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$ a un espacio de Hilbert abstracto, en particular las que están relacionadas con las bases ortonormales. Vamos a analizar en profundidad los espacios que tienen bases ortonormales de traslaciones y bases de Riesz de traslaciones. Veremos que son propiedades equivalentes y es posible construir una base ortonormal de traslaciones a partir de una base de Riesz de traslaciones. Esta es una propiedad conocida de los espacios invariantes por traslaciones en $L^2(\mathbb{R})$ y demostraremos que sigue siendo válida en nuestra generalización. Además el número de elementos a partir del que se construyen estas bases es una propiedad importante e intrínseca del espacio y nos permite definir un concepto de dimensión con propiedades similares a la dimensión usual de los espacios vectoriales.

Las demostraciones son idénticas a las usadas en la Sección 2.3 para los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$, cambiando las operaciones del producto en frecuencias $\{\ ,\ \}$ y multiplicador $\bullet$ de $L^2(\mathbb{R})$ definidas en la Sección 2.2 por las nuevas operaciones definidas en el Capítulo 8 para los espacios de Hilbert. Una diferencia más técnica es que ahora en vez de usar como escalares a las funciones acotadas en $L^\infty(\mathbb{T})$ usaremos las funciones acotadas en $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ ya que en vez de un considerar un solo operador de traslación estamos usando n operadores.

Consideremos una sucesión $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r, \ldots)$ de elementos de $\mathcal{H}$.

Sus traslaciones $E(\Phi)$ forman una base ortonormal del subespacio generado $S(\Phi)$ si y sólo si

$$\{\phi_i, \phi_j\}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad \text{no.} \end{cases}$$

en donde 1 es la función constante 1 sobre el toro $\mathbb{T}^n$. La demostración es análoga a la que aparece en la Subsección 2.3.1.

Sus traslaciones $E(\Phi)$ forman una base de Riesz del subespacio generado $S(\Phi)$ si y sólo si

$$A \operatorname{Id} \leqslant \{\Phi, \Phi\} \leqslant B \operatorname{Id}.$$

en donde todos los coeficientes de la matriz $\{\Phi, \Phi\}$ son funciones (no medidas). La demostración es análoga a la que aparece en la Subsección 2.3.2.

Además podemos demostrar el análogo al teorema de Gram-Schmidt:

Teorema 9.1 (Gram-Schmidt)**.** *Sea $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r, \ldots)^t$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ tal que las traslaciones de Φ son una base de Riesz de $S(\Phi)$. Entonces podemos construir $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_r, \ldots)^t$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ que las traslaciones de Ψ son una base ortonormal de $S(\Phi)$. Es más, para cada número $r \in \mathbb{N}_0$ los subespacios $S(\Phi_r) = S(\Psi_r)$ y existe una matriz de funciones $M_r \in (L^\infty(\mathbb{T}))^{r \times r}$ tal que $\Psi_r = M_r \bullet \Phi_r$.*

La idea de la demostración es definir inductivamente

$$\varphi_{r+1} = \phi_{r+1} - \sum_{k \leqslant r} \left\{\phi_{r+1}, \psi_k\right\} \bullet \psi_k = \phi_{r+1} - \left\{\phi_{r+1}, \Psi_r\right\} \bullet \Psi_r,$$

y luego normalizarlo tomando

$$\psi_{r+1} = \frac{1}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}}} \bullet \varphi_{r+1}.$$

Los detalles de la demostración son idénticos a los que aparecen en el Teorema 2.3 y por ello no los repetiremos aquí.

Más adelante en la Proposición 10.12 usaremos el mismo algoritmo, pero sin pedir la condición de que las traslaciones de la sucesión inicial sean una base de Riesz. En ese caso aparecerán problemas técnicos en la normalización y en general no podremos obtener una base ortonormal.

9.1.1. Teoremas de Robertson

Consideremos un subespacio $\mathbf{T}$-invariante S incluido en $\mathcal{H}$ que tiene una base ortonormal formada por las traslaciones de una cantidad finita de elementos $\phi_1, \ldots, \phi_r$. Veremos que la cantidad r de elementos originales tiene propiedades similares a la dimensión. La dimensión como espacios vectoriales de todos estos espacios es infinita, de manera que este nuevo número ayuda a caracterizarlos.

En la Subsección 2.4.1 habíamos enunciado estos resultados para los espacios invariantes por traslaciones sin demostrarlos. La demostración es muy similar a la que aparecerá ahora, haciendo los mismos cambios que indicamos para los resultados anteriores. Más adelante en la Sección 10.4 vamos a extender este resultado y la noción de dimensión a marcos. La demostración también es similar, pero la mayor generalidad hace que aparezcan múltiples detalles técnicos adicionales que la hacen menos clara. Por ello dejamos acá la demostración directa del caso sencillo y en la Sección 10.4 damos la más general por separado.

Para la demostración del resultado principal vamos a necesitar el siguiente Lema.

Lema 9.2. *Sea M una matriz de funciones en $\left(L^{\infty}\left(\mathbb{T}^{n}\right)\right)^{r\times s}$ con $r<s$ tal que $MM^{*}=\mathrm{Id}_{r\times r}$, entonces se puede construir una matriz $\tilde{M}$ de funciones en $\left(L^{\infty}\left(\mathbb{T}^{n}\right)\right)^{s\times s}$ tal que $\tilde{M}\tilde{M}^{*}=\mathrm{Id}_{s\times s}$ y las primeras r filas de $\tilde{M}$ son iguales a las primeras r filas de M.*

Demostración. Vamos a completar la matriz M en forma inductiva. Así que alcanza con encontrar un vector de funciones $F\in\left(L^{\infty}\left(\mathbb{T}^{n}\right)\right)^{1\times s}$ tal que $MF^{*}=0_{r\times 1}$ y $FF^{*}=1$ en casi todo punto. Con este vector podemos construir una matriz $M'\in\left(L^{\infty}\left(\mathbb{T}^{n}\right)\right)^{(r+1)\times s}$ formada por las r filas de la matriz M y el vector horizontal F como la última fila. La nueva matriz verifica que $M'M'^{*}=\mathrm{Id}_{(r+1)\times(r+1)}$ y repitiendo este proceso $s-r$ veces obtenemos $\tilde{M}$.

Para encontrar F vamos a usar el algoritmo de Gram-Schmidt para cada $\boldsymbol{\omega}$ en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^{n}$. La parte difícil, es ver que las funciones encontradas son medibles.

Para cada elemento $\mathbf{e}_{k}$ de la base canónica de $\mathbb{C}^{s}$ definimos el vector de funciones constante correspondiente $E_{k}\left(\boldsymbol{\omega}\right)=\mathbf{e}_{k}$. Ahora calculamos la diferencia entre $E_{k}\left(\boldsymbol{\omega}\right)$ y su proyección sobre el subespacio generado por las r filas de $M\left(\boldsymbol{\omega}\right)$

$$D_{k}\left(\boldsymbol{\omega}\right)=E_{k}\left(\boldsymbol{\omega}\right)-\sum_{j=1,\ldots,r}\left\langle E_{k}\left(\boldsymbol{\omega}\right),M_{j}\left(\boldsymbol{\omega}\right)\right\rangle M_{j}\left(\boldsymbol{\omega}\right).$$

Para cada $\boldsymbol{\omega}$, al menos una de estas funciones $D_{k}\left(\boldsymbol{\omega}\right)$ tiene que ser no nula porque $s<r$. Así que al tomar los conjuntos $B_{k}=\left\{\boldsymbol{\omega}/D_{k}\left(\boldsymbol{\omega}\right)\neq\mathbf{0}\right\}$ tenemos que $\bigcup_{k=1,\ldots,r}B_{k}=\mathbb{T}^{n}$. Ahora disjuntamos estos conjuntos tomando $A_{k}=B_{k}\backslash\bigcup_{j=1,\ldots,k-1}B_{j}$ y así obtenemos

$$\bigcup_{k=1,\ldots,r}A_{k}=\mathbb{T}^{n}\text{ y }A_{k}\cap A_{j}=\emptyset\text{ si }k\neq j.$$

Finalmente definimos

$$G(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1,\ldots,r} \chi_{A_k}(\boldsymbol{\omega}) D_k(\boldsymbol{\omega}),$$

y sólo resta normalizarlo

$$F(\boldsymbol{\omega}) = \frac{G(\boldsymbol{\omega})}{\|G(\boldsymbol{\omega})\|_2}.$$

Para cada $\boldsymbol{\omega}$ en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, $\boldsymbol{\omega}$ está en exactamente un sólo conjunto A_k así que $G(\boldsymbol{\omega})$ es igual a uno de los vectores $D_k(\omega)$ y por ello es ortogonal a $M_1, \ldots, M_r$. Además como está normalizado tenemos que $FF^* = 1$. $\square$

El siguiente resultado fue probado por Robertson en [Rob65] para $n = 1$, con una notación muy diferente en el contexto de los subespacios errantes. Acá presentamos una extensión para el caso n-dimensional. La base formada por las traslaciones de los elementos originales se puede interpretar como el resultado de la acción de un grupo abeliano generado por $\mathbf{T}$, o sea $\{\mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}, \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^n\}$. El resultado de Robertson fue generalizado por Han y Larson en [HL01], para un grupo de operadores unitarios (no necesariamente abeliano) usando álgebras de von Neuman.

Proposición 9.3 (Robertson). *Sea $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_s)^t$ un vector de elementos de $\mathcal{H}$ tales que las traslaciones de Φ son una base ortonormal de $S(\Phi)$ y sea $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_s)^t$ un vector de elementos de $\mathcal{H}$ tales que las traslaciones de Ψ son una base ortonormal de $S(\Psi)$. En ambos casos r ó s pueden ser infinito. entonces*

1. *Si $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ y $r = s < \infty$ entonces $S(\Phi) = S(\Psi)$.*
2. *Si $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ entonces $r \leqslant s$.*
3. *Si $S(\Phi) = S(\Psi)$ entonces $r = s$.*
4. *Si $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ y $s < \infty$ entonces existe $\tilde{\Phi} = \left\{\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_s\right\}$ tal que $\phi_k = \tilde{\phi}_k$ para $k \leqslant r$ y $E\left(\tilde{\Phi}\right)$ es una base ortonormal de $S(\Psi)$.*

Demostración. Analicemos qué pasa cuando $S(\Phi) \subset S(\Psi)$. Como $E(\Psi)$ es una base ortonormal de $S(\Psi)$ entonces $\phi_i = \sum_j \left\{\phi_i, \psi_j\right\} \bullet \psi_j$ que podemos escribir matricialmente como

$$\Phi = \{\Phi, \Psi\} \bullet \Psi,$$

y además $\left\{\psi_j, \psi_l\right\} = \delta_{i,l}$ que podemos reescribir como

$$\mathrm{Id}_{r\times r} = \{\Psi, \Psi\}.$$

Como $E(\Phi)$ también es una base ortonormal de $S(\Phi)$ entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{Id}_{r\times r} &= \{\Phi, \Phi\} = \{\{\Phi, \Psi\} \bullet \Psi, \{\Phi, \Psi\} \bullet \Psi\} \\ &= \{\Phi, \Psi\}\{\Psi, \Psi\}\{\Phi, \Psi\}^*,\end{aligned}$$

y entonces

$$\mathrm{Id}_{r\times r} = \{\Phi, \Psi\}\{\Phi, \Psi\}^*. \tag{9.1}$$

Para el Ítem 1, como $r = s$ entonces $\{\Phi, \Psi\}$ es una matriz cuadrada y es unitaria (para cada $\omega \in \mathbb{T}^n$), así que $\{\Psi, \Phi\} = \{\Phi, \Psi\}^* = \{\Phi, \Psi\}^{-1}$. Entonces

$$\mathrm{Id}_{r\times r} = \{\Phi, \Psi\}^*\{\Phi, \Psi\} = \{\Psi, \Phi\}\{\Phi, \Psi\},$$

y podemos reagruparlo de manera que

$$\Psi = \mathrm{Id}_{r\times r} \bullet \Psi = \{\Psi, \Phi\}\{\Phi, \Psi\} \bullet \Psi = \{\Psi, \Phi\} \bullet \Phi.$$

Así que $\Psi \subset S(\Phi)$ y por lo tanto $S(\Psi) \subset S(\Phi)$.

Para el Ítem 2 usamos nuevamente la Ecuación (9.1) que implica que

$$r = \mathrm{rango}(\mathrm{Id}_{r\times r}) \leqslant \mathrm{rango}(\{\Phi, \Psi\}) \leqslant \mathrm{filas}(\{\Phi, \Psi\}) = r,$$

y por ello $r = \mathrm{rango}(\{\Phi, \Psi\})$. Entonces

$$r = \mathrm{rango}(\{\Phi, \Psi\}) \leqslant \mathrm{columnas}(\{\Phi, \Psi\}) = s.$$

Para el Ítem 3 tenemos que $S(\Phi) = S(\Psi)$ así que $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ y $S(\Phi) \supset S(\Psi)$, entonces $r \leqslant s$ y $r \geqslant s$ y por lo tanto $r = s$.

Para el Ítem 4, a partir de la matriz $\{\Phi, \Psi\}$ usando el Lema 9.2 podemos construir una matriz unitaria N en $(L^\infty(\mathbb{T}^n))^{s\times s}$, cuyas r primeras filas son $\{\Phi, \Psi\}$. Definimos entonces $\tilde{\Phi} = N \bullet \Psi$, de manera que los primeros r coeficientes de $\tilde{\Phi}$ son iguales a Φ, y además

$$\left\{\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\right\} = \{N \bullet \Psi, N \bullet \Psi\} = N\{\Psi, \Psi\}N^* = NN^* = \mathrm{Id}_{r\times r},$$

así que $E\left(\tilde{\Phi}\right)$ una base ortonormal de $S\left(\tilde{\Phi}\right)$ y por el Ítem 1 tenemos que $S\left(\tilde{\Phi}\right) = S(\Psi)$. □

Al igual que en $L^2(\mathbb{R})$, nuevamente el Ítem 3 de la Proposición 9.3 indica que la cantidad de elementos en un vector cuyas traslaciones forman una base ortonormal está definido de manera única, y por ello lo tomaremos como un análogo a la dimensión. Además utilizando el algoritmo del Teorema 9.1 podemos generalizarlo a subespacios que tienen una base de Riesz de traslaciones.

Definición 9.4. Sea S un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ tal que existe un vector $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)^t$ de elementos de $\mathcal{H}$ tal que las traslaciones de Φ son una base ortonormal de S, entonces definimos

$$\dim_{\mathbf{T}}(S) = r.$$

En el caso en que Φ sea una sucesión infinita tal que $E(\Phi)$ es una base ortonormal de S diremos que $\dim_{\mathbf{T}}(S) = \infty$.

Igual que en los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$, esta definición de dimensión no está definida para todo subespacio cerrado $\mathbf{T}$-invariante y vamos a solucionar este problema permitiendo que sea una función.

Usaremos esta notación para reescribir el Teorema de Robertson.

Proposición 9.5. *Si S y T son subespacios $\mathbf{T}$-invariante de $\mathcal{H}$ tales que están definidas $\dim_{\mathbf{T}}(S)$ y $\dim_{\mathbf{T}}(T)$, entonces*

1. *Si $S \subset T$ y $\dim_{\mathbf{T}}(S) = \dim_{\mathbf{T}}(T) < \infty$ entonces $S = T$.*
2. *Si $S \subset T$ entonces $\dim_{\mathbf{T}}(S) \leqslant \dim_{\mathbf{T}}(T)$.*
3. *Si $S = T$ entonces $\dim_{\mathbf{T}}(S) = \dim_{\mathbf{T}}(T)$.*
4. *Si $S \subset T$ y $\dim_{\mathbf{T}}(T) < \infty$ entonces está definido $\dim_{\mathbf{T}}(T \ominus S) = \dim_{\mathbf{T}}(T) - \dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{V})$.*

9.2. Vectores diagonales

En las bases ortonormales de traslaciones, al tomar dos elementos generadores cualquiera distintos tenemos que todas las traslaciones de uno de ellos son ortogonales a todas las traslaciones del otro. Esta es una propiedad muy útil y más adelante va a resultar conveniente trabajar con vectores o sucesiones en la que los subespacios generados por cada uno de los coeficientes que aparecen son ortogonales dos a dos. Por la ortogonalidad, es posible trabajar casi coeficiente a coeficiente, sin preocuparse por los otros coeficientes del vector o sucesión. Sin embargo, en la mayoría de los casos las traslaciones de cada elemento no serán ortogonales entre sí.

Vamos a definir explícitamente los vectores diagonales y probar algunas propiedades que iremos utilizando después.

Definición 9.6. Decimos que una sucesión $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots)^t$ (quizás finita) de elementos de $\mathcal{H}$ es *diagonal* si $\left\{\phi_i, \phi_j\right\} = 0$ para todo $i \neq j$.

Decimos que es *decreciente* si es diagonal y además $\left\{\phi_{i+1}, \phi_{i+1}\right\} \geqslant \{\phi_i, \phi_i\}$ para todo i.

La ventaja de trabajar con vectores diagonales se ve en el siguiente lema.

Lema 9.7. *Sea $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots)^t$ una sucesión (quizás finita) diagonal de elementos de $\mathcal{H}$, entonces*

$$S(\Psi) = S(\phi_1) \oplus S(\phi_2) \oplus \cdots \oplus S(\phi_n) \oplus \cdots$$

Demostración. Tomemos un elemento ψ_i en $S(\phi_i)$ y por la Nota 8.9 existe una función m_i tal que $m_i \bullet \phi_i = \psi_i$. Eligiendo un j distinto de i y un elemento ψ_j de $S\left(\phi_j\right)$ tenemos una función m_j tal que $m_j \bullet \phi_j = \psi_j$. Por ello podemos calcular

$$\left\{\psi_i, \psi_j\right\} = \left\{m_i \bullet \phi_i, m_j \bullet \phi_j\right\} = m_i \overline{m_j} \left\{\phi_i, \phi_j\right\} = 0,$$

y en particular tenemos que

$$\left\langle \psi_i, \psi_j \right\rangle = \left\{\psi_i, \psi_j\right\}^\wedge (\mathbf{0}) = 0.$$

$\square$

Además podemos extender las parametrizaciones obtenidas en la Nota 8.9 a los subespacios $S(\Phi)$ cuando Φ es un vector diagonal.

Proposición 9.8. *Dado un vector diagonal $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^t$ de elementos de $\mathcal{H}$ y un vector $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_s)^t$ de elementos del subespacio $S(\Phi)$, existe una matriz de funciones M tal que $\Psi = M \bullet \Phi$.*

Demostración. Alcanza con probar el caso en que Ψ tiene un solo elemento ψ. Cuando Ψ tiene más de un elemento, la matriz M se obtiene agrupando las filas correspondientes a cada elemento de Ψ.

Como los subespacios $S(\phi_1), \dots, S(\phi_r)$ son ortogonales, descomponemos el elemento $\psi = \psi_1 + \cdots + \psi_r$, de manera que ψ_i esté en $S(\phi_i)$ para cada $i = 1, \dots, r$. Entonces por la Nota 8.9 existen funciones borelianas $m_1, \dots, m_r$ tales que $\psi_i = m_i \bullet \phi_i$ para cada $i = 1, \dots, r$. En este caso la matriz $M = (m_1, \dots, m_r)$ tiene sólo una fila formada por estas funciones. $\square$

Sin embargo, a diferencia de la parametrización de los subespacios con un solo generador, esta parametrización no es inyectiva.

9.2.1. Subespacios invariantes

Dado un vector decreciente $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)^t$ de elementos de $\mathcal{H}$ y una matriz M de funciones borelianas tales que $M \bullet \Phi$ está definido, entonces los elementos del producto $(M \bullet \Phi)_j$ están en $S(\Phi)$ y en consecuencia el subespacio generado por ellos $S(M \bullet \Phi)$ está incluido en $S(\Phi)$. Vamos a buscar condiciones suficientes para sobre M y Φ para que estos dos subespacios sean iguales.

Antes veremos el caso en que Φ tiene un solo elemento.

Lema 9.9. *Sea ϕ un elemento de $\mathcal{H}$ y m una función boreliana, tal que $m \bullet \phi$ está definido y el conjunto donde se anula m tiene medida $\{\phi, \phi\}$ cero. Entonces $S(m \bullet \phi) = S(\phi)$.*

Demostración. Es fácil ver que $S(m \bullet \phi) \subset S(\phi)$. Para ver la otra inclusión calculemos

$$\frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}} m}}{m} \bullet (m \bullet \phi),$$

en donde $\frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}} m}}{m}$ es la función definida en el Capítulo 10.

Por ser una función acotada, está definida $\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}} m} \bullet \phi$. Así que por la Proposición 8.10 tenemos que

$$\frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}} m}}{m} \bullet (m \bullet \phi) = \left(\frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}} m}}{m} m\right) \bullet \phi = \chi_{\widetilde{\mathrm{sop}} m} \bullet \phi.$$

Como el conjunto donde m se anula tiene medida $\{\phi, \phi\}$ cero y es el complemento de $\widetilde{\mathrm{sop}} m$, entonces $\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}} m}$ coincide con la función 1 en $L^2(\{\phi, \phi\})$ y por ello $\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}} m} \bullet \phi = 1 \bullet \phi = \phi$.

Entonces ϕ está en $S(m \bullet \phi)$ y por ello su generado $S(\phi)$ está incluido en $S(m \bullet \phi)$. □

Esto se extiende directamente a vectores diagonales.

Corolario 9.10. *Sea $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)^t$ un vector diagonal de elementos de $\mathcal{H}$ y m una función boreliana tal que $m \bullet \phi_k$ está definida y el conjunto donde m se anula tiene medida $\{\phi_k, \phi_k\}$ cero para $1 \leqslant k \leqslant r$. Entonces $S(m \bullet \Phi) = S(m \operatorname{Id} \bullet \Phi) = S(\Phi)$.*

Demostración. Por el Lema 9.7 tenemos que $S(\Phi) = S(\phi_1) \oplus \ldots \oplus S(\phi_r)$ y que $S(m \bullet \Phi) = S(m \bullet \phi_1) \oplus \ldots \oplus S(m \bullet \phi_r)$. Por el Lema previo, los subespacios respectivos que aparecen en las sumas son iguales. □

En particular podemos considerar el caso en que m es una función acotada, y entonces $m \bullet \phi$ está definida para todo elemento ϕ de $\mathcal{H}$. Esta condición permite simplificar las hipótesis y demostraciones así que la utilizaremos para el resultado que damos a continuación.

Proposición 9.11. *Sea* $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r)^t$ *un vector diagonal de elementos de* $\mathcal{H}$ *y* M *una matriz de funciones borelianas y acotadas tal que el conjunto donde* $\det(M(\boldsymbol{\omega}))$ *se anula tiene medida* $\{\phi_k, \phi_k\}$ *cero para* $1 \leqslant k \leqslant r$. *Entonces* $S(M \bullet \Phi) = S(\Phi)$.

Demostración. Dada la matriz $M(\boldsymbol{\omega})$, tomamos la matriz adjunta (vieja definición) $M^{\text{adj}}(\boldsymbol{\omega})$ definida por

$$M^{\text{adj}}(\boldsymbol{\omega}) = (-1)^{i+j} \det({}_{ij}M(\boldsymbol{\omega})),$$

en donde ${}_{ij}M(\boldsymbol{\omega})$ es el menor ij de la matriz $M(\boldsymbol{\omega})$ que se obtiene eliminando la fila i y la columna j. Su principal propiedad es que $M(\boldsymbol{\omega})\, M^{\text{adj}}(\boldsymbol{\omega}) = \det(M(\boldsymbol{\omega}))\,\text{Id}$.

El cálculo de esta matriz involucra solamente sumas y productos de las funciones que aparecen como coeficientes, así que si los coeficientes de M son funciones borelianas y acotadas, entonces los coeficientes de $M^{\text{adj}}(\boldsymbol{\omega})$ también lo son. Como todas las funciones involucradas son acotadas, están definidas todas las operaciones que involucran al multiplicador.

Entonces por un lado tenemos que

$$S(M \bullet \Phi) \subset S(\Phi),$$

y por el otro que

$$S(M \bullet \Phi) \supset S\left(M^{\text{adj}} \bullet (M \bullet \Phi)\right) = S(\det(M) \bullet \Phi) = S(\Phi),$$

así que ambos subespacios son iguales. $\square$

Capítulo 10

Extensión a marcos

Ahora analizaremos los espacios $\mathbf{T}$-invariantes sin suponer que tienen una base ortonormal de traslaciones. En los espacios invariantes por traslaciones de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ no todo subespacio tiene una base ortonormal de traslaciones, pero si tiene un marco quasi-ortonormal de traslaciones. Nos interesa analizar si esto se sigue cumpliendo en nuestra generalización.

En los casos en que todos los productos son funciones (por ejemplo los espacios invariantes por traslaciones o los sistemas de Gabor), vamos a ver que nuevamente no siempre es posible encontrar una base ortonormal de traslaciones, pero siempre va a ser posible encontrar un marco quasi-ortonormal de traslaciones.

Por otro lado, si consideramos un sistema de operadores en que algunos de los productos son medidas, no va a ser posible encontrar una base ortonormal ni un marco de traslaciones. Para reconstruir los resultados anteriores deberemos considerar una estructura más general que engloba a los marcos quasi-ortonormales.

En estos resultados es importante el papel que juega la separabilidad del espacio $\mathcal{H}$.

A partir de las propiedades de estos marcos y sus generalizaciones vamos a poder reconstruir varias demostraciones realizadas anteriormente para espacios con una base ortonormal de traslaciones. En particular, vamos a obtener un resultado similar al teorema de Robertson que vimos en la Proposición 9.3 y lo usaremos para definir un concepto de dimensión adecuado, que es una función en vez de ser un número.

10.1. Producto en frecuencias reducido

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ separable con un vector de operadores $\mathbf{T}$, el problema que tenemos es que el producto en frecuencias de dos elementos cualquiera $\{\psi,\phi\}$ a veces es una medida. Vamos a ver que por la separabilidad de $\mathcal{H}$ siempre existe una medida μ tal que todas las medidas $\{\psi,\phi\}$ son absolutamente continuas respecto de μ y entonces vamos a poder definir un nuevo producto en frecuencias $\{\psi,\phi\}_\mu$ que siempre sea una función. La medida μ elegida depende de $\mathcal{H}$, pero en varios casos interesantes como los espacios invariantes por traslaciones y los sistemas de Gabor se puede elegir la medida de Lebesgue normalizada y en realidad $\{\psi,\phi\} = \{\psi,\phi\}_\mu$.

Decimos que una medida ν es *absolutamente continua* con respecto a una medida positiva μ otra medida ν si todo conjunto que tienen medida μ cero, tiene medida ν cero. Lo notaremos como $\nu \ll \mu$. Diremos que μ es *suficientemente fuerte* para $\mathcal{H}$ si $\{\psi,\phi\} \ll \mu$ para todo par de elementos ψ, ϕ en $\mathcal{H}$.

Para analizar si los subespacios son cerrados utilizaremos el siguiente Lema.

Lema 10.1. *Sea $\psi_1,\ldots,\psi_n,\ldots$ una sucesión convergente de elementos de $\mathcal{H}$ tal que $\psi_n \to \psi$, entonces $\{\psi_n,\psi_n\} \to \{\psi,\psi\}$ (convergencia en norma de medidas).*

Demostración. Primero, dado otro elemento ϕ acotemos en función de $\|\phi\|$ la norma de $\|\{\psi+\phi,\psi+\phi\} - \{\psi,\psi\}\|$.

$$\begin{aligned}\|\{\psi+\phi,\psi+\phi\} - \{\psi,\psi\}\| &= \|\{\psi,\psi\} + \{\psi,\phi\} + \{\phi,\psi\} + \{\phi,\phi\} - \{\psi,\psi\}\| \\ &\leqslant \|\{\psi,\phi\}\| + \|\{\phi,\psi\}\| + \|\{\phi,\phi\}\| \\ &= 2\,\|\{\psi,\phi\}\| + \|\phi\|^2\end{aligned}$$

en donde usamos que $\{\phi,\psi\} = \{\psi,\phi\}^*$. Ahora debemos acotar $\|\{\psi,\phi\}\|$ usando que descomponemos a $\phi = \phi_\parallel + \phi_\perp$ donde $\phi_\perp$ está $S(\psi)$ y $\phi_\perp$ es ortogonal. Entonces por la Nota 8.9 existe una función $m_\parallel$ tal que $\phi_\parallel = m_\parallel \bullet \psi$ y por el Lema 8.4 tenemos que

$$\begin{aligned}\|\{\psi,\phi\}\| &= \left\|\{\psi,\phi_\parallel\}\right\| = \left\|\{\psi, m_\parallel \bullet \psi\}\right\| = \left\|\overline{m_\parallel}\,\{\psi,\psi\}\right\| \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \left|m_\parallel(\boldsymbol{\omega})\right| \mathrm{d}\{\psi,\psi\}(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{T}^n} 1\left|m_\parallel(\boldsymbol{\omega})\right| \mathrm{d}\{\psi,\psi\}(\boldsymbol{\omega})\end{aligned}$$

Podemos ver esta integral como un producto interno en $L^2(\{\psi,\psi\})$ y usar Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}\|\{\psi,\phi\}\| &= \left\langle 1, \left|m_\parallel\right|\right\rangle_{L^2(\{\psi,\psi\})} \\ &\leqslant \|1\|_{L^2(\{\psi,\psi\})} \left\|\left|m_\parallel\right|\right\|_{L^2(\{\psi,\psi\})},\end{aligned}$$

en donde

$$\begin{aligned}\|1\|_{L^2(\{\psi,\psi\})} &= \sqrt{\int_{\mathbb{T}^n} 1^2 \,\mathrm{d}\,\{\psi,\psi\}(\boldsymbol{\omega})} \\ &= \sqrt{\|\{\psi,\psi\}\|} = \sqrt{\|\psi\|^2} = \|\psi\|\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\left\||m_\parallel|\right\|_{L^2(\{\psi,\psi\})} &= \sqrt{\int_{\mathbb{T}^n} |m_\parallel|^2 \,\mathrm{d}\,\{\psi,\psi\}(\boldsymbol{\omega})} = \sqrt{\int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{d}\, m_\parallel \{\psi,\psi\}\, m_\parallel^*(\boldsymbol{\omega})} \\ &= \sqrt{\int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{d}\left\{m_\parallel \bullet \psi, m_\parallel \bullet \psi\right\}(\boldsymbol{\omega})} = \sqrt{\int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{d}\left\{\phi_\parallel, \phi_\parallel\right\}(\boldsymbol{\omega})} \\ &= \left\|\phi_\parallel\right\| \leqslant \|\phi\|\,.\end{aligned}$$

Así que

$$\|\{\psi+\phi,\psi+\phi\}-\{\psi,\psi\}\| \leqslant 2\,\|\{\psi,\phi\}\| + \|\phi\|^2 \leqslant 2\,\|\psi\|\,\|\phi\| + \|\phi\|^2\,.$$

Tomando entonces $\phi_n = \psi_n - \psi$ queda que

$$\begin{aligned}\|\{\psi_n,\psi_n\}-\{\psi,\psi\}\| &= \|\{\psi+\phi_n,\psi+\phi_n\}-\{\psi,\psi\}\| \leqslant \|\phi_n\|\,(2\,\|\psi\| + \|\phi_n\|) \\ &= \|\psi_n-\psi\|\,(2\,\|\psi\| + \|\psi_n-\psi\|)\,.\end{aligned}$$

Así que como $\psi_n \to \psi$ entonces $\|\psi_n - \psi\|$ está acotado y tiende a 0, y por lo tanto $\|\{\psi_n,\psi_n\}-\{\psi,\psi\}\|$ también tiende a 0. □

Veamos primero algunas propiedades cuando se fija una medida μ positiva arbitraria.

Proposición 10.2. *Sea μ una medida positiva (no necesariamente suficiente fuerte). Entonces el conjunto*

$$\mathcal{H}^\mu = \{\psi \in \mathcal{H} / \{\psi,\psi\} \ll \mu\}$$

es un subespacio $\mathbf{T}$*-invariante(cerrado) de $\mathcal{H}$. Además si ψ y ϕ están en $\mathcal{H}^\mu$ entonces $\{\psi,\phi\} \ll \mu$.*

Demostración. Para ver que es un subespacio sólo hay que chequear varias propiedades sencillas:

Si ϕ es un elemento de $\mathcal{H}$ tal que $\{\phi,\phi\} \ll \mu$ entonces:

- Veamos que 0 está en $\mathcal{H}^{\mu}$.

  Es trivial ya que $\{0,0\} = 0 \ll \mu$.

- Veamos que para todo elemento φ en $S(\phi)$ se tiene que $\{\varphi,\varphi\} \ll \mu$.

  Si φ está en $S(\phi)$ entonces por la Nota 8.9 existe una función m en $L^2(\{\phi,\phi\})$ tal que $\varphi = m \bullet \phi$ y por ello $|m|^2$ está en $L^1(\{\phi,\phi\})$. Entonces
  $$\{\varphi,\varphi\} = \{m \bullet \phi, m \bullet \phi\} = |m|^2 \{\phi,\phi\},$$
  así que $\{\varphi,\varphi\} \ll \{\phi,\phi\}$ y por lo tanto $\{\varphi,\varphi\} \ll \mu$.

  Las funciones acotadas incluyen a todos los polinomios trigonométricos. En particular las constantes λ en $\mathbb{C}$ y las funciones $z_1,\ldots,z_n$ y sus inversas. Por ello $\lambda\psi = \lambda \bullet \psi$ y $T_i\psi = z_i \bullet \psi$y $T_i^{-1}\psi = z_i^{-1} \bullet \psi$ para $i = 1,\ldots,n$ también están en el conjunto $\mathcal{H}^{\mu}$.

- Veamos que para todo elemento ψ en $\mathcal{H}$ se tiene que $\{\phi,\psi\} \ll \mu$.

  Descomponemos a $\psi = \psi_{\parallel} + \psi_{\perp}$ donde $\psi_{\parallel}$ está $S(\phi)$ y $\psi_{\perp}$ es ortogonal. Entonces por la Nota 8.9 existe una función $m_{\parallel}$ tal que $\psi_{\parallel} = m_{\parallel} \bullet \phi$ y por el Lema 8.4 tenemos que
  $$\{\phi,\psi\} = \left\{\phi,\psi_{\parallel}\right\} = \left\{\phi, m_{\parallel} \bullet \phi\right\} = \overline{m_{\parallel}}\{\phi,\phi\},$$
  y por lo tanto $\{\phi,\psi\} \ll \{\phi,\phi\} \ll \mu$.

- Veamos que para todo elemento ψ en $\mathcal{H}$ tal que $\{\psi,\psi\} \ll \mu$ se tiene que $\{\phi+\psi,\phi+\psi\} \ll \mu$.

  Por el Ítem anterior $\{\phi,\psi\} \ll \mu$ y $\{\psi,\phi\} \ll \mu$. Entonces
  $$\{\phi+\psi,\phi+\psi\} = \{\phi,\phi\} + \{\phi,\psi\} + \{\psi,\phi\} + \{\psi,\psi\},$$
  y como estas cuatro medidas son absolutamente continuas respecto de μ, entonces $\{\phi+\psi,\phi+\psi\} \ll \mu$.

- Veamos que si se tiene una sucesión $\psi_1,\ldots,\psi_n,\ldots$ de elementos de $\mathcal{H}$ tales que $\{\psi_n,\psi_n\} \ll \mu$ para todo n y tales que $\psi_n \to \psi$ en $\mathcal{H}$ entonces $\{\psi,\psi\} \ll \mu$.

  Por el Lema 10.1 tenemos que
  $$\{\psi_n,\psi_n\} \to \{\psi,\psi\}.$$
  Además para todo conjunto A tal que $\mu(A) = 0$ tenemos que como $\{\psi_n,\psi_n\} \ll \mu$ y entonces $\{\psi_n,\psi_n\}(A) = 0$. Así que por la convergencia de las medidas
  $$\{\psi_n,\psi_n\}(A) \to \{\psi,\psi\}(A),$$

y entonces $\{\psi,\psi\}(A)=0$ y por ello $\{\psi,\psi\}\ll\mu$.

□

Con este resultado podremos obtener dos consecuencias muy útiles. Por un lado, para ver que una medida es suficientemente fuerte, alcanza con chequearla sólo con los generadores. Además cualquier subespacio siempre tiene una medida suficientemente fuerte (para este punto es necesaria la separabilidad del subespacio).

Corolario 10.3. *Sea S un subespacio $\mathbf{T}$-invariante y $\Phi=(\phi_1,\ldots,\phi_n,\ldots)^t$ una sucesión (quizás finita) tal que $S(\Phi)=S$. Sea μ una medida positiva tal que $\{\phi_i,\phi_i\}\ll\mu$ para todo $i=1,\ldots,n,\ldots$ (quizás finito). Entonces μ es suficientemente fuerte para S.*

Demostración. Por la Proposición anterior tenemos que S^μ es un subespacio $\mathbf{T}$-invariante(cerrado). Como $\{\phi_i,\phi_i\}\ll\mu$ entonces S^μ incluye a $\phi_1,\ldots,\phi_n,\ldots$, los elementos de Φ, entonces también incluye al generado por ellos que es $S(\Phi)=S$. □

Proposición 10.4. *Si $\mathcal{H}$ es separable, entonces existe una sucesión $\Phi=(\phi_1,\ldots,\phi_n,\ldots)$ de elementos de $\mathcal{H}$ tal que $S(\Phi)=\mathcal{H}$.*

Demostración. Como $\mathcal{H}$ es separable, entonces existe un conjunto denso y numerable. Tomamos sus elementos en algún orden y obtenemos una sucesión $\Phi=(\phi_1,\ldots,\phi_n,\ldots)$ tal que $S(\Phi)$ es $\mathcal{H}$ ya que $S(\Phi)$ es un cerrado que incluye al denso original. □

Proposición 10.5. *Si $\mathcal{H}$ es separable, entonces existe una medida μ suficientemente fuerte para $\mathcal{H}$.*

Demostración. Como $\mathcal{H}$ es separable, entonces existe una sucesión $\Phi=(\phi_1,\ldots,\phi_n,\ldots)$ tal que $S(\Phi)$ es $\mathcal{H}$. Podemos suponer que 0 no está en la sucesión Φ, porque al sacarlo se genera el mismo espacio. También podemos suponer que los elementos de norma 1, ya que al multiplicarlos por un número λ_i no nulo no cambia el subespacio generado.

Definimos las medidas $\mu_n=\{\phi_n,\phi_n\}$ y tomemos su suma

$$\mu=\sum_n\frac{1}{2^n}\{\phi_n,\phi_n\}.$$

Las medidas μ_n son positivas y además por la Nota 8.3 su norma es igual a la norma de los vectores. Como el espacio de las medidas es completo y la sucesión es absolutamente convergente, entonces μ es una medida. Es más, como todas tienen norma 1 y son positivas queda que la norma de μ es 1.

Además por construcción $\{\phi_n, \phi_n\} \ll \mu$ así que por el Corolario 10.3 nos queda que μ es suficientemente fuerte para todo $\mathcal{H}$. □

Ahora usando una μ suficientemente fuerte podemos usar el teorema de Radon-Nikodym para escribir a cualquier producto en frecuencias como una función multiplicada por μ porque los producto en frecuencias son medidas finitas.

Definición 10.6. Sea μ una medida positiva suficientemente fuerte, definimos $\{\psi, \varphi\}_\mu$ como la única función en $L^1(\mu)$ tal que $\{\psi, \varphi\}_\mu \mu = \{\psi, \varphi\}$, o sea que para toda función continua m definida en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}^n} m(\boldsymbol{\omega}) \{\psi, \varphi\}_\mu (\boldsymbol{\omega}) \, \mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\omega}) = \int_{\mathbb{T}^n} m(\boldsymbol{\omega}) \, \mathrm{d}\{\psi, \varphi\}(\boldsymbol{\omega}).$$

En los casos en que se pueda elegir a μ como la medida de Lebesgue normalizada, por ejemplo los espacios invariantes por traslaciones y los sistemas de Gabor, se tiene que en realidad $\{\psi, \phi\} = \{\psi, \phi\}_\mu$ identificando las funciones en $L^1(\mathbb{T}^n)$ con las medidas absolutamente continuas.

Al igual que en la Subsección 2.2.4 extendemos estas definiciones a vectores de elementos de $\mathcal{H}$ de la manera usual.

10.1.1. Subespacio de los productos acotados

Ahora veamos qué pasa cuando nos restringimos al conjunto en que $\{\psi, \psi\}_\mu$ es *esencialmente acotada*, o sea que existe una constante M tal que $\{\psi, \psi\}_\mu$ es una función y el conjunto $\left\{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / \{\psi, \psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega}) > M\right\}$ tiene medida μ cero.

Proposición 10.7. *Sea μ una medida positiva (no necesariamente suficiente fuerte). Entonces el conjunto*

$$\mathcal{H}^{\mu\infty} = \left\{\psi \in \mathcal{H} / \{\psi, \psi\}_\mu \text{ es esencialmente acotada para } \mu \right\}$$

es un subespacio de $\mathcal{H}$ que es invariante pero no necesariamente cerrado. Además si ψ y ϕ están en $\mathcal{H}^{\mu\infty}$ entonces $\{\psi, \phi\}_\mu$ es esencialmente acotada para μ.

Demostración. Nuevamente hay que probar varias propiedades sencillas:

Si ϕ es un elemento de $\mathcal{H}$ tal que $\{\phi, \phi\}_\mu$ está esencialmente acotada:

- Veamos que 0 está en $\mathcal{H}^{\mu\infty}$.

  Es trivial ya que $\{0,0\} = 0$ así que $\{0,0\}_\mu = 0$.

- Veamos que para toda función acotada m se tiene que $\{m \bullet \psi, m \bullet \psi\}_\mu$ es esencialmente acotada.

  Llamemos $\varphi = m \bullet \psi$ y calculemos

  $$\{\varphi,\varphi\}_\mu \mu = \{\varphi,\varphi\} = \{m \bullet \psi, m \bullet \psi\} = |m|^2 \{\psi,\psi\} = |m|^2 \{\psi,\psi\}_\mu \mu,$$

  así que $\{\varphi,\varphi\}_\mu = |m|^2 \{\psi,\psi\}_\mu$ (salvo un conjunto de medida μ cero). En particular como $\{\psi,\psi\}_\mu$ es acotada y m es acotada entonces $\{\phi,\phi\}_\mu$ es acotada.

  Las funciones acotadas incluyen a todos los polinomios trigonométricos. En particular las constantes λ en $\mathbb{C}$ y las funciones $z_1,\ldots,z_n$ y sus inversas. Por ello $\lambda\psi = \lambda \bullet \psi$ y $T_i\psi = z_i \bullet \psi$ y $T_i^{-1}\psi = z_i^{-1} \bullet \psi$ para $i = 1,\ldots,n$ también están en el conjunto $\mathcal{H}^{\mu\infty}$.

- Veamos que para todo elemento ψ en $\mathcal{H}$ se tiene que $\{\phi,\psi\}_\mu$ es esencialmente acotada.

  Descomponemos a $\psi = \psi_\| + \psi_\perp$ donde $\psi_\|$ está $S(\phi)$ y $\psi_\perp$ es ortogonal. Calculemos

  $$\begin{aligned}\{\psi,\psi\} &= \left\{\psi_\| + \psi_\perp, \psi_\| + \psi_\perp\right\}\\ &= \left\{\psi_\|,\psi_\|\right\} + \left\{\psi_\|,\psi_\perp\right\} + \left\{\psi_\perp,\psi_\|\right\} + \{\psi_\perp,\psi_\perp\}\\ &= \left\{\psi_\|,\psi_\|\right\} + \{\psi_\perp,\psi_\perp\}.\end{aligned}$$

  Como $\{\psi_\perp,\psi_\perp\}$ es una medida positiva entonces

  $$0 \leqslant \left\{\psi_\|,\psi_\|\right\} \leqslant \{\psi,\psi\},$$

  así que por la Nota 8.9 tenemos que $\psi_\| = m_\| \bullet \phi$ y entonces

  $$0 \leqslant \left|m_\|\right|^2 \{\phi,\phi\}_\mu \mu = \left|m_\|\right|^2 \{\phi,\phi\} \leqslant \{\psi,\psi\} = \{\psi,\psi\}_\mu \mu.$$

  Por ello

  $$0 \leqslant \left|m_\|\right|^2 \{\phi,\phi\}_\mu \leqslant \{\psi,\psi\}_\mu,$$

  por lo que $\left|m_\|\right|^2 \{\phi,\phi\}_\mu$ es acotada (aunque $m_\|$ no tiene que ser necesariamente acotada).

  Ahora podemos calcular

  $$\{\phi,\psi\} = \left\{\phi,\psi_\|\right\} = \left\{\phi, m_\| \bullet \phi\right\} = \overline{m_\|}\,\{\phi,\phi\} = \overline{m_\|}\,\{\phi,\phi\}_\mu \mu,$$

y la función

$$\left|\overline{m_{\|}}\left\{\phi,\phi\right\}_{\mu}\right| = \sqrt{\left|m_{\|}\right|^{2}\left\{\phi,\phi\right\}_{\mu}^{2}}$$
$$= \sqrt{\left(\left|m_{\|}\right|^{2}\left\{\phi,\phi\right\}_{\mu}\right)\left\{\phi,\phi\right\}_{\mu}}$$

es acotada porque $\{\phi,\phi\}_{\mu}$ y $\left|m_{\|}\right|^{2}\{\phi,\phi\}_{\mu}$ son acotadas.

- Veamos que para todo elemento ψ en $\mathcal{H}$ tal que $\{\psi,\psi\}_{\mu}$ es esencialmente acotada se tiene que $\{\phi+\psi,\phi+\psi\}_{\mu}$ es esencialmente acotada.

  Por el Ítem anterior $\{\phi,\psi\}_{\mu}$ y $\{\psi,\phi\}_{\mu}$ son acotadas y entonces

  $$\{\phi+\psi,\phi+\psi\} = \{\phi,\phi\} + \{\phi,\psi\} + \{\psi,\phi\} + \{\psi,\psi\},$$

  y por ello

  $$\{\phi+\psi,\phi+\psi\}_{\mu} = \{\phi,\phi\}_{\mu} + \{\phi,\psi\}_{\mu} + \{\psi,\phi\}_{\mu} + \{\psi,\psi\}_{\mu}$$

  es acotada por ser suma de acotadas.

$\square$

Aunque (salvo en casos excepcionales) este subespacio no es cerrado con la norma del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, veremos que usando otra métrica podemos hacer que sea completo. Esta métrica es la asociada a la estructura de módulo de Hilbert que veremos a continuación.

Proposición 10.8. *El subespacio $\mathcal{H}^{\mu\infty}$ es completo con la norma que al elemento ϕ le asigna $\|\phi\|_{*,\mu} = \left\|\sqrt{\{\phi,\phi\}_{\mu}}\right\|_{\infty,\mu}$.*

Demostración. Notemos primero que para todo elemento ϕ en $\mathcal{H}^{\mu\infty}$ se tiene que $\|\phi\|_{*,\mu} \leqslant \|\phi\|$, ya que como el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tiene medida μ finita entonces

$$\|\phi\|_{*,\mu}^{2} = \left\|\sqrt{\{\phi,\phi\}_{\mu}}\right\|_{\infty,\mu}^{2} = \left\|\{\phi,\phi\}_{\mu}\right\|_{\infty,\mu} \leqslant \left\|\{\phi,\phi\}_{\mu}\right\|_{1,\mu} = \|\phi\|^{2},$$

en donde la última igualdad vale por lo visto en la Nota 8.3.

Entonces si tomamos una sucesión $\phi_1,\ldots,\phi_r,\ldots$ de Cauchy en la norma $\|\ \|_{*,\mu}$ también es una sucesión de Cauchy en la norma $\|\ \|$. Como $\mathcal{H}^{\mu}$ es completo entonces existe una subsucesión $\psi_1,\ldots,\psi_r,\ldots$ que converge con la norma $\|\ \|$ y llamemos ψ al límite en $\mathcal{H}^{\mu}$. Vamos a ver que el límite está en $\mathcal{H}^{\mu\infty}$ y que la subsucesión converge con la norma $\|\ \|_{*,\mu}$.

Fijemos un número $\varepsilon > 0$ arbitrario, entonces existe un entero r_0 tal que $\|\psi_r - \psi_s\|_{1,\mu} < \varepsilon$ si $r, s \geqslant r_0$. Entonces podemos acotar

$$\|\psi_r\|_{*,\mu} \leqslant \|\psi_r\| \leqslant \left\|\psi_{r_0}\right\| + \left\|\psi_r - \psi_{r_0}\right\| < \left\|\psi_{r_0}\right\| + \varepsilon = M$$

en donde M es un número positivo y por lo tanto

$$\left|\{\psi_r, \psi_r\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right| < \left\|\{\psi_r, \psi_r\}_\mu\right\|_{\infty,\mu} = \|\psi_r\|_{*,\mu} < M^2$$

salvo en un conjunto de medida μ cero para todo $r \geqslant r_0$.

Definamos ahora el conjunto A incluido en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$

$$A = \left\{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / \{\psi, \psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega}) \geqslant 2M^2\right\}.$$

Por el Lema 10.1 tenemos que $\{\psi_r, \psi_r\} \to \{\psi, \psi\}$, así que en particular $\{\psi_r, \psi_r\}(A) \to \{\psi, \psi\}(A)$. Así que por un lado

$$\{\psi, \psi\}(A) = \{\psi, \psi\}_\mu \mu(A) \geqslant 2M^2 \mu(A),$$

y por el otro

$$\{\psi_r, \psi_r\}(A) = \{\psi_r, \psi_r\}_\mu \mu(A) < M^2 \mu(A),$$

y entonces

$$\lim_{r\to\infty} \{\psi_r, \psi_r\}(A) \leqslant M^2 \mu(A).$$

De manera que

$$2M^2 \mu(A) \leqslant \{\psi, \psi\}(A) \leqslant M^2 \mu(A),$$

y como M es positivo entonces $\mu(A)$ tiene que ser cero. Por ello $\{\psi, \psi\}_\mu$ está esencialmente acotada por $2M^2$. □

10.1.2. Propiedades

De las propiedades de $\{\psi, \phi\}$ en la Sección 8.3 se deducen directamente propiedades análogas para $\{\psi, \phi\}_\mu$. La diferencia principal es que si μ es una medida suficientemente fuerte entonces $\{\ ,\ \}_\mu : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to L^1(\mu)$ es una función y no una medida. Si en cambio se toma una medida μ que no es suficientemente fuerte, hay que restringir las operaciones a $\mathcal{H}^\mu$ que es un subespacio cerrado como ya vimos.

Si restringimos las operaciones a $\mathcal{H}^{\mu\infty}$ y $L^\infty(\mathbb{T}, \mu)$ entonces queda nuevamente un módulo de Hilbert. O sea que

La suma $+ \colon \mathcal{H}^{\mu\infty} \times \mathcal{H}^{\mu\infty} \to \mathcal{H}^{\mu\infty}$ hace que $\mathcal{H}^{\mu\infty}$ sea un *grupo abeliano.*

- $(\psi + \phi) + \varphi = \psi + (\phi + \varphi)$
- $\psi + \phi = \phi + \psi$
- Existe un elemento 0 de $\mathcal{H}^{\mu\infty}$ tal que $0 + \psi = \psi$
- Para todo ψ de $\mathcal{H}^{\mu\infty}$ existe otro elemento ϕ de M tal que $\psi + \phi = 0$. La notación usual de ϕ es $-\psi$.

Estas propiedades vienen de la estructura de $\mathcal{H}^{\mu\infty}$ como subespacio (no cerrado) visto en la Proposición 10.7.

Se tiene un producto $\bullet$: $L^\infty(\mathbb{T}^n) \times \mathcal{H}^{\mu\infty} \to \mathcal{H}^{\mu\infty}$ compatible con el producto del álgebra $L^\infty(\mathbb{T})$

- $\left(1_{L^\infty(\mathbb{T})} \bullet \psi\right) = \psi$ en donde $1_{L^\infty(\mathbb{T})}$ es la unidad de $L^\infty(\mathbb{T})$
- $(m \bullet (n \bullet \psi)) = (mn) \bullet \psi$

El producto $\bullet$ es lineal en ambas variables

- $((m + n) \bullet \psi) = m \bullet \psi + n \bullet \psi$
- $(m \bullet (\psi + \phi)) = m \bullet \psi + m \bullet \phi$

Al tomar funciones acotadas siempre están en $L^2(\{\psi, \psi\})$ así que el producto $\bullet$ siempre está definido en estas condiciones. Además $m\bullet\psi$ está en $\mathcal{H}^{\mu\infty}$ por lo visto en la Proposición 10.7. Por ello se siguen cumpliendo estas cuatro condiciones, aunque ahora valen para todos los pares de $L^\infty(\mathbb{T}^n) \times \mathcal{H}^{\mu\infty}$.

Se tiene un producto interno $\{\ ,\ \} : \mathcal{H}^{\mu\infty} \times \mathcal{H}^{\mu\infty} \to L^\infty(\mathbb{T}, \mu)$ que es sesquilineal, o sea

- $\{\psi + \phi, \varphi\} = \{\psi, \varphi\} + \{\phi, \varphi\}$
- $\{m\psi, \phi\} = m\{\psi, \phi\}$ para todo m en $L^\infty(\mathbb{T}^n, \mu)$
- $\{\psi, \phi\} = \overline{\{\phi, \psi\}}$
- $\{\psi, \psi\} \geqslant 0$ y $\{\psi, \psi\} = 0$ si y sólo si $\psi = 0$

El resultado de $\{\ ,\ \}$ está en $L^\infty(\mathbb{T})$ por lo visto en la Proposición 10.7. Las cuatro propiedades se deducen directamente de las de $\{,\}_\mu$ sin restricciones.

Se define la norma $\|\psi\|_{*,\mu} = \sqrt{\|\{\psi, \psi\}\|_{\infty,\mu}}$ en donde se usa la norma $\|\ \|_{\infty,\mu}$de $L^\infty(\mathbb{T}, \mu)$.

- M es completo con la norma $\|\ \|_{*,\mu}$.

La norma es completa por lo visto en la Proposición 10.8.

10.1.3. Diferencias

A pesar de las similitudes entre el producto en frecuencias $\{\ ,\ \}$ y el producto en frecuencias reducido $\{\ ,\ \}_\mu$ es importante resaltar las diferencias.

En particular aunque $\{\psi, \phi\}_\mu$ es una función, es posible que no esté en $L^1(\mathbb{T}^n)$, o para ser más explícito en $L^1(\mathbb{T}^n, \lambda)$ en donde λ es la medida de Lebesgue normalizada. Además quizás $\left\| \{\psi, \psi\}_\mu \right\|_1$ no se pueda calcular y aunque se pueda calcular en general ya no es igual a $\|\psi\|^2$.

Difieren principalmente en aquellas propiedades que relacionan a $\{\psi, \phi\}$ con las bases, marcos y construcciones similares de $\mathcal{H}$. En particular:

- Si $\{\psi, \psi\}_\mu = 1$ no implica que $E(\psi)$ sea una base ortonormal.
- Si existen constantes $0 \leqslant A \leqslant B$ tales que $A \leqslant \{\psi, \psi\}_\mu \leqslant B$ no implica que $E(\psi)$ sea una base de Riesz.
- Si $\{\psi, \psi\}_\mu = \chi_C$ no implica que ψ sea quasi-ortonormal ni que $E(\psi)$ sea un marco.
- Si existen constantes $0 \leqslant A \leqslant B$ y un conjunto C tales que $A\chi_C \leqslant \{\psi, \psi\}_\mu \leqslant B\chi_C$ no implica que $E(\psi)$ sea un marco.

La única propiedad similar a las nombradas que sigue valiendo es que $\{\psi, \phi\}_\mu = 0$ si y sólo si las traslaciones $E(\psi)$ son ortogonales a las traslaciones $E(\phi)$.

10.2. Estructura y descomposición

Dado un conjunto de generadores de $\mathcal{H}$ queríamos encontrar buscamos otro conjunto quasi-ortonormal decreciente cuyas traslaciones generen el mismo subespacio. Esto sólo va a ser posible si la medida de Lebesgue normalizada es suficientemente fuerte.

Un caso particular en el que se puede hacer esta construcción son los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Para los conjuntos finitos fue demostrado por de Boor, Devore y Ron en [BDR94a]. Para los conjuntos infinitos fue demostrado por Bownik en [Bow00]. De nuestra extensión se deduce que el mismo resultado vale en sistemas de Gabor subadjuntos.

En realidad, vamos a probar un resultado un poco más general, suponiendo que tenemos una medida μ suficientemente fuerte, tal que $\{\psi, \varphi\} \ll \mu$ para todo par de elementos ψ, φ de $\mathcal{H}$. En este caso no obtendremos conjuntos quasi-ortonormales, sino que deberemos utilizar una generalización adaptada a la medida μ. Vamos a seguir un plan de demostración similar al teorema de estructura de operadores normales en [RS80].

Construiremos el conjunto deseado en varios pasos, en los que encontraremos conjuntos intermedios. En cada una de las construcciones intermedias, iremos probando la igualdad de los rangos de las matrices formadas por los productos del conjunto original y el nuevo. Esto nos permitirá calcular la función dimensión del espacio a partir del conjunto de generadores originales.

En lo que sigue supondremos que se ha elegido una medida μ suficientemente fuerte. Siempre existe una medida de este tipo por lo visto en la Proposición 10.5.

La propiedad de que $\{\psi,\psi\}_\mu$ sea una función característica ya no implica que $E(\psi)$ sea un marco. Sin embargo esta es una propiedad que resulta útil en la siguientes demostraciones y por ello le daremos un nombre.

Definición 10.9. Decimos que un elemento ψ de $\mathcal{H}$ es *μ-quasi-ortonormal* si $\{\psi,\psi\}_\mu = \chi_A$ para algún conjunto A.

Decimos que un vector $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots)^t$ (quizás finito) es *μ-quasi-ortonormal* si es diagonal y cada uno de sus elementos es *μ- quasi-ortonormal.*

Veamos ahora un par de propiedades en las que los elementos μ-quasi-ortonormales se parecen a los que generan una base ortonormal.

Lema 10.10. *Sea ψ un elemento μ-quasi-ortonormal de $\mathcal{H}$ y sea ϕ un elemento de $\mathcal{H}$ entonces*

- $\{\psi,\psi\}_\mu \bullet \psi = \psi$.
- *Si ϕ es un elemento de $\mathcal{H}$ entonces $\{\phi,\psi\}_\mu \bullet \psi = \phi_\parallel$ en donde $\phi_\parallel$ es la proyección ortogonal de ϕ sobre $S(\psi)$.*
- *En particular, si ϕ es un elemento de $S(\psi)$ entonces $\{\phi,\psi\}_\mu \bullet \psi = \phi$.*

Demostración. Para la primera parte, como $\{\psi,\psi\}_\mu$ es una función característica entonces está acotada y por ello existe $\{\psi,\psi\}_\mu \bullet \psi$, sólo falta ver que es igual a ψ. La función $\{\psi,\psi\}_\mu$ coincide con la función 1 (constante) en $L^2\left(\{\psi,\psi\}_\mu \mu\right) = L^2(\{\psi,\psi\})$, así que por la Nota 8.9

$$\{\psi,\psi\}_\mu \bullet \psi = 1 \bullet \psi = \psi.$$

Para la segunda parte, descomponemos $\phi = \phi_{\parallel} + \phi_{\perp}$. Como $\phi_{\parallel}$ está en $S(\psi)$ entonces por la Nota 8.9 existe una función $m_{\parallel}$ en $L^2(\{\psi, \psi\})$ tal que $\phi_{\parallel} = m_{\parallel} \bullet \psi$. Entonces usando el Lema 8.4 tenemos que

$$\begin{aligned}\{\phi, \psi\}_{\mu} \bullet \psi &= \left\{\phi_{\parallel}, \psi\right\}_{\mu} \bullet \psi = \left\{m_{\parallel} \bullet \psi, \psi\right\}_{\mu} \bullet \psi \\ &= m_{\parallel} \bullet \left(\{\psi, \psi\}_{\mu} \bullet \psi\right) = m_{\parallel} \bullet \psi = \phi_{\parallel}.\end{aligned}$$

La última afirmación se deduce directamente de la anterior. □

Corolario 10.11. *Sea $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots)^t$ una sucesión (quizás finito) μ-quasi-ortonormal, entonces*

- $\{\Psi, \Psi\}_{\mu} \bullet \Psi = \Psi$
- $\{\phi, \Psi\}_{\mu} \bullet \Psi = \phi_{\parallel}$ *en donde* $\phi_{\parallel}$ *es la proyección ortogonal de* ϕ *sobre* $S(\Psi)$

Demostración. En el primer caso, fijando un ψ_i tenemos que $\{\psi_i, \psi_i\}_{\mu} \bullet \psi_i = \psi_i$ y que

$$\left\{\psi_i, \psi_j\right\}_{\mu} \bullet \psi_j = 0 \bullet \psi_j = 0,$$

así que sumando obtenemos

$$\{\psi_i, \Psi\}_{\mu} \bullet \Psi = \sum_j \left\{\psi_i, \psi_j\right\}_{\mu} \bullet \psi_j = \psi_i.$$

Para el segundo punto, usando la descomposición de $S(\Psi)$ descomponemos

$$\phi_{\parallel} = \phi_{\parallel 1} + \phi_{\parallel 2} + \cdots + \phi_{\parallel r} + \cdots,$$

en donde cada $\phi_{\parallel r}$ está en $S(\psi_r)$. Entonces tenemos que

$$\{\phi, \Psi\}_{\mu} \bullet \Psi = \sum_j \left\{\phi, \psi_j\right\}_{\mu} \bullet \psi_j = \sum_j \phi_{\parallel j} = \phi_{\parallel}.$$

□

En particular, si λ es la medida de Lebesgue normalizada, tenemos que si $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots)^t$ es una sucesión λ-quasi-ortonormal entonces sus traslaciones forman un marcos como los definidos en la Sección 2.5.

Dada una función m definida en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tomaremos su *soporte* (sin clausurar) como

$$\widetilde{\mathrm{sop}} m = \{\boldsymbol{\omega} \in T^n / m(\boldsymbol{\omega}) \neq 0\}.$$

Usaremos el siguiente abuso de notación, dada una función m en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ definiremos

$$\frac{\widetilde{\operatorname{sop}} m}{m} = \begin{cases} \frac{1}{m(\omega)} & \text{si} \quad m(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad m(\omega) = 0 \end{cases},$$

y análogamente

$$\frac{\widetilde{\operatorname{sop}} m}{\sqrt{m}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m(\omega)}} & \text{si} \quad m(\omega) \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad m(\omega) = 0 \end{cases}.$$

Para construir los vectores μ-quasi-ortonormal copiaremos el algoritmo de Gram-Schmidt. Sin embargo, a diferencia del Teorema 9.1 no pedimos condiciones suficientemente fuertes sobre el vector original y por ello no obtendremos una base ortonormal.

Proposición 10.12. *Sea $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r, \ldots)^t$ una sucesión (quizás finita) de elementos de $\mathcal{H}^\mu$, entonces existe una sucesión μ-quasi-ortonormal $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r, \ldots)^t$ de elementos de $\mathcal{H}^\mu$ tal que $S(\Phi_r) = S(\Psi_r)$ y $\operatorname{rango}\left(\{\Phi_r, \Phi_r\}_\mu\right) = \operatorname{rango}\left(\{\Psi_r, \Psi_r\}_\mu\right)$ para todo r. En particular $S(\Phi) = S(\Psi)$ y $\operatorname{rango}\left(\{\Phi, \Phi\}_\mu\right) = \operatorname{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu\right)$.*

Demostración. Vamos a probarlo inductivamente. Para $r = 0$ no hay nada que probar.

Supongamos que vale para r y veamos que vale para $r+1$. La demostración tiene varios pasos

Paso 1. Ortogonalización

Llamemos

$$\varphi_{r+1} = \phi_{r+1} - \sum_{k \leqslant r} \left\{\phi_{r+1}, \psi_k\right\}_\mu \bullet \psi_k = \phi_{r+1} - \left\{\phi_{r+1}, \Psi_r\right\}_\mu \bullet \Psi_r.$$

El problema es que ahora las operaciones no son cerradas y es necesario verificar con cuidado que los productos estén bien definidos. Por el Corolario 10.11 tenemos que

$$\left\{\phi_{r+1}, \Psi_r\right\}_\mu \bullet \Psi_r = \phi_{r+1\|},$$

la proyección ortogonal de ϕ_{r+1} sobre el subespacio invariante generado por Ψ_r. Así que

$$\varphi_{r+1} = \phi_{r+1} - \phi_{r+1\|} = \phi_{r+1\perp},$$

y por ello

$$\left\{\varphi_{r+1}, \psi_l\right\}_\mu = \left\{\phi_{r+1} - \phi_{r+1\|}, \psi_l\right\} = 0.$$

Paso 2. Quasi-normalización

Al ortonormalizar vectores en un espacio de Hilbert, alcanza con que el vector φ_{r+1} sea no nulo para que su norma sea no nula y se lo pueda normalizar. Al ortonormalizar generadores de espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$ en el Teorema 9.1 usábamos la condición de base de Riesz para ver que la función $\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}$ tenía inverso multiplicativo acotado. Ahora vamos a tener que conformarnos con invertir la función en el soporte y definirla como cero afuera de él.

Definamos entonces

$$\psi_{r+1} = \frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}} \bullet \varphi_{r+1}.$$

Para ver que el producto $\bullet$ está definido tenemos que verificar que $\frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}$ esté en $L^2\left(\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}\right)$. Para ello calculemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^n} \left| \frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}} (\boldsymbol{\omega}) \right|^2 \mathrm{d}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}{\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu} (\omega) \left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu (\boldsymbol{\omega}) \,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu} (\omega) \,\mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\omega}) \leqslant \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\omega}) < \infty.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que el es μ-quasi-ortonormal

$$\begin{aligned}
\left\{\psi_{r+1},\psi_{r+1}\right\}_\mu &= \left\{ \frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}} \bullet \varphi_{r+1}, \frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}} \bullet \varphi_{r+1} \right\}_\mu \\
&= \frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}{\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu} \left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu = \chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}.
\end{aligned}$$

También veamos que sigue siendo ortogonal a los anteriores, si $l \leqslant r$

$$\begin{aligned}
\left\{\psi_{r+1},\psi_l\right\}_\mu &= \left\{ \frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}} \bullet \varphi_{r+1}, \psi_l \right\}_\mu \\
&= \frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}} \left\{\varphi_{r+1},\psi_l\right\}_\mu = \frac{\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}}{\sqrt{\left\{\varphi_{r+1},\varphi_{r+1}\right\}_\mu}} 0 = 0.
\end{aligned}$$

Así que Ψ_{r+1} es una sucesión μ-quasi-ortonormal que genera $S(\Psi_{r+1})$.

Paso 3. Igualdad de subespacios

Por la hipótesis inductiva, $S(\Psi_r)$ es igual a $S(\Phi_r)$, que está incluido en $S(\Phi_{r+1})$. Por construcción ψ_{r+1} está en $S(\Phi_{r+1})$, así que $S(\Psi_{r+1})$ está incluido en $S(\Phi_{r+1})$.

Veamos ahora la inclusión inversa. Invirtiendo los pasos que llevan de ϕ_{r+1} a ψ_{r+1} podemos escribir

$$\phi_{r+1} = \left\{\phi_{r+1}, \Psi_r\right\}_\mu \bullet \Psi_r + \sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}_\mu} \bullet \psi_{r+1}.$$

Ya vimos que $\left\{\phi_{r+1}, \Psi_r\right\}_\mu \bullet \Psi_r$ está bien definido. Sólo nos queda ver que $\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}_\mu} \bullet \psi_{r+1}$ también está definido. Para ello calculemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{T}^n} \left|\sqrt{\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega})}\right|^2 \mathrm{d}\left\{\psi_{r+1}, \psi_{r+1}\right\}(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \left\{\psi_{r+1}, \psi_{r+1}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \, \mathrm{d}\mu(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{\widetilde{\operatorname{sop}}\left\{\psi_{r+1}, \psi_{r+1}\right\}_\mu}(\boldsymbol{\omega}) \, \mathrm{d}\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}(\boldsymbol{\omega}) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{d}\left\{\varphi_{r+1}, \varphi_{r+1}\right\}(\boldsymbol{\omega}) = \left\|\varphi_{r+1}\right\|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Así vemos que ϕ_{r+1} está en $S(\Psi_{r+1})$ y por lo tanto $S(\Psi_{r+1})$ está incluido en $S(\Phi_{r+1})$. Así que ambos subespacios son iguales.

Paso 4. Igualdad de los rangos

Por un lado, como los elementos de Φ_{r+1} están en $S(\Psi_{r+1})$ y Ψ_{r+1} es una sucesión μ-quasi-ortonormal entonces por el Corolario 10.11 tenemos que $\Phi_{r+1} = \left\{\Phi_{r+1}, \Psi_{r+1}\right\}_\mu \bullet \Psi_{r+1}$ así que

$$\begin{aligned}
\left\{\Phi_{r+1}, \Phi_{r+1}\right\}_\mu &= \left\{\left\{\Phi_{r+1}, \Psi_{r+1}\right\}_\mu \bullet \Psi_{r+1}, \left\{\Phi_{r+1}, \Psi_{r+1}\right\}_\mu \bullet \Psi_{r+1}\right\}_\mu \\
&= \left\{\Phi_{r+1}, \Psi_{r+1}\right\}_\mu, \left\{\Psi_{r+1}, \Psi_{r+1}\right\}_\mu \left\{\Phi_{r+1}, \Psi_{r+1}\right\}_\mu^*,
\end{aligned}$$

por lo que

$$\operatorname{rango}\left(\left\{\Phi_{r+1}, \Phi_{r+1}\right\}_\mu\right) \leqslant \operatorname{rango}\left(\left\{\Psi_{r+1}, \Psi_{r+1}\right\}_\mu\right).$$

Veamos ahora la desigualdad inversa. Consideremos sólo los primeros $r+1$ elementos de Φ, que forman Φ_{r+1}. En los pasos intermedios para llegar de Φ_{r+1} a Ψ_{r+1}vamos quasi-ortonormalizando los vectores de a uno. Para pasar del vector $\left(\psi_1, \ldots, \psi_k, \phi_{k+1}, \ldots, \phi_{r+1}\right)^t$ al vector $\left(\psi_1, \ldots, \psi_k, \psi_{k+1}, \phi_{k+2}, \ldots, \phi_{r+1}\right)^t$ sólo modificamos el vector en la posición $k+1$ en dos pasos que se pueden representar con productos de matrices.

En el primero normalizamos el vector con

$$O_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ -\left\{\phi_{k+1}, \psi_j\right\}_\mu & \text{si} \quad i = k+1 \text{ y } j \leqslant k \\ 0 & \phantom{\text{si}} \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

y lo quasi-normalizamos con

$$N_k = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \neq k+1 \\ \frac{\chi_{\widetilde{\text{sop}}\{\varphi_{k+1}, \varphi_{k+1}\}_\mu}}{\sqrt{\left\{\varphi_{k+1}, \varphi_{k+1}\right\}_\mu}} & \text{si} \quad i = j = k+1 \\ 0 & \phantom{\text{si}} \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

y entonces

$$\begin{aligned} &\left(\psi_1, \ldots, \psi_k, \psi_{k+1}, \phi_{k+2}, \ldots, \phi_{r+1}\right)^t \\ &= N_{k+1} \bullet \left(O_{k+1} \bullet \left(\psi_1, \ldots, \psi_k, \phi_{k+1}, \ldots, \phi_{r+1}\right)^t\right) \end{aligned}$$

Estas matrices no se pueden asociar, porque la operación $\bullet$ no es asociativa para matrices con la definición que estamos usando.

Componiendo estas matrices tenemos que

$$\Psi_{r+1} = N_1 \bullet \left(O_1 \bullet \cdots \left(N_{k+1} \bullet \left(O_{k+1} \bullet \Phi_{r+1}\right)\right)\right),$$

así que

$$\begin{aligned} \left\{\Psi_{r+1}, \Psi_{r+1}\right\}_\mu &= \{N_1 \bullet \left(O_1 \bullet \cdots \left(N_{k+1} \bullet \left(O_{k+1} \bullet \Phi_{r+1}\right)\right)\right) \\ &\quad , N_1 \bullet \left(O_1 \bullet \cdots \left(N_{k+1} \bullet \left(O_{k+1} \bullet \Phi_{r+1}\right)\right)\right)\}_\mu \\ &= N_1 O_1 \cdots N_{k+1} O_{k+1} \left\{\Phi_{r+1}, \Phi_{r+1}\right\}_\mu O_{k+1}^* N_{k+1}^* \cdots O_1^* N_1^* \end{aligned}$$

y por ello

$$\operatorname{rango}\left(\left\{\Psi_{r+1}, \Psi_{r+1}\right\}_\mu\right) \leqslant \operatorname{rango}\left(\left\{\Phi_{r+1}, \Phi_{r+1}\right\}_\mu\right),$$

así que los dos rangos son iguales.

□

Para mayor comodidad en las demostraciones siguientes y para que quede más clara la estructura, resulta conveniente transformar esta sucesión de generadores que obtuvimos en uno decreciente. Para eso utilizaremos el siguiente resultado.

Proposición 10.13. *Sea $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots)^t$ una sucesión (quizás finita) μ-quasi-ortonormal de elementos de $\mathcal{H}$, entonces existe una sucesión (quizás finita) μ-quasi-ortonormal decreciente $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots)^t$ de elementos de $\mathcal{H}$ tal que $S(\Phi) = S(\Psi)$ y $\operatorname{rango}\left(\{\Phi, \Phi\}_\mu\right) = \operatorname{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu\right)$.*

Demostración. La idea es recortar y pegar parte de los vectores originales para formar los nuevos vectores. Para estas operaciones utilizaremos funciones características de conjuntos elegidos convenientemente.

Paso 1. Los Conjuntos

Definimos los conjuntos

$$A_{ij} = \left\{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / \left\{\phi_j, \phi_j\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) = 1 \text{ y } \operatorname{rango}\{\Phi_j, \Phi_j\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) = i\right\}$$

Si $k \neq i$, entonces A_{kj} es disjunto de A_{ij} y

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_{ij} = \widetilde{\operatorname{sop}}\left\{\phi_j, \phi_j\right\}_\mu .$$

De la misma manera, si $k \neq j$ entonces A_{ik} es disjunto de A_{ij} y

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_{ij} = \left\{\operatorname{rango}\{\Phi_j, \Phi_j\}_\mu = i\right\}.$$

Paso 2. Construcción

Ahora tomamos

$$\psi_r = \chi_{A_{r1}} \bullet \phi_1 + \chi_{A_{r2}} \bullet \phi_2 + \ldots + \chi_{A_{rk}} \bullet \phi_k + \ldots,$$

como utilizamos funciones características, que son acotadas, los productos $\bullet$ están bien definidos.

La suma es convergente porque los subespacios $S(\phi_k)$ son ortogonales y además

$$\begin{aligned}\left\|\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k\right\|^2 &= \int_{\mathbb{T}^n} \mathrm{d}\left\{\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k,\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k\right\}(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \left\{\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k,\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\,\mu(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_{rk}}(\boldsymbol{\omega})\left\{\phi_k,\phi_k\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\,\mu(\boldsymbol{\omega}) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_{rk}}(\boldsymbol{\omega})\,\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\{\phi_k,\phi_k\}_\mu}(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\,\mu(\boldsymbol{\omega}) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_{rk}}(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\,\mu(\boldsymbol{\omega}) = \mu(A_{rk}),\end{aligned} \tag{10.1}$$

y entonces

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}}\left\|\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k\right\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}}\mu(A_{rk}) &= \mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_{rk}\right) \\ &= \mu\left(\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\phi_k,\phi_k\right\}_\mu\right) \leqslant \mu(\mathbb{T}^n) < \infty.\end{aligned}$$

Paso 3. μ-quasi-ortonormalidad

Primero veamos que ψ_r es μ-quasi-ortonormal:

$$\begin{aligned}\{\psi_r,\psi_r\} &= \left\{\sum_{k\in\mathbb{N}}\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k,\sum_{k\in\mathbb{N}}\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k\right\} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\left\{\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k,\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k\right\} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\chi_{A_{rk}}\left\{\phi_k,\phi_k\right\},\end{aligned}$$

y como los conjuntos $\chi_{A_{rk}}$ son disjuntos y además A_{rk} está incluido en $\widetilde{\mathrm{sop}}\left\{\phi_j,\phi_j\right\}_\mu$ en cada punto sólo contribuye una de las funciones características

$$\{\phi_k,\phi_k\} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\chi_{A_{rk}} = \chi_{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_{rk}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}\{\psi_r,\psi_l\}_\mu &= \left\{\sum_{k\in\mathbb{N}}\chi_{A_{rk}}\bullet\phi_k,\sum_{k\in\mathbb{N}}\chi_{A_{lk}}\bullet\phi_k\right\}_\mu \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\chi_{A_{rk}}\chi_{A_{lk}}\left\{\phi_k,\phi_k\right\}_\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}}\chi_{A_{rk}\cap A_{lk}}\left\{\phi_k,\phi_k\right\}_\mu\end{aligned} \tag{10.2}$$

y como los conjuntos A_{rk} y A_{lk} son disjuntos entonces $\{\psi_r,\psi_l\}_\mu = 0$.

Paso 4. Inclusión de subespacios

Por un lado, los elementos ψ_r se construyen como sumas infinitas de los elementos que aparecen en Φ multiplicados con $\bullet$ por funciones características. Todas estas operaciones son cerradas en $S(\Phi)$ así que los elementos resultantes están en $S(\Phi)$ y el subespacio generado $S(\Psi)$ también.

Por la misma razón, para ver la inclusión inversa, alcanza con verificar que se puede escribir a los elementos de Φ usando los que aparecen en Ψ. Para ello, calculemos

$$\chi_{A_{1k}} \bullet \psi_1 + \chi_{A_{2k}} \bullet \psi_2 + \ldots + \chi_{A_{rk}} \bullet \psi_r + \ldots .$$

De forma análoga a la Ecuación (10.1) obtenemos que $\left\|\chi_{A_{rk}} \bullet \psi_r\right\|^2 \leqslant \mu(A_{rk})$ y por ello

$$\sum_{r\in\mathbb{N}} \left\|\chi_{A_{rk}} \bullet \psi_k\right\|^2 = \mu\left(\left\{\text{rango}\left\{\Phi_j, \Phi_j\right\}_\mu = i\right\}\right) \leqslant \mu(\mathbb{T}^n) < \infty,$$

y entonces la suma converge. Además

$$\begin{aligned}
\chi_{A_{rk}} \bullet \psi_r = \chi_{A_{rk}} \bullet \left(\sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{A_{rj}} \bullet \phi_j\right) &= \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{A_{rk}} \bullet \left(\chi_{A_{rj}} \bullet \phi_j\right) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{N}} \chi_{A_{rk}} \chi_{A_{rj}} \bullet \phi_j = \chi_{A_{rk}} \bullet \phi_k,
\end{aligned}$$

en donde podemos intercambiar el producto $\bullet$ con la sumatoria porque los elementos son ortogonales. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{r\in\mathbb{N}} \chi_{A_{rk}} \bullet \psi_r = \sum_{r\in\mathbb{N}} \chi_{A_{rk}} \bullet \phi_k &= \left(\sum_{r\in\mathbb{N}} \chi_{A_{rk}}\right) \bullet \phi_k \\
&= \widetilde{\text{sop}}\left\{\phi_k, \phi_k\right\}_\mu \bullet \phi_k = \left\{\phi_k, \phi_k\right\}_\mu \bullet \phi_k = \phi_k,
\end{aligned}$$

en donde podemos intercambiar el producto $\bullet$ con la sumatoria porque la suma de las características converge en $L^2(\{\phi_k, \phi_k\})$.

Paso 5. Igualdad de los rangos

Dado un número r y una elección de números $1 \leqslant k_1 < \cdots < k_r$ definimos el conjunto

$$\begin{aligned}
A = \{\omega \in \mathbb{T}^n \\
/ \, \text{rango}\left(\left\{\Phi_{k_r}, \Phi_{k_r}\right\}_\mu\right) = r, \left\{\phi_{k_i}, \phi_{k_i}\right\}_\mu(\omega) = 1, i = 1, \ldots, r\right\}.
\end{aligned}$$

Por su definición, A está incluido en los conjuntos A_{ik_i}. Calculando ahora para $i = 1, \dots, r$ tenemos que por la Ecuación (10.2)

$$\{\psi_i, \psi_i\}_\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{A_{rk}},$$

así que rango $\left(\{\Psi_r, \Psi_r\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) = r$ para todo ω en A, salvo un conjunto de medida μ cero.

Como hay numerables elecciones de $1 \leqslant k_1 < \cdots < k_r$ entonces en cualquier $\boldsymbol{\omega}$ tal que

$$\text{rango}\left(\{\Phi, \Phi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) \geqslant r$$

tendremos que

$$\text{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) \geqslant r,$$

salvo en un conjunto de medida μ cero.

Repitiendo esto para todo número r natural, tenemos que

$$\text{rango}\left(\{\Phi, \Phi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) \leqslant \text{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right)$$

salvo en un conjunto de medida μ cero.

Además por la definición de los conjuntos A_{rk} tenemos que

$$\{\phi_i, \phi_i\}_\mu = \sum_{r\in\mathbb{N}} \chi_{A_{rk}}$$

de manera que podemos probar la desigualdad inversa de forma análoga y por ello obtenemos que rango $\left(\{\Phi, \Phi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) =$ rango $\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right)$ salvo en un conjunto de medida μ cero.

$\square$

Combinando estos resultados llegamos al Teorema principal anunciado al principio de esta Sección.

Teorema 10.14. *Dado un subespacio* $\mathbf{T}$*-invariante* S *siempre existe una sucesión (quizás finita)* μ*-quasi-ortonormal decreciente* $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots)^t$ *de elementos de* S *tal que* $S(\Psi) = S$.

Demostración. Por la Proposición 10.4 se puede encontrar una sucesión (quizás finita) $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots)^t$ de elementos de $\mathcal{H}$ tal que $S(\Phi) = S$. Por la Proposición 10.12 se puede encontrar una sucesión (quizás finita) $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots)^t$ μ-quasi-ortonormal de elementos de $\mathcal{H}$ tal que $S(\Theta) = S(\Phi) = S$. Por el Teorema 10.14 se puede encontrar una sucesión (quizás finita) μ-quasi-ortonormal decreciente $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots)^t$ de elementos de $\mathcal{H}$ tal que $S(\Psi) = S(\Theta) = S$. □

10.3. Existencia de marcos de traslaciones

A partir de los resultados anteriores, podemos dar una caracterización de los espacios $\mathcal{H}$ en los que existe un marco de traslaciones.

Teorema 10.15. *Si $\mathcal{H}$ es separable, existe una sucesión $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r, \dots)^t$ (quizás finita) de elementos de $\mathcal{H}$ tal sus traslaciones $E(\Phi)$ son un marco de $\mathcal{H}$ si y sólo si para todo par de elementos ψ, φ de $\mathcal{H}$ se tiene que su producto $\{\psi, \varphi\}$ es una función en $L^1(\mathbb{T}^n)$ (es una medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue).*

Demostración. Si para todo elemento ψ, φ de $\mathcal{H}$ se tiene que su producto $\{\psi, \varphi\}$ es una función en $L^1(\mathbb{T}^n)$, entonces la medida de Lebesgue (normalizada) es suficientemente fuerte para $\mathcal{H}$. Entonces por el Teorema 10.14 existe una sucesión $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n, \dots)^t$ quasi-ortonormal tal que $S(\Phi) = \mathcal{H}$. Por un razonamiento análogo al usado en la Sección 2.5 tenemos que sus traslaciones $E(\Phi)$ forman un marco del subespacio que generan, o sea de $\mathcal{H}$. En particular es un marco de Parseval.

Probemos ahora la implicación inversa. Por la definición de marco de la Ecuación (2.11) tenemos que para cada elemento ψ de $\mathcal{H}$ vale que

$$A\|\psi\|^2 \leqslant \sum_{\substack{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^n \\ r=1,2,\dots}} |\langle \psi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\phi_r \rangle|^2 \leqslant B\|\psi\|^2 .$$

Al considerar un solo elemento de la sucesión ϕ_r se sigue cumpliendo la segunda desigualdad, o sea que

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^n} |\langle \psi, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\phi_r \rangle|^2 \leqslant B\|\psi\|^2 ,$$

y en particular, tomando $\psi = \phi_r$ queda

$$\sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^n} |\langle \phi_r, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\phi_r \rangle|^2 \leqslant B\|\phi_r\|^2 .$$

De esta Ecuación deducimos que la sucesión $\left(\langle\phi_r, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\phi_r\rangle\right)_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^n}$ está en $\ell^2(\mathbb{Z}^n)$ y por lo tanto existe una función G en $L^2(\mathbb{T}^n)$ tal que

$$\hat{G}(\boldsymbol{\alpha}) = \langle\phi_r, \mathbf{T}^{\boldsymbol{\alpha}}\phi_r\rangle .$$

Esta es justamente la definición del producto, así que tenemos que $\{\phi_r, \phi_r\}$ está en $L^2(\mathbb{T}^n)$ que es un subconjunto de $L^1(\mathbb{T}^n)$ porque el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tiene medida finita. Además como las traslaciones $E(\Phi)$ son un marco de $\mathcal{H}$, entonces se tiene que $S(\Phi) = \mathcal{H}$. Entonces por el Corolario 10.3 tenemos que la medida de Lebesgue (normalizada) es suficientemente fuerte para $\mathcal{H}$ y para todo par de elementos ψ, φ de $\mathcal{H}$ se tiene que su producto $\{\psi, \varphi\}$ es una función en $L^1(\mathbb{T}^n)$. □

En particular, en los espacios invariantes por traslaciones y los subespacios asociados a sistemas de Gabor, se puede tomar como μ a la medida de Lebesgue (normalizada). Por ello en estas dos familias de subespacios siempre hay un marco de traslaciones que las genera.

10.4. Extensión de los teoremas de Robertson

Las sucesiones μ-quasi-ortonormales decrecientes encontradas nos permitirán generalizar los resultados del Teorema de Robertson que vimos en la Proposición 9.3. Estos jugarán el papel de los conjuntos cuyas traslaciones forman una base ortonormal del subespacio $\mathbf{T}$-invariante bajo estudio. A partir de este resultado será posible definir una función dimensión y ver que sigue compartiendo muchas propiedades con la dimensión usual de los espacios vectoriales.

Proposición 10.16. *Dada una medida μ suficientemente fuerte, sea $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n, \dots)^t$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ (quizás finita) tal que Φ es μ-quasi-ortonormal decreciente y sea $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n, \dots)^t$ una sucesión de elementos de $\mathcal{H}$ (quizás finita) tal que Φ es μ-quasi-ortonormal decreciente. Además llamemos $r(\boldsymbol{\omega}) = \operatorname{rango}\left(\{\Phi, \Phi\}_\mu\right)$ y $s(\boldsymbol{\omega}) = \operatorname{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu\right)$. Entonces:*

1. *Si $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ y $r(\boldsymbol{\omega}) = s(\boldsymbol{\omega}) < \infty$ p. p. μ entonces $S(\Phi) = S(\Psi)$.*
2. *Si $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ entonces $r(\boldsymbol{\omega}) \leqslant s(\boldsymbol{\omega})$.*
3. *Si $S(\Phi) = S(\Psi)$ entonces $r(\boldsymbol{\omega}) = s(\boldsymbol{\omega})$.*

4. *Si $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ entonces existe una sucesión $\tilde{\Phi} = \left(\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_n, \ldots\right)^t$ μ-quasi-ortonormal del complemento ortogonal de $S(\Phi)$ en $S(\Psi)$.*

Demostración. Como $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ y Ψ es μ-quasi-ortonormal de $S(\Psi)$ entonces como vimos en el Corolario 10.11 $\phi_i = \sum_j \left\{\phi_i, \psi_j\right\} \bullet \psi_j$, de manera que podemos escribir

$$\Phi = \{\Phi, \Psi\}_\mu \bullet \Psi.$$

Tomemos un $\boldsymbol{\omega}$ tal que $s(\boldsymbol{\omega}) < \infty$. Como Ψ es μ-quasi-ortonormal decreciente, los primeros $s(\boldsymbol{\omega})$ de elementos de Ψ son tales que $\{\psi_i, \psi_i\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) = 1$ y para todo el resto tenemos que $\{\psi_i, \psi_i\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) = 0$.

De manera análoga, los primeros $r(\boldsymbol{\omega})$ elementos de Φ se tiene que vale $\{\phi_i, \phi_i\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) = 1$ y para el resto $\{\phi_i, \phi_i\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) = 0$.

Tomando $\Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}$ como el vector con los primeros $r(\boldsymbol{\omega})$ elementos de Ψ queda

$$\mathrm{Id}_{r(\boldsymbol{\omega})\times r(\boldsymbol{\omega})} = \left\{\Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}).$$

De la misma manera, Φ también es μ-quasi-ortonormal decreciente de $S(\Phi)$ y por ello

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}_{s(\boldsymbol{\omega})\times s(\boldsymbol{\omega})} &= \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \left\{\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi\right\}_\mu \bullet \Psi, \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi\right\}_\mu \bullet \Psi\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \{\Psi, \Psi\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi\right\}_\mu^*(\boldsymbol{\omega}).
\end{aligned}$$

Las matrices $\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega})$ tiene valores no nulos sólo en las primeras $r(\boldsymbol{\omega})$ columnas. Algo similar pasa con $\{\Psi, \Psi\}_\mu(\boldsymbol{\omega})$, por lo que es posible recortar estas matrices de manera que quede

$$\mathrm{Id}_{s(\boldsymbol{\omega})\times s(\boldsymbol{\omega})} = \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \left\{\Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu^*(\boldsymbol{\omega}),$$

y como $\left\{\Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega})$ era la identidad

$$\mathrm{Id}_{s(\boldsymbol{\omega})\times s(\boldsymbol{\omega})} = \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu^*(\boldsymbol{\omega}). \tag{10.3}$$

1. Si $r(\boldsymbol{\omega}) = s(\boldsymbol{\omega})$ entonces $\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega})$ es una matriz cuadrada unitaria y entonces conmuta con su adjunta

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}_{r(\boldsymbol{\omega})\times r(\boldsymbol{\omega})} &= \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu^*(\boldsymbol{\omega}) \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \\
&= \left\{\Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}, \Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}),
\end{aligned}$$

y por ello

$$\left\{\Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_{\mu} = \left\{\Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}, \Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}\right\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega})\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega}).$$

Las matrices se pueden completar con ceros, para obtener las matrices correspondientes a los vectores completos, y así queda

$$\{\Psi, \Psi\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega}) = \{\Psi, \Phi\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega})\{\Phi, \Psi\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega})$$

Esto vale para casi todo $\boldsymbol{\omega}$ así que podemos escribirlo directamente como

$$\{\Psi, \Psi\}_{\mu} = \{\Psi, \Phi\}_{\mu}\{\Phi, \Psi\}_{\mu},$$

y con ello tenemos que

$$\Psi = \{\Psi, \Psi\}_{\mu} \bullet \Psi = \{\Psi, \Phi\}_{\mu}\{\Phi, \Psi\}_{\mu} \bullet \Psi = \{\Psi, \Phi\}_{\mu} \bullet \Phi,$$

así que $\Psi \subset S(\Phi)$ y por lo tanto $S(\Psi) \subset S(\Phi)$.

2. En los puntos $\boldsymbol{\omega}$ en los que $s(\boldsymbol{\omega})$ es infinito no hay nada que demostrar. En los puntos en que $s(\boldsymbol{\omega})$ es finito entonces de la Ecuación (10.3) tenemos que

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{\omega}) &= \operatorname{rango}\left(\operatorname{Id}_{r(\boldsymbol{\omega})\times r(\boldsymbol{\omega})}\right) \\ &= \operatorname{rango}\left(\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega})\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_{\mu}^{*}(\boldsymbol{\omega})\right) \\ &\leqslant \operatorname{rango}\left(\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega})\right) \\ &\leqslant \operatorname{filas}\left(\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega})\right) = r(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned}$$

Entonces

$$r = \operatorname{rango}\left(\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega})\right),$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} r(\boldsymbol{\omega}) &= \operatorname{rango}\left(\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega})\right) \\ &\leqslant \operatorname{columnas}\left(\left\{\Phi_{s(\boldsymbol{\omega})}, \Psi_{r(\boldsymbol{\omega})}\right\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega})\right) = s(\boldsymbol{\omega}). \end{aligned}$$

3. Si $S(\Phi) = S(\Psi)$ entonces $S(\Phi) \subset S(\Psi)$ y $S(\Phi) \supset S(\Psi)$ así que $r(\boldsymbol{\omega}) \leqslant s(\boldsymbol{\omega})$ y $r(\boldsymbol{\omega}) \geqslant s(\boldsymbol{\omega})$ y por lo tanto $r(\boldsymbol{\omega}) = s(\boldsymbol{\omega})$.

4. El complemento ortogonal de $S(\Phi)$ en $S(\Psi)$ es un subespacio $\mathbf{T}$-invariante y por ello podemos usar el Teorema 10.14 para construir una sucesión $\tilde{\Phi} = \left(\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_n, \ldots\right)^t$ tal que $\tilde{\Phi}$ es una sucesión μ-quasi-ortonormal.

□

Usando el Teorema 10.14 de estructura que vimos en la anteriormente, sabemos que cualquier subespacio de $\mathcal{H}$ tiene una sucesión μ-quasi-ortonormal decreciente, así que estos resultados valen en general. Los reescribiremos nuevamente más adelante después de definir la dimensión.

10.5. Función dimensión

Basándonos en la generalización de la Proposición 10.16, podemos dar una definición preliminar de la función dimensión. El problema con esta noción de dimensión es que su valor cambia al cambiar la medida. En realidad, vamos a tener que considerarla como una función definida con respecto a una medida. En la mayoría de los casos es posible fijar inicialmente una medida μ que sea suficientemente fuerte para $\mathcal{H}$ y considerar todas las funciones dimensión en relación con esa medida. Es más, en muchos sistemas como los espacios invariantes por traslaciones y sistemas de Gabor, esta medida se la puede fijar como la de Lebesgue (normalizada) y eso simplifica los detalles técnicos.

El problema surge al considerar un subespacio cerrado $\mathbf{T}$-invariante S de $\mathcal{H}$. Si tomamos una medida ν que solo es suficientemente fuerte para el subespacio S podemos calcular la función dimensión del subespacio con respecto a la medida ν. La pregunta es que sucede al tratar de compararlos con otros subespacios de $\mathcal{H}$ o todo $\mathcal{H}$, que quizás tenga la dimensión calculada respecto de otra medida. Por ello es útil tener un método para recalcular la función dimensión de S con respecto a la medida μ, sin tener que rehacer todas las cuentas.

También se puede considerar a $\mathcal{H}$ como un subespacio de otro espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ en donde se han extendido los operadores para que estén definidos sobre todo $\mathcal{K}$ y sigan conmutando. Este tipo de estructuras fue usada en [HL00] y [Pap03] para ver que todo marco de traslaciones de $\mathcal{H}$ es la proyección sobre $\mathcal{H}$ de una base de Riesz de otro espacio de Hilbert $\mathcal{K}$ que incluye a $\mathcal{H}$. Al considerar a $\mathcal{H}$ incluido en otro espacio $\mathcal{K}$ desconocido, no es posible asegurar que siempre va a alcanzar con considerar la medida μ ya que puede no ser lo suficientemente fuerte para $\mathcal{K}$.

10.5.1. Robertson y dimensión

A partir de las sucesiones μ-quasi-ortonormales decrecientes podemos definir una noción de dimensión. Tiene propiedades similares a la dimensión de los espacios vectoriales, pero es una función en vez de un número como ya habíamos considerado en la Definición 9.4.

Definición 10.17. Sea S un subespacio $\mathbf{T}$-invariante de $\mathcal{H}$ tal que existe una sucesión $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r, \ldots)^t$ (quizás finita) que es μ-quasi-ortonormal decreciente y $S(\Phi) = S$, entonces definimos

$$\dim_{\mathbf{T}}(S) = \text{rango}\left(\{\Phi, \Phi\}_\mu\right) \text{ (respecto de } \mu).$$

Por la Proposición 10.16 esta dimensión está definida de manera única. Además por el Teorema 10.14 se puede extender a todo subespacio.

Proposición 10.18. *Sea S un subespacio (separable) $\mathbf{T}$-invariante de $\mathcal{H}$, entonces tiene definida una dimensión $\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{V})$. Es más, si se conoce una sucesión $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_r, \ldots)^t$ (quizás finita) cualquiera tal que $S(\Psi) = S$ entonces*

$$\dim_{\mathbf{T}}(S) = \text{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu\right) \textit{ (respecto de } \mu).$$

Demostración. En caso de que no conozcamos a Ψ podemos utilizar nuevamente la Proposición 10.4 para ver que como S es separable tiene una sucesión $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_r, \ldots)^t$ (quizás finita) tal que $S(\Psi) = S$. Combinado luego la Proposición 10.12 y el Teorema 10.14 se puede encontrar una sucesión $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_r, \ldots)^t$ (quizás finita) μ-quasi-ortonormal decreciente tal que $S(\Phi) = S$ y que además $\text{rango}\left(\{\Phi, \Phi\}_\mu\right) = \text{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu\right)$. Por la unicidad se tiene que es justamente $\dim_{\mathbf{T}}(S)$. □

Ahora podemos reescribir la Proposición 10.16 de la siguiente manera.

Proposición 10.19. *Dada una medida μ suficientemente fuerte, sean S y T dos subespacios $\mathbf{T}$-invariantes de $\mathcal{H}$. Entonces:*

1. *Si $S \subset T$ y $\dim_{\mathbf{T}}(S) = \dim_{\mathbf{T}}(T) < \infty$ p. p. μ entonces $S = T$.*
2. *Si $S \subset T$ entonces $\dim_{\mathbf{T}}(S) \leqslant \dim_{\mathbf{T}}(T)$.*
3. *Si $S = T$ entonces $\dim_{\mathbf{T}}(S) = \dim_{\mathbf{T}}(T)$.*
4. *Si $S \subset T$ y $\dim_{\mathbf{T}}(T) < \infty$ p. p. μ entonces $\dim_{\mathbf{T}}(T \ominus S) = \dim_{\mathbf{T}}(T) - \dim_{\mathbf{T}}(S)$.*

10.5.2. Cambio a una medida más fuerte

Como notamos anteriormente, la definición de la función dimensión depende de la medida μ elegida. Ahora veremos como cambia la función dimensión al tomar una medida $\nu \gg \mu$. Mas adelante en la Subsección 10.5.4 veremos las condiciones necesarias para tomar otra medida y analizaremos qué pasa en ese caso.

Entonces sea $\nu \gg \mu$, que es suficientemente fuerte para $\mathcal{H}$. Entonces ν suficientemente fuerte para $\mathcal{H}$. Dado un $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_r, \ldots)^t$ tal que $S(\Psi) = \mathcal{H}$ podemos definir las funciones dimensión

$$\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H}) = \text{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu\right) \text{(respecto de } \mu)$$

y

$$\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H}) = \text{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\nu\right) \text{ (respecto de } \nu).$$

Por el teorema de Radon-Nikodym tenemos que existe una función ν-medible α definida en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tal que $\mu = \alpha\nu$ entonces

$$\{\phi, \psi\} = \{\phi, \psi\}_\mu \mu = \{\phi, \psi\}_\mu \alpha\nu = \{\phi, \psi\}_v \nu$$

así que

$$\{\phi, \psi\}_\mu \alpha = \{\phi, \psi\}_v$$

como funciones de $L^1(\nu)$.

Dado un punto $\boldsymbol{\omega}$ en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, tenemos que las matrices (infinitas)

$$\{\Psi, \Psi\}_\mu(\boldsymbol{\omega})\,\alpha(\boldsymbol{\omega}) = \{\Psi, \Psi\}_\nu(\boldsymbol{\omega})$$

porque podemos sacar $\alpha(\boldsymbol{\omega})$ como factor común de cada coeficiente.

Si $\alpha(\boldsymbol{\omega}) = 0$ entonces la matriz $\{\Psi, \Psi\}_\nu(\boldsymbol{\omega})$ es la matriz formada por ceros y tiene rango 0. Si en cambio $\alpha(\boldsymbol{\omega})$ es cualquier número no nulo, entonces $\{\Psi, \Psi\}_\nu(\boldsymbol{\omega})$ es un múltiplo (no nulo) de $\{\Psi, \Psi\}_\mu(\boldsymbol{\omega})$ y ambas tienen el mismo rango. Resumiendo, podemos escribirlo como

$$\text{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu\right) \chi_{\widetilde{\text{sop}\alpha}} = \text{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\nu\right). \tag{10.4}$$

Esta igualdad vale salvo en un conjunto de medida ν cero.

10.5.3. Funciones y medidas

Ya vimos como cambia la función dimensión al cambiar una medida $\nu \gg \mu$. Motivados por este resultado, vamos a tener que considerar pares que representen funciones definidas con respecto a una medida, y buscaremos una relación de equivalencia que permita identificarlos. Veremos en la Proposición 10.24 que a cada subespacio se le puede asignar como función dimensión una de estas clases de equivalencia.

Definición 10.20. Dado un par (d, μ) de una medida μ positiva en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ y una función d (que quizás puede valer ∞ en algunos puntos) en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ medible respecto de μ, vamos a decir que d está definida respecto de μ. En este caso, consideramos funciones que difieren sólo en un conjunto de medida μ cero como la misma.

Es importante notar que estos pares no representan el producto de una función por una medida, en particular

$$\{\phi, \phi\}_\mu \mu \neq \left(\{\phi, \phi\}_\mu, \mu\right).$$

Como las dimensiones están definidas salvo por un conjunto de medida μ, no debemos considerar un cambio de d en un conjunto de medida μ cero como relevante. Además, dada una medida $\nu \gg \mu$, tal que $\mu = \alpha\nu$ entonces motivados por la Ecuación (10.4) queremos que (d, μ) sea equivalente a $\left(d\chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}, \nu\right)$.

Primero vamos a estudiar las propiedades del cambio de μ por una medida $\nu \gg \mu$. Para ello definimos la función $i_{\mu\to\nu}$ que manda el par (d, μ) en el par $\left(d\chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}, \nu\right)$.

Lema 10.21. *La función $i_{\mu\to\nu}$ es inyectiva.*

Demostración. Tomemos (d, μ) y $\left(\tilde{d}, \mu\right)$ tales que $\left(d\chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}, \nu\right)$ sea igual a $\left(\tilde{d}\chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}, \nu\right)$. Entonces consideremos el conjunto donde difieren inicialmente

$$A_\mu = \left\{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / d(\boldsymbol{\omega}) \neq \tilde{d}(\boldsymbol{\omega})\right\},$$

y después de multiplicarse por $\chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}$

$$\begin{aligned} A_\nu &= \left\{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / d(\boldsymbol{\omega})\, \chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}(\boldsymbol{\omega}) \neq \tilde{d}(\boldsymbol{\omega})\, \chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}(\boldsymbol{\omega})\right\} \\ &= \left\{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / d(\boldsymbol{\omega}) \neq \tilde{d}(\boldsymbol{\omega})\right\} \cap \widetilde{\text{sop}}\alpha = A_\mu \cap \widetilde{\text{sop}}\alpha. \end{aligned}$$

Porque si difieren es porque diferían antes y no fueron multiplicadas por 0, así que

$$\chi_{A_\mu}\chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha} = \chi_{A_\nu}.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\mu\left(A_{\mu}\right) &= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_\mu}\left(\boldsymbol{\omega}\right) \mathrm{d}\,\mu\left(\boldsymbol{\omega}\right) = \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_\mu}\left(\boldsymbol{\omega}\right) \alpha\left(\boldsymbol{\omega}\right) \mathrm{d}\,\nu\left(\boldsymbol{\omega}\right)\\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_\mu}\left(\boldsymbol{\omega}\right) \chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\alpha}\left(\boldsymbol{\omega}\right) \alpha\left(\boldsymbol{\omega}\right) \mathrm{d}\,\nu\left(\boldsymbol{\omega}\right) = \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_\nu}\left(\boldsymbol{\omega}\right) \alpha\left(\boldsymbol{\omega}\right) \mathrm{d}\,\nu\left(\boldsymbol{\omega}\right)\\
&= \int_{A_\nu} \alpha\left(\boldsymbol{\omega}\right) \mathrm{d}\,\nu\left(\boldsymbol{\omega}\right),
\end{aligned}$$

porque $\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\alpha}\left(\boldsymbol{\omega}\right) \alpha\left(\boldsymbol{\omega}\right) = \alpha\left(\boldsymbol{\omega}\right)$.

Ahora, como las imágenes no difieren, entonces A_ν tiene medida ν cero y

$$\mu\left(A_\mu\right) = \int_{A_\nu} \alpha\left(\omega\right) \mathrm{d}\,\nu\left(\omega\right) = 0.$$

□

Lema 10.22. *Si se tienen tres medidas positivas $\mu \ll \eta \ll \varkappa$ entonces $i_{\mu\to\eta} \circ i_{\eta\to\varkappa} = i_{\mu\to\varkappa}$.*

Demostración. Existen funciones α, β y γ tales que $\mu = \alpha\eta$, $\eta = \beta\varkappa$ y $\mu = \gamma\varkappa$. También tenemos que $\gamma = \alpha\beta$ (p.p $\varkappa$) así que

$$\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\gamma} = \chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\alpha}\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\beta},$$

y por ello

$$\left(\left(d\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\alpha}\right)\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\beta}, \varkappa\right) = \left(d\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\gamma}, \varkappa\right).$$

□

Con esto podemos definir la equivalencia de los pares.

Definición 10.23. Decimos que (d,μ) es equivalente a $\left(\tilde{d},\nu\right)$ si tomando alguna medida $\eta \gg \mu,\nu$ se tiene que $i_{\mu\to\eta}\left(d,\mu\right) = i_{\nu\to\eta}\left(\tilde{d},v\right)$.

Esta equivalencia está bien definida, porque si tomamos otra medida $\tilde{\eta} \gg \mu,\nu$ podemos tomar otra medida $\varkappa \gg \eta,\tilde{\eta}$ y entonces como

$$i_{\mu\to\varkappa}\left(d,\mu\right) = i_{\eta\to\varkappa}\left(i_{\mu\to\eta}\left(d,\mu\right)\right) = i_{\eta\to\varkappa}\left(i_{\nu\to\eta}\left(\tilde{d},\nu\right)\right) = i_{\nu\to\varkappa}\left(\tilde{d},\nu\right)$$

y por otro lado

$$i_{\tilde{\eta}\to\varkappa}\left(i_{\mu\to\tilde{\eta}}\left(d,\mu\right)\right) = i_{\mu\to\varkappa}\left(d,\mu\right) = i_{\nu\to\varkappa}\left(\tilde{d},\nu\right) = i_{\tilde{\eta}\to\varkappa}\left(i_{\nu\to\tilde{\eta}}\left(\tilde{d},\nu\right)\right)$$

y como $i_{\tilde{\eta}\to\varkappa}$ es inyectiva entonces

$$i_{\mu\to\tilde{\eta}}\left(d,\mu\right) = i_{\nu\to\tilde{\eta}}\left(\tilde{d},\nu\right).$$

10.5.4. Cambio a una medida más débil

Ahora consideremos el proceso inverso, en el que cambiamos a μ por una medida $\nu \ll \mu$.

Entonces sea ν una medida tal que $\nu \ll \mu$ y existe una función d en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ (quizás valga ∞ en algunos puntos) tal que (d, ν) es equivalente a $\left(\dim_{\mathbf{T}} (\mathcal{H})_\mu, \mu\right)$. Por la inyectividad de $i_{\nu \to \mu}$ la función d es única (p. p. ν), así que si logramos ver que ν es suficientemente fuerte entonces $d = \dim_{\mathbf{T}} (\mathcal{H})_\nu$ (salvo un conjunto de medida ν cero).

Por el teorema de Radon-Nikodym tenemos que existe una función μ-medible α definida en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tal que $\nu = \alpha\mu$ entonces

$$\dim_{\mathbf{T}} (\mathcal{H})_\mu = \alpha d$$

Dado $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_r, \ldots)^t$, un sistema de generadores de $\mathcal{H}$ (no necesariamente μ-quasi-ortonormal) tenemos que

$$\dim_{\mathbf{T}} (\mathcal{H})_\mu = \text{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}_\mu\right).$$

Así que si $\boldsymbol{\omega}$ está en $\widetilde{\text{sop}}\alpha^C$ el rango de $\{\Psi, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})$ es cero (salvo para un conjunto de medida μ cero) y en particular todos los coeficientes

$$\left\{\psi_i, \psi_j\right\}_\mu (\boldsymbol{\omega}) = 0.$$

Por ello

$$\left\{\psi_i, \psi_j\right\} = \left\{\psi_i, \psi_j\right\}_\mu \mu = \left\{\psi_i, \psi_j\right\}_\mu \widetilde{\text{sop}}\alpha\mu,$$

y entonces

$$\left\{\psi_i, \psi_j\right\} = \left\{\psi_i, \psi_j\right\}_\mu \frac{\widetilde{\text{sop}}\alpha}{\alpha} \alpha\mu = \left\{\psi_i, \psi_j\right\}_\mu \frac{\widetilde{\text{sop}}\alpha}{\alpha} \nu$$

así que porque todos los productos de los generadores de $\mathcal{H}$ son absolutamente continuos respecto de ν. Por el Corolario 10.3 todos los productos posibles en $\mathcal{H}$ son absolutamente continuos respecto de ν.

10.5.5. Definición final

Podemos recolectar estos resultados en la siguiente proposición:

Proposición 10.24. *Sea μ una medida positivas suficientemente grande para $\mathcal{H}$ y sea $\dim_{\mathbf{T}} (\mathcal{H})_\mu$ la dimensión respecto de μ, entonces:*

- *Si tomamos una medida positiva ν suficientemente grande para $\mathcal{H}$ y $\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\nu}$ es la función dimensión respecto de ν, entonces son equivalentes $\left(\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\mu}, \mu\right)$ y $(\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\nu}, \nu)$.*

- *Recíprocamente si se tiene una medida positiva ν, tal que existe una función d tal que (d, ν) es equivalente a $\left(\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\mu}, \mu\right)$ entonces ν suficientemente grande para $\mathcal{H}$, y $d = \dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\nu}$ (salvo un conjunto de medida ν cero).*

Demostración. En los dos casos debemos tomar una medida positiva $\eta \gg \mu, \nu$.

- Para la primera parte, podemos usar la Subsección 10.5.2 para ver que $\left(\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\mu}, \mu\right)$ es equivalente a $\left(\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\eta}, \eta\right)$ que a su vez es equivalente a $(\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\nu}, \nu)$

- Para demostrar la segunda parte, tenemos que $\left(d, \nu\right)$ es equivalente a $\left(\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\mu}, \mu\right)$ que es equivalente a $\left(\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\eta}, \eta\right)$. Por la Subsección 10.5.4 tenemos que ν es suficientemente fuerte y $\dim_{\mathbf{T}}(\mathcal{H})_{\nu} = d$ (salvo en un conjunto de medida ν cero).

□

Por ello resulta más conveniente definir la función dimensión como una clase de estos pares de funciones y medidas. De todas maneras, en la mayoría de los casos se podrá fijar una medida μ, utilizar siempre la misma y simplificar la notación sobrentendiendo la medida.

10.5.6. Dimensión de espacios invariantes por traslaciones de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$

Bownik define en [Bow00] una noción de función dimensión para los Espacios Invariantes por traslaciones de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Veamos que esta definición coincide con la que usamos en este trabajo al tomar como operadores a las traslaciones de longitud 1 definidas en el Capítulo 4 y como medida a la medida de Lebesgue (normalizada).

Sea S un espacio invariante por traslaciones de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ y tomemos $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_r, \ldots)^t$ una sucesión (quizás finita) tal que $S(\Psi) = S$. En [Bow00] se define la función dimensión como

$$\dim_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)}(S)(\boldsymbol{\omega}) = \dim \left\langle \mathcal{T}\left(\psi_j\right)(\boldsymbol{\omega}), j = 1, \ldots, r, \ldots \right\rangle \tag{10.5}$$

en donde para cada $\boldsymbol{\omega}$ se tiene que $\mathcal{T}(f)(\boldsymbol{\omega})$ es una sucesión en $\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$ definida como

$$\mathcal{T}(f)(\boldsymbol{\omega}) = \left(\check{f}(\boldsymbol{\omega}+\mathbf{k})\right)_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}. \tag{10.6}$$

Nuevamente, al igual que en la Subsección 2.2.2, hemos tomado la antitransformada en lugar de la trasformada, para que esta definición sea compatible con el resto de las definiciones usadas en este trabajo. Los detalles sobre las diferencias y motivaciones de este cambio los discutiremos en la Subsección 10.7.5 al analizar los espectros.

El problema con esta definición para el cálculo de la función dimensión es que aun cuando Ψ tenga una cantidad finita de elementos, los cálculos de la dimensión involucran subespacios en $\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$ que tiene dimensión finita, por lo que son más difíciles de calcular.

Para ver que esa definición de la Ecuación (10.5) es equivalente con la nuestra, podemos compararla a través de las sucesiones quasi-ortonormales decrecientes. Por el Teorema 3.3 de [Bow00], si $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_r, \ldots)^t$ es una sucesión (quizás finita) quasi-ortonormal decreciente tal que $S(\Psi) = S$ entonces

$$\dim_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)}(S)(\boldsymbol{\omega}) = \sum_j \left\|\mathcal{T}\left(\psi_j\right)(\boldsymbol{\omega})\right\| = \sum_j \left\|\mathcal{T}\left(\psi_j\right)(\boldsymbol{\omega})\right\|^2,$$

ya que por la definición de quasi-ortonormal se tiene que $\left\|\mathcal{T}\left(\psi_j\right)(\boldsymbol{\omega})\right\|$ es una función característica. Además, comparando la definición del producto en frecuencias en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ que aparece en la Ecuación (4.1) con la definición de $\mathcal{T}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\{\psi, \psi\}(\boldsymbol{\omega}) &= \sum_{\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{Z}^d} \check{\psi}(\boldsymbol{\omega}-\mathbf{k})\overline{\check{\psi}(\boldsymbol{\omega}-\mathbf{k})} \\ &= \left\langle \mathcal{T}\left(\psi_j\right)(\boldsymbol{\omega}), \mathcal{T}\left(\psi_j\right)(\boldsymbol{\omega})\right\rangle_{\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)} = \left\|\mathcal{T}\left(\psi_j\right)(\boldsymbol{\omega})\right\|^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, tomando como medida a la medida de Lebesgue (normalizada) tenemos que ambas definiciones de quasi-ortonormalidad coinciden y además

$$\dim_{\mathbf{T}}(S)(\boldsymbol{\omega}) = \operatorname{rango}\left(\{\Psi, \Psi\}(\boldsymbol{\omega})\right) = \sum_j \left\{\psi_j, \psi_j\right\}(\boldsymbol{\omega})$$

porque como todos los coeficientes que están fuera de la diagonal son nulos. Así que ambas definiciones coinciden, o sea que

$$\dim_{\mathbf{E}}(S)(\boldsymbol{\omega}) = \dim_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)}(S)(\boldsymbol{\omega}). \tag{10.7}$$

El problema con usar estas fórmula para hacer los cálculos es que implica quasi-ortonormalizar los generadores. Como vimos a lo largo de la Sección 10.2 el rango de las matrices asociadas no varía al quasi-ortonormalizar los vectores y por ello se puede calcular la dimensión a partir de cualquier conjunto de generadores.

Un caso especial es cuando existe una sucesión $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots)^t$ que induce una base ortonormal de S. En ese caso la función dimensión es constante y se puede utilizar la medida de Lebesgue (normalizada).

10.6. Largo

Recordemos que el largo de un subespacio $\mathbf{T}$-invariante S en $\mathcal{H}$ es la menor cantidad de elementos que puede tener un sistema de generadores $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r)$ tal que $S(\Psi) = S$. En el caso en que todos los generadores tienen longitud infinita, decimos que el largo es infinito. Veremos ahora que se puede definir un concepto análogo usando la función dimensión.

Proposición 10.25. *Sea S un subespacio $\mathbf{T}$-invariante de $\mathcal{H}$. Entonces tenemos que* $\operatorname{largo}(S) = \operatorname{sup\,ess}(\dim_{\mathbf{T}}(S))$. *O para ser más precisos para toda medida μ suficientemente fuerte,* $\operatorname{largo}(S) = \operatorname{sup\,ess}_\mu\left(\dim_{\mathbf{T}}(S)_\mu\right)$.

Demostración. Fijemos una medida μ suficientemente fuerte.

Si tomamos $l = \operatorname{sup\,ess}_\mu\left(\dim_{\mathbf{T}}(S)_\mu\right)$ entonces por el Teorema 10.14 existe una sucesión μ-quasi-ortonormal decreciente $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots)$ (quizás finita) tal que $S(\Phi) = S$ y

$$\operatorname*{sup\,ess}_{\mu}\left(\operatorname{rango}\{\Phi, \Phi\}_\mu\right) = l.$$

Como todas las funciones están definidas salvo un conjunto de medida μ cero, podemos cambiar el representante y suponer que en realidad es el supremo. Como es diagonal y decreciente, en realidad

$$\operatorname{rango}\{\Phi, \Phi\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) = \max_n\left(\{\phi_n, \phi_n\}_\mu = 1\right).$$

Así que salvo los primeros l coeficientes de Φ, todos los demás son 0 y se pueden eliminar. De manera que

$$S(\Phi_l) = S$$

y por lo tanto $\operatorname{largo}(S) \leqslant l$.

Para ver la otra desigualdad, tomemos un sistema de generadores minimal $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_l)$ que sabemos que existe porque el largo es l. Entonces

$$\operatorname{rango} \{\Psi, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega}) \leqslant l$$

porque en cada $\boldsymbol{\omega}$ son matrices de tamaño $l \times l$. Así que el supremo tiene la misma cota. □

En realidad, un poco más en general, dada una clase (d, μ) se puede definir el supremo esencial, tomando el supremo esencial de cualquiera de sus representantes. Todos dan iguales por la siguiente proposición.

Proposición 10.26. *Si (d, μ) es equivalente a $\left(\tilde{d}, \nu\right)$, donde d es no negativa p. p. μ y $\tilde{d}$ es no negativa p. p. ν, entonces* $\sup \operatorname{ess}_\mu (d) = \sup \operatorname{ess}_\nu \left(\tilde{d}\right)$.

Demostración. Alcanza con probarlo cuando $\mu \ll \nu$. Si no es así tomamos $\eta \gg \mu, \nu$, un par $\left(\breve{d}, \eta\right)$ que sea equivalente a (d, μ) que a su vez es equivalente a $\left(\tilde{d}, \nu\right)$ y probamos que $\sup \operatorname{ess}_\mu (d) = \sup \operatorname{ess}_\eta \left(\breve{d}\right) = \sup \operatorname{ess}_\nu \left(\tilde{d}\right)$.

Si $\mu \ll \nu$ entonces existe α tal que $\alpha\nu = \mu$ y $\tilde{d} = d\chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}$. Si $\sup \operatorname{ess}_\mu (d) = s$ el conjunto

$$A_s = \{\omega \in \mathbb{T}^n / d(\omega) > s\}$$

tiene medida μ cero. Entonces el conjunto

$$\begin{aligned} \tilde{A}_s = \left\{\omega \in \mathbb{T}^n / \tilde{d}(\omega) > s\right\} &= \left\{\omega \in \mathbb{T}^n / d(\omega) \chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}(\omega) > s\right\} \\ = \{\omega \in \mathbb{T}^n / d(\omega) > s\} \cap \widetilde{\text{sop}}\alpha &= A_s \cap \widetilde{\text{sop}}\alpha, \end{aligned} \tag{10.8}$$

donde usamos que $s \geqslant 0$ para escribir al conjunto como una intersección.

Entonces

$$\begin{aligned} \nu\left(\tilde{A}_s\right) &= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{\tilde{A}_s}(\omega) \, \mathrm{d}\,\nu(\omega) = \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_s}(\omega) \chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}(\omega) \, \mathrm{d}\,\nu(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_s}(\omega) \frac{\chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}}{\alpha}(\omega) \, \alpha(\omega) \, \mathrm{d}\,\nu(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_s}(\omega) \frac{\chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}}{\alpha}(\omega) \, \mathrm{d}\,\mu(\omega) = \int_{A_s} \frac{\chi_{\widetilde{\text{sop}}\alpha}}{\alpha}(\omega) \, \mathrm{d}\,\mu(\omega) = 0 \end{aligned}$$

porque A_s tiene medida μ cero.

Veamos la otra desigualdad. Si $\sup \mathrm{ess}_\nu \left(\tilde{d}\right) = s$ entonces $\tilde{A}_s$ tiene medida ν cero. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu\left(A_s\right) &= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_s}(\omega)\,\mathrm{d}\,\mu(\omega) = \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_s}(\omega)\,\alpha(\omega)\,\mathrm{d}\,\nu(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{A_s}(\omega)\,\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\alpha}(\omega)\,\alpha(\omega)\,\mathrm{d}\,\nu(\omega) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{\tilde{A}_s}(\omega)\,\alpha(\omega)\,\mathrm{d}\,\nu(\omega) = \int_{\tilde{A}_s} \alpha(\omega)\,\mathrm{d}\,\nu(\omega) = 0
\end{aligned}$$

porque $\tilde{A}_s$ tiene medida ν cero. □

10.7. Espectros

Para los espacios invariantes por traslaciones definimos dos espectros $\tilde{\sigma}$ y σ. Ahora daremos las dos definiciones respectivas del caso abstracto. Después probaremos que uno es la clausura esencial del otro, o sea el menor conjunto cerrado que lo incluye salvo un conjunto de medida μ cero.

10.7.1. Espectro $\tilde{\sigma}$

La primera definición de espectro va a servir para extender al caso abstracto el espectro de los espacios invariantes por traslaciones utilizados en [Bow00], [BDR94b]. En estos trabajos lo denotan con σ, pero preferimos nombrarlo con $\tilde{\sigma}$ y reservar el otro símbolo para la otra definición de espectro. A diferencia de los espectros usuales definidos para operadores, este primer espectro $\tilde{\sigma}$ no es un conjunto cerrado. Veremos más detalles al comparar los dos espectros en la Proposición 10.37.

Definiremos el espectro como el soporte (sin clausurar) de la función dimensión. Sin embargo, como la función dimensión depende de la medida utilizada para calcularla, debemos solucionar algunos detalles técnicos. En realidad dada una clase (d, μ) se puede definir el soporte, tomando el soporte de cualquiera de sus representantes y considerando nuevamente una equivalencia.

Definición 10.27. Dado un par (A, μ) de una medida μ positiva en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ y un conjunto A en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ medible respecto de μ, vamos a decir que A está definido respecto de μ. Además consideramos los pares (A, μ) y $\left(\tilde{A}, \mu\right)$ en que los conjuntos A y $\tilde{A}$ difieren sólo en un conjunto de medida μ cero como idénticos.

Ahora necesitamos definir la equivalencia de las clases al cambiar las medidas.

Definición 10.28. Decimos que (A,μ) es equivalente a $\left(\tilde{A},\nu\right)$ si y sólo si (χ_A,μ) es equivalente a $(\chi_{\tilde{A}},\nu)$, considerados como pares de funciones y medidas.

Con esta notación estamos en condiciones de definir el soporte (sin clausurar) de una clase (d,μ).

Proposición 10.29. *Si* (d,μ) *es equivalente a* $\left(\tilde{d},\nu\right)$ *entonces* $(\widetilde{\mathrm{sop}}\,(d)\,,\mu)$ *es equivalente a* $\left(\widetilde{\mathrm{sop}}\left(\tilde{d}\right),\nu\right)$.

Demostración. Alcanza con probarlo cuando $\mu \ll \nu$. Si no es así tomamos $\eta \gg \mu,\nu$, y consideramos un par $\left(\check{d},\eta\right)$ que sea equivalente a (d,μ) y a $\left(\tilde{d},\nu\right)$. En esas condiciones podríamos probar que $(\widetilde{\mathrm{sop}}\,(d)\,,\mu)$ es equivalente a $\left(\widetilde{\mathrm{sop}}\left(\check{d}\right),\eta\right)$ que a su vez es equivalente a $\left(\widetilde{\mathrm{sop}}\left(\tilde{d}\right),\nu\right)$.

Si $\mu \ll \nu$ entonces existe α tal que $\alpha\nu = \mu$ y $\tilde{d} = d\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\alpha}$. Tomamos los conjuntos

$$\widetilde{\mathrm{sop}}\,(d) = A_0 = \{\omega \in \mathbb{T}^n / d\,(\omega) \neq 0\}$$

y

$$\widetilde{\mathrm{sop}}\left(\tilde{d}\right) = \tilde{A}_0 = \left\{\omega \in \mathbb{T}^n / \tilde{d}\,(\omega) \neq 0\right\}.$$

De manera análoga a la Ecuación (10.8) tenemos que

$$\widetilde{\mathrm{sop}}\left(\tilde{d}\right) = \widetilde{\mathrm{sop}}\,(d) \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha.$$

Entonces

$$\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left(\tilde{d}\right)} = \chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}(d)}\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\alpha}$$

y por ello $\left(\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}(d)},\mu\right)$ es equivalente a $\left(\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\left(\tilde{d}\right)},\nu\right)$. □

Ahora definimos el espectro $\tilde{\sigma}$.

Definición 10.30. Sea S un subespacio $\mathbf{T}$-invariante (cerrado) de $\mathcal{H}$ y una medida μ suficientemente fuerte. Definimos

$$\tilde{\sigma}\,(S) = \left(\widetilde{\mathrm{sop}}\left(\dim_{\mathbf{T}}(S)_\mu\right),\mu\right)$$

Como la función $\dim_{\mathbf{T}}(S)_{\mu}$ está definida salvo en un conjunto de medida μ cero, tenemos que el espectro $\tilde{\sigma}(S)$ también está definido salvo en un conjunto de medida μ cero.

En muchos casos es posible fijar una medida μ y simplificar la notación eliminando todas las referencias con respecto a la medida y sobrentendiendo la medida. Además en varios ejemplos interesantes como los espacios invariantes por traslaciones y los sistemas de Gabor, se puede considerar la medida de Lebesgue (normalizada).

La idea del espectro se puede generalizar para comparar conjuntos de nivel distinto de 0.

Proposición 10.31. *Si (d, μ) es equivalente a $\left(\tilde{d}, \nu\right)$ y definimos los conjuntos de nivel*

$$D_l = \{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / d(\boldsymbol{\omega}) = l\}$$
$$\tilde{D}_l = \left\{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / \tilde{d}(\boldsymbol{\omega}) = l\right\}$$

con $l = 1, \ldots, \infty$, entonces (D_l, μ) es equivalente a $\left(\tilde{D}_l, \mu\right)$.

Demostración. Al igual que antes, alcanza con probarlo cuando $\mu \ll \nu$. Si $\mu \ll \nu$ entonces existe α tal que $\alpha\nu = \mu$ y $\tilde{d} = d\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\alpha}$.

Como $l \neq 0$ entonces

$$\tilde{D}_l = D_l \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha$$

Entonces

$$\chi_{\tilde{D}_l} = \chi_{D_l}\chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\alpha}$$

y por ello $\left(\chi_{D_l}, \mu\right)$ es equivalente a $\left(\chi_{\tilde{D}_l}, \nu\right)$. □

Vamos a utilizar este resultado para analizar los subespacios con funciones dimensión tales que el conjunto donde toman valor infinito tiene medida positiva. Esta propiedad no depende de la medida elegida. En la Sección 12.2 aparece un problema con los subespacios con función dimensión de este tipo y usaremos este resultado para ver que no se puede solucionar cambiando la medida.

Corolario 10.32. *Sea S un subespacio $\mathbf{T}$-invariante (cerrado) de $\mathcal{H}$ y una medida μ suficientemente fuerte. Entonces el conjunto*

$$N_\mu = \left\{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / \dim_{\mathbf{T}}(S)_\mu(\omega) = \infty\right\}$$

tiene medida μ cero si y solo si para toda otra medida ν suficientemente fuerte, el conjunto

$$N_{\nu} = \left\{ \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / \dim_{\mathbf{T}} (S)_{\mu} (\omega) = \infty \right\}$$

también tiene medida ν es cero.

Demostración. Si el conjunto N_{μ} tiene medida μ cero entonces (N_{μ}, μ) es equivalente a $(\emptyset, \mu)$, que a su vez es equivalente a $(\emptyset, \nu)$. Por la Proposición anterior (N_{μ}, μ) es equivalente a (N_{ν}, ν). Entonces $(\emptyset, \nu)$ es equivalente a (N_{ν}, ν) y por ello N_{ν} tiene medida ν cero.

El resultado inverso de demuestra de forma análoga. □

10.7.2. Espectro σ

Ahora daremos la definición de otro espectro y luego compararemos los dos espectros. Este espectro está inspirado en los espectros de los operadores como se ve claramente de la definición.

Dado un subespacio $\mathbf{T}$-invariante S de $\mathcal{H}$, podemos considerar las restricciones de los operadores $T_1, T_2, \ldots, T_n$ al subespacio S. Las notamos como $T_i|_S : S \to S$ para $i = 1, \ldots, n$. De la misma manera definimos el vector de operadores que conmutan $\mathbf{T}|_S = (T_1|_S, T_2|_S, \ldots, T_n|_S)$. Como S es cerrado, entonces lo podemos considerar como un espacio de Hilbert. Como es invariante por los operadores elegidos, las restricciones están bien definidas. Además como los operadores iniciales son unitarios, los nuevos también lo son y por la misma razón siguen conmutando.

Ahora podemos usar el espectro conjunto definido en la Proposición 7.2 para dar otra definición de espectro.

Definición 10.33. Sea S un subespacio $\mathbf{T}$-invariante (cerrado) de $\mathcal{H}$ entonces definimos

$$\sigma (S) = \sigma \left(T_1|_S, T_2|_S, \ldots, T_n|_S \right).$$

Una diferencia entre los espectros $\tilde{\sigma}$ y σ es que el primero está en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ pensado como el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$, con los bordes identificados y en cambio el segundo está en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}^n$ pensado adentro de $\mathbb{C}^n$. Entonces deberemos comparar σ con $\mathbf{z}(\tilde{\sigma})$, para que estén ambos dentro de $\mathbf{z}(\mathbb{T}^n) \subset \mathbb{C}^n$. De la misma manera una medida μ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ induce una medida en $\{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}^n$ que también notaremos como μ.

Una diferencia más importante es que el espectro σ está definido en forma única. En cambio el espectro $\tilde{\sigma}$ está definido salvo un conjunto de medida μ

cero (o para ser más preciso en una clase de conjuntos y medidas, como la que vimos). En particular, σ es un conjunto cerrado, pero $\tilde{\sigma}$ no es necesariamente un cerrado. Es más, como veremos en el ejemplo en la Sección 13.1 puede ser que no haya ningún conjunto cerrado equivalente a $\tilde{\sigma}$ con respecto a la medida μ.

10.7.3. Clausura esencial

Nuestro objetivo es comparar los espectros $\tilde{\sigma}$ y σ. Veremos que σ es en algún sentido la clausura de $\mathbf{z}(\tilde{\sigma})$. El problema de la clausura usual es que dado cualquier punto $\boldsymbol{\omega}$ del toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, tal que $\mu(\{\boldsymbol{\omega}\}) = 0$ tenemos que $\tilde{\sigma}$ es equivalente a $\tilde{\sigma} \cup \{\boldsymbol{\omega}\}$, así que $\mathbf{z}(\boldsymbol{\omega})$ esta en la clausura de $\mathbf{z}(\tilde{\sigma} \cup \{\boldsymbol{\omega}\})$. Es más, como μ es finita hay sólo un conjunto numerable de puntos $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_2, \ldots, \tilde{\boldsymbol{\omega}}_n, \ldots$ (quizás finito) tal que la medida $\mu(\{\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i\}) \neq 0$. Entonces se puede elegir un denso numerable $D = \{\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n, \ldots\}$ tal que la medida $\mu(\{\boldsymbol{\omega}_i\}) \neq 0$. (Si μ es la medida de Lebesgue normalizada se pueden elegir por ejemplo los puntos con todas las coordenadas racionales de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$.) Entonces $\tilde{\sigma}$ es equivalente a $\tilde{\sigma} \cup D$ y la clausura de $\mathbf{z}(\tilde{\sigma} \cup Z)$ es todo $\mathbf{z}(\mathbb{T}^n)$.

Entonces debemos definir una clausura que pueda ignorar conjuntos de medida μ cero.

Definición 10.34. Sea A un subconjunto de $\mathbf{z}(\mathbb{T}^n)$ y sea μ una medida positiva definida en $\mathbf{z}(\mathbb{T}^n)$. Definimos la *clausura esencial* de A con respecto a la medida como la intersección de todos los cerrados C tales que la parte de A que queda afuera de C tiene medida μ cero. O sea

$$\overline{A}^{\mu\,\mathrm{ess}} = \bigcap_{\substack{C \text{ cerrado} \\ \mu(A \setminus C)=0}} C.$$

En los casos en que la medida μ esté clara del contexto, lo notaremos directamente como $\overline{A}^{\mathrm{ess}}$. Por ejemplo en los espacios invariantes por traslaciones y los sistemas de Gabor en que μ es usual utilizar la medida de Lebesgue normalizada.

En el caso en que la medida μ de A sea cero, la clausura esencial es el conjunto vacío.

Como es usual, veremos varias definiciones equivalentes.

Proposición 10.35. *Son equivalentes*

1. $\overline{A}^{\mu\,\mathrm{ess}} = \bigcap_{\substack{C \text{ cerrado} \\ \mu(A \setminus C)=0}} C$

2. $\overline{A}^{\mu\,\mathrm{ess}} = \{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n /\ \mu(B_r(\boldsymbol{\omega}) \cap A) > 0$ *para todo* $r > 0\}$ *en donde* $B_r(\mathbf{z})$ *es la bola (abierta) de centro* $\mathbf{z}$ *y radio* r.

Demostración. Probaremos las dos inclusiones por separado.

Dado un $\boldsymbol{\omega} \notin \bigcap_{\substack{C \text{ cerrado} \\ \mu(A\setminus C)=0}} C$ entonces en particular existe un cerrado C_0 tal que $x \notin C_0$ y $\mu(A\setminus C_0) = 0$. Entonces el abierto $U_0 = \mathbf{z}(\mathbb{T}^n) \setminus C_0$ contiene una bola de centro $\boldsymbol{\omega}$ y radio $r > 0$ tal que $\boldsymbol{\omega} \subset B_r(\boldsymbol{\omega}) \subset U_0$ y por ello $\mu(B_r(\boldsymbol{\omega}) \cap A) \leqslant \mu(U_0 \cap A) \leqslant \mu(U_0) = 0$.

Recíprocamente, si $\boldsymbol{\omega}$ es un punto tal que existe un número $r > 0$ tal que $\mu(B_r(\boldsymbol{\omega}) \cap A) = 0$ entonces consideramos el cerrado $C_0 = \mathbf{z}(\mathbb{T}^n) \setminus B_r(\boldsymbol{\omega})$ y entonces $\mu(A\setminus C_0) = \mu(A \cap B_r(\boldsymbol{\omega})) = 0$ y como $\boldsymbol{\omega} \notin C_0$ entonces $\omega \notin \bigcap_{\substack{C \text{ cerrado} \\ \mu(A\setminus C)=0}} C$. □

Ahora veremos que esta clausura no depende de la medida μ elegida.

Proposición 10.36. *Dados los pares equivalentes* (A, μ) *y* $\left(\tilde{A}, \nu\right)$ *entonces* $\overline{A}^{\mu\,\mathrm{ess}} = \overline{\tilde{A}}^{\nu\,\mathrm{ess}}$.

Demostración. Como en los resultados anteriores, alcanza con demostrarlo cuando $\mu \ll \nu$.

Dada una función α tal que $\mu = \alpha\nu$ tenemos que como (A, μ) es equivalente a $\left(\tilde{A}, \nu\right)$

$$\chi_A = \chi_{\tilde{A}} \chi_{\widetilde{\mathrm{sop}}\alpha}$$

salvo en un conjunto de medida ν cero. Entonces

$$\tilde{A} = A \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha$$

salvo en un conjunto de medida ν cero. Si tomamos un conjunto cerrado C entonces $\tilde{A}\setminus C$ tiene medida ν cero si y solo si $(A \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha) \setminus C = (A\setminus C) \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha$ tiene medida ν cero.

Por otro lado, (A, μ) es equivalente a $(A \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha, \nu)$ que es equivalente a $(A \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha, \mu)$ así que por la inyectividad de $i_{\mu\to\nu}$ tenemos que

$$A = A \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha$$

salvo por un conjunto de medida μ cero. Si tomamos un conjunto cerrado C entonces $A\setminus C$ tiene medida μ cero si y solo si $(A \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha) \setminus C = (A\setminus C) \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha$ tiene medida μ cero.

Sólo nos falta ver que $(A\setminus C) \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha$ tiene medida μ cero si y sólo si $(A\setminus C) \cap \widetilde{\mathrm{sop}}\alpha$ tiene medida ν cero.

Por un lado, como $\nu \gg \mu$ entonces si $(A\backslash C) \cap \widetilde{\operatorname{sop}}\alpha$ tiene medida ν cero entonces $(A\backslash C) \cap \widetilde{\operatorname{sop}}\alpha$ tiene medida μ cero.

Por otro lado, si $(A\backslash C) \cap \widetilde{\operatorname{sop}}\alpha$ tiene medida μ cero entonces calculamos

$$\begin{aligned}
\nu\left((A\backslash C) \cap \widetilde{\operatorname{sop}}\alpha\right) &= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{(A\backslash C)}\chi_{\widetilde{\operatorname{sop}}\alpha}\,\mathrm{d}\,\nu = \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{(A\backslash C)}\chi_{\widetilde{\operatorname{sop}}\alpha}\chi_{\widetilde{\operatorname{sop}}\alpha}\,\mathrm{d}\,\nu \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{(A\backslash C)}\chi_{\widetilde{\operatorname{sop}}\alpha}\frac{\chi_{\widetilde{\operatorname{sop}}\alpha}}{\alpha}\alpha\,\mathrm{d}\,\nu \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \chi_{(A\backslash C)}\chi_{\widetilde{\operatorname{sop}}\alpha}\frac{\chi_{\widetilde{\operatorname{sop}}\alpha}}{\alpha}\,\mathrm{d}\,\mu = \int_{(A\backslash C)\cap\widetilde{\operatorname{sop}}\alpha} \frac{\chi_{\widetilde{\operatorname{sop}}\alpha}}{\alpha}\,\mathrm{d}\,\mu = 0
\end{aligned}$$

porque $(A\backslash C) \cap \widetilde{\operatorname{sop}}\alpha$ tiene medida μ cero.

Juntando estas tres propiedades tenemos que $A\backslash C$ tiene medida μ cero si y sólo si $\tilde{A}\backslash C$ tiene medida ν cero para todo cerrado C. Por ello las dos clausuras esenciales son iguales. $\square$

10.7.4. Relación entre los espectros

Demostraremos ahora la relación entre ambos espectros. A partir de esta relación podremos calcular los espectros σ de todos los ejemplos vistos anteriormente.

Proposición 10.37. *Sea S un subespacio $\mathbf{T}$-invariante de $\mathcal{H}$ y sea μ una medida suficientemente fuerte entonces*

$$\sigma(S) = \overline{\mathbf{z}(\tilde{\sigma}(S))}^{\mu\,\mathrm{ess}}.$$

Demostración. Veamos las dos inclusiones.

- Veamos que $\sigma(S) \subset \overline{\tilde{\sigma}(S)}^{\mu\,\mathrm{ess}}$.

  Sea $\boldsymbol{\omega}$ un punto que no pertenece a $\overline{\tilde{\sigma}(S)}^{\mu\,\mathrm{ess}}$. Entonces existe un número real $r > 0$ tal que $\mu(B_r(\boldsymbol{\omega}) \cap \tilde{\sigma}(S)) = 0$, y podemos tomar una función m continua en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tal que $m(\boldsymbol{\omega}) = 1$ y $\operatorname{sop} m \subset B_r(\boldsymbol{\omega})$. Entonces para cualquier ϕ y ψ en S tenemos que

  $$\{m \bullet \phi, \psi\}_\mu = m\{\phi, \psi\}_\mu = 0,$$

  porque el $\widetilde{\operatorname{sop}}\{\phi, \psi\}_\mu$ y el $\operatorname{sop} m$ son disjuntos (salvo un conjunto de medida μ cero.)

  Entonces como esto vale para todo ψ en $S(\phi) \subset S$ tenemos que $m \bullet \phi = 0$. Además como m es continua entonces está definido $m(\mathbf{T}|_S)$ y

$m\left(\mathbf{T}|_S\right)\phi = m \bullet \phi = 0$. Como esto vale para todo ϕ de S, entonces $m\left(\mathbf{T}|_S\right) = 0$.

Así que $m\left(\mathbf{T}|_S\right) = 0\left(\mathbf{T}|_S\right)$ (la función 0 en todo el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$), y como el cálculo funcional es inyectivo para las funciones continuas en el espectro entonces que $m|_{\sigma(S)} = 0|_{\sigma(S)}$. En particular como $m(\boldsymbol{\omega}) = 1$ tenemos que $\boldsymbol{\omega}$ no está en $\sigma(S)$.

- Veamos que $\sigma(S) \supset \overline{\tilde{\sigma}(S)}^{\mu\,\mathrm{ess}}$.

  Sea $\boldsymbol{\omega}$ un punto que no pertenece a $\sigma(S)$. Entonces existe un número real $r > 0$ tal que $B_r(\boldsymbol{\omega}) \cap \sigma(S) = \emptyset$, y podemos tomar una función m continua en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tal que $m(\boldsymbol{\omega}) = 1$ y $\operatorname{sop} m \subset B_r(\boldsymbol{\omega})$. Entonces $m|_{\sigma(S)} = 0|_{\sigma(S)}$ y por lo tanto el operador $m\left(\mathbf{T}|_S\right) = 0$.

  Dado cualquier ϕ y ψ en S tenemos que

  $$m\{\phi,\psi\}_\mu = \{m \bullet \phi,\psi\}_\mu = \{m(\mathbf{T})\phi,\psi\}_\mu = \{0,\psi\}_\mu = 0$$

  así que el $\widetilde{\operatorname{sop}}\{\phi,\psi\}_\mu$ y $\operatorname{sop} m$ son disjuntos (salvo un conjunto de medida μ cero.)

  Entonces como esto vale para todo ϕ, ψ en S tenemos que $\tilde{\sigma}(S)$ y $\operatorname{sop} m$ son disjuntos, salvo un conjunto de medida 0. Como m es continua y $m(\boldsymbol{\omega}) = 1$ entonces $\operatorname{sop} m$ incluye un entorno de $\boldsymbol{\omega}$ y en particular a una bola de radio $r' > 0$ para r' suficientemente pequeño. Entonces $\boldsymbol{\omega}$ no está en $\overline{\tilde{\sigma}(S)}^{\mu\,\mathrm{ess}}$.

□

Con este resultado podemos ver que los espectros σ y $\mathbf{z}(\tilde{\sigma})$ de los ejemplos anteriores son iguales. En todos los casos habíamos encontrado un espectro $\tilde{\sigma}(S)$ cerrado.

En los espacios de banda limitada del Capítulo 3 y los sistemas de Gabor de la Sección 6.1 consideramos como medida μ a la medida de Lebesgue (normalizada). En los subespacios que habíamos elegido para los ejemplos, el espectro $\tilde{\sigma}$ era todo el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ o un intervalo cerrado. Si tomáramos un cerrado más pequeño la diferencia incluiría un abierto no vacío, que tiene medida de Lebesgue positiva y por ello $\sigma = \mathbf{z}(\tilde{\sigma})$.

En los ejemplos en que tomamos como los operadores a la identidad en la Subsección 6.2.1 y la paridad en la Subsección 6.2.2, la medida está concentrada en uno o dos puntos respectivamente. El espectro $\tilde{\sigma}$ está formado justamente por los puntos en donde está concentrada la medida. Por ello no se pueden eliminar estos puntos aislados del espectro y queda $\sigma = \mathbf{z}(\tilde{\sigma})$.

De manera similar, en el ejemplo en que tomamos dos veces el operador de traslación en la Subsección 6.2.3 la medida está concentrada en la diagonal de $\mathbb{T}^2$. Sobre esa recta es la medida de Lebesgue de la recta, normalizada para que tenga medida 1. Si tomáramos un cerrado más pequeño la diferencia incluiría un abierto de la recta no vacío, que tiene medida de Lebesgue positiva y por ello $\sigma = \mathbf{z}(\tilde{\sigma})$.

Vamos a analizar las distintas estructuras dadas a $L^2(\mathbb{R}) \oplus L^2(\mathbb{R})$ en la Sección 6.3 por separado. En las primeras dos la medida es también la medida de Lebesgue sobre $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}^2$ respectivamente, y el espectro $\tilde{\sigma}$ es todo el toro $\mathbb{T}$ y $\mathbb{T}^2$ respectivamente. Así que en ambos casos tenemos que $\sigma = \mathbf{z}(\tilde{\sigma})$. La tercer elección de operadores que realizamos en la Subsección 6.3.3 es diferente a los casos anteriores y la veremos en detalle en la Sección 13.3.

Más adelante en el Capítulo 13 vamos a construir ejemplos en donde se tiene que los espectros σ y $\mathbf{z}(\tilde{\sigma})$ no son iguales. Es más, vamos a construir ejemplos donde el conjunto $\sigma \backslash \mathbf{z}(\tilde{\sigma})$ tiene medida positiva. Es importante notar que por las propiedades de la clausura esencial $\mathbf{z}(\tilde{\sigma}) \backslash \sigma$ tiene medida cero.

10.7.5. Espectro de los espacios invariantes por traslaciones

Finalmente queremos comparar la definición que dimos del espectro $\tilde{\sigma}$ con la que aparece en la literatura relacionada con los espacios invariantes por traslaciones, por ejemplo en [Bow00], [BDR94b]. En particular, vamos a explicar porque decidimos cambiar las definiciones asociadas a espacios invariantes por traslaciones para que utilicen la antitransformada de Fourier en vez de la transformada.

Como es usual, al considerar estos espacios vamos a tomar como μ a la medida de Lebesgue normalizada y en general no la escribiremos en forma explícita en la notación.

Al igual que en este trabajo, el espectro $\tilde{\sigma}$ de un espacio invariante por traslaciones se define como es el soporte (sin clausurar) de la función dimensión. Como vimos en la Subsección 10.5.6, ambas definiciones de la función dimensión coinciden si tomamos la transformación

$$\mathcal{T}(f)(\boldsymbol{\omega}) = \left(\check{f}(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k})\right)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d},$$

que ya habíamos definido en la Ecuación (10.6).

Sin embargo, la notación más usual es utilizar la transformada en lugar de la antitransformada, o sea

$$\mathcal{T}^{\mathrm{usual}}(f)(\boldsymbol{\omega}) = \left(\hat{f}(\boldsymbol{\omega} + \mathbf{k})\right)_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d}.$$

Por las propiedades de la transformada de Fourier, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{\text{usual}}(f)(\boldsymbol{\omega}) &= \left(\hat{f}(\boldsymbol{\omega}+\mathbf{k})\right)_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} = \left(\check{f}(-\boldsymbol{\omega}-\mathbf{k})\right)_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d}\\ &= \left(\check{f}(-\boldsymbol{\omega}+\mathbf{j})\right)_{-\mathbf{j}\in\mathbb{Z}^d} = \mathcal{T}^{-}(f)(-\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}$$

De esta identidad se deducen dos diferencias. La primera es que los índices $\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d$ aparecen con el signo cambiado. Sin embargo al tomar los subespacios generados y analizar si son nulos o no, esta renumeración no tiene importancia ya que no afecta las dimensiones de los subespacios generados y por ello

$$\dim\left\langle \mathcal{T}^{-}\left(\psi_j\right)(\boldsymbol{\omega}), j=1,\dots r,\dots\right\rangle = \dim\left\langle \mathcal{T}\left(\psi_j\right)(\boldsymbol{\omega}), j=1,\dots r,\dots\right\rangle.$$

La diferencia relevante entre $\mathcal{T}^{\text{usual}}$ y $\mathcal{T}$ es que aparece un signo negativo en el punto $\boldsymbol{\omega}$ en que se evalúa y por ello

$$\begin{aligned}\dim^{\text{usual}}_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)}(S)(\boldsymbol{\omega}) &= \dim\left\langle \mathcal{T}^{\text{usual}}\left(\psi_j\right)(\boldsymbol{\omega}), j=1,\dots r,\dots\right\rangle\\ &= \dim\left\langle \mathcal{T}^{-}\left(\psi_j\right)(-\boldsymbol{\omega}), j=1,\dots r,\dots\right\rangle\\ &= \dim\left\langle \mathcal{T}\left(\psi_j\right)(-\boldsymbol{\omega}), j=1,\dots r,\dots\right\rangle\\ &= \dim_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)}(S)(-\boldsymbol{\omega}).\end{aligned}$$

Así que en particular tenemos que $\boldsymbol{\omega}\in\widetilde{\operatorname{sop}}\dim^{\text{usual}}_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)}(S)$ si y sólo si $-\boldsymbol{\omega}\in\widetilde{\operatorname{sop}}\dim_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)}(S)$, así que

$$\tilde{\sigma}^{\text{usual}}(S) = -\tilde{\sigma}(S).$$

O sea que uno es la imagen del otro respecto del $\mathbf{0}$. Como los conjuntos $\tilde{\sigma}$ no son necesariamente simétricos respecto del origen, entonces $\tilde{\sigma}$ y $\tilde{\sigma}^{\text{usual}}$ son distintos en general.

En la Proposición 10.37 vimos que los espectros están relacionados por la fórmula $\sigma(S) = \overline{\mathbf{z}(\tilde{\sigma}(S))}^{\text{ess}}$. Es claro que esta relación se deja de cumplir en general cuando se toma el espectro $\tilde{\sigma}^{\text{usual}}$. El cambio de signo en $\mathbb{T}^n$ se refleja como una conjugación al tomar la imagen por $\mathbf{z}$, por lo que se tiene que

$$\sigma(S) = \overline{\mathbf{z}\left(-\tilde{\sigma}^{\text{usual}}(S)\right)}^{\text{ess}} = \overline{\mathbf{z}\left(\tilde{\sigma}^{\text{usual}}(S)\right)}^{\text{ess}\,*}.$$

También se puede reescribir considerando las restricciones de los adjuntos de los operadores elegidos para representar las traslaciones, esto es

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{z}\left(\tilde{\sigma}^{\text{usual}}(S)\right)}^{\text{ess}} &= \sigma(S)^* = \sigma\left(T_1|_S, T_2|_S,\dots,T_n|_S\right)^*\\ &= \sigma\left(T_1^*|_S, T_2^*|_S,\dots,T_n^*|_S\right).\end{aligned}$$

Como los operadores $T_1,T_2,\dots,T_n$ son unitarios entonces los adjuntos coinciden con los inversos y los subespacios invariantes por $T_1,T_2,\dots,T_n$ son los mismos que los subespacios invariantes por $T_1^*,T_2^*,\dots,T_n^*$.

Parte III

Aplicaciones

Capítulo 11

Existencia de generadores minimales especiales

Supongamos que tenemos un conjunto finito $F = (f_1, \ldots, f_r)^t$ de generadores de un espacio invariante por traslaciones S de $L^2(\mathbb{R}^n)$, y sabemos que la longitud de S es l (que es menor que r). Es interesante encontrar una representación más eficiente del mismo subespacio que corresponda a un conjunto de generadores minimal $G = (g_1, \ldots, g_l)^t$.

Dado que la longitud de S es l, sabemos que existe un conjunto de generadores minimal con l funciones $H = (h_1, \ldots, h_l)^t$. Estos generadores $h_1, \ldots, h_l$ por definición están en S que es la clausura de las combinaciones lineales de las traslaciones de F. Al estar en la clausura, en general no será posible escribirlos usando sólo combinaciones lineales finitas de las traslaciones de las funciones originales.

Bownik y Kaiblinger probaron en [BK06] que existe un sistema de generadores minimal formado sólo por combinaciones lineales de las funciones de F, sin que sea necesario utilizar las traslaciones ni tomar límites. En las aplicaciones es usual encontrar un conjunto de generadores F cuyas funciones tengan algunas propiedades especiales, como por ejemplo ser de soporte compacto, o tener buen decaimiento. Al utilizar sólo combinaciones lineales finitas, este resultado prueba que existe un conjunto de generadores minimal cuyas funciones tienen las mismas propiedades.

Vamos a es extender este resultado a los espacios de Hilbert abstractos para poder aplicarlo a los distintos ejemplos que vimos anteriormente. En particular vamos a analizar su versión para los sistemas de Gabor.

En los sistemas de Gabor, algunas propiedades interesantes son las de soporte compacto, banda limitada, buen decaimiento en tiempo y/o frecuencia. Todas estas propiedades se conservan ante sumas finitas, de manera que si los generadores originales $F = (f_1, \ldots, f_r)^t$ tienen algunas de estas propiedades, los nuevos generadores minimales $G = (g_1, \dots, g_l)^t$ obtenidos por este teorema también las tienen. En cambio, ninguna de estas propiedades se conserva por límites, de manera que si se toman funciones en la clausura, no siempre mantienen estas propiedades.

11.1. Diagonalizando vectores

Primero vamos a encontrar un vector diagonal decreciente a partir de un conjunto finito de generadores. Luego vamos a ver como se refleja el largo de S en los coeficientes de este vector.

Veamos primero el siguiente Lema que utilizaremos a continuación.

Lema 11.1. *Sea M una matriz de tamaño $r \times r$ formada por funciones borelianas y acotadas definidas en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ tales que $M^* = M$, entonces existen matrices U y D formadas por funciones borelianas y acotadas tales que $M = UDU^*$, U es unitaria (o sea $UU^* = \mathrm{Id}_{r\times r}$) y D es diagonal, o sea que*

$$D(\boldsymbol{\omega}) = \operatorname{diag}(\lambda_1(\boldsymbol{\omega}), \dots, \lambda_r(\boldsymbol{\omega})),$$

y además se tiene que $\lambda_1(\boldsymbol{\omega}) \geqslant \dots \geqslant \lambda_r(\boldsymbol{\omega})$.

Para cada punto $\boldsymbol{\omega}$ en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ es posible encontrar matrices $U(\boldsymbol{\omega})$ y $D(\boldsymbol{\omega})$ como las que se piden en el Lema. La parte difícil es probar que se pueden elegir estas matrices de manera que las funciones que quedan como coeficientes de U y D sean medibles. La prueba completa es muy técnica y está en el Lema 2.3.5 de [RS95].

Con este Lema diagonalizaremos los generadores, obteniendo unos generadores más fáciles de manejar en las cuentas posteriores.

Proposición 11.2. *Dado un vector $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_r)^t$ de elementos de $\mathcal{H}$, existe un vector decreciente $\tilde{\Phi} = \left(\tilde{\phi}_1, \dots, \tilde{\phi}_r\right)^t$ del mismo tamaño tal que $S\left(\tilde{\Phi}\right) = S(\Phi)$.*

Demostración. Consideramos la medida

$$\mu = \sum_{i,j=1,\dots,r} \left|\left\{\phi_i, \phi_j\right\}\right|,$$

en donde $|\nu|$ indica la medida positiva correspondiente al valor absoluto de la medida ν. Con esta medida se tiene que $\mu \geqslant \left|\left\{\phi_i, \phi_j\right\}\right|$ para $1 \leqslant i, j \leqslant r$, o sea que para todo conjunto μ-medible se tiene que $\mu(A) \geqslant \left|\left\{\phi_i, \phi_j\right\}\right|(A)$.

Entonces las funciones $\left\{\phi_i, \phi_j\right\}_\mu$ están acotadas en módulo por 1 y por ello la matriz $\{\Phi, \Phi\}_\mu$ está formada por funciones acotadas. Además, como $\{\Phi, \Phi\}^* = \{\Phi, \Phi\}$, tenemos que $\{\Phi, \Phi\}_\mu^* = \{\Phi, \Phi\}_\mu$. Así que por el Lema 11.1, existen matrices U, D tales que $U^* \{\Phi, \Phi\}_\mu U = D$. Tomando $\tilde{\Phi} = U^* \bullet \Phi$ obtenemos

$$\left\{\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\right\}_\mu = \{U^* \bullet \Phi, U^* \bullet \Phi\}_\mu = U^* \{\Phi, \Phi\}_\mu U = D$$

y por lo tanto $\left\{\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\right\}_\mu = D$ que es una matriz diagonal decreciente.

Por otro lado consideramos

$$U \bullet \tilde{\Phi} = U \bullet (U^* \bullet \Phi) = (UU^*) \bullet \Phi = \Phi,$$

así que $\Phi = U \bullet \tilde{\Phi}$.

De esto deducimos que

$$S(\Phi) = S(U^* \bullet \Phi) \subset S(\Phi) = S(U \bullet \Phi) \subset S(\Phi).$$

$\square$

A diferencia de la diagonalización realizada en el Capítulo 10, en este Lema tenemos una matriz unitaria $U(\boldsymbol{\omega})$ que relaciona al vector original con el vector diagonal.

Al utilizar vectores decrecientes aparece en forma explícita el largo del subespacio generado bajo estudio.

Proposición 11.3. *Sea* $\tilde{\Phi} = \left(\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_r\right)$ *un vector decreciente de elementos de* $\mathcal{H}$ *y sea* $l = \operatorname{largo}\left(S\left(\tilde{\Phi}\right)\right)$, *entonces* $\tilde{\phi}_i \neq 0$ *para todo* $1 \leqslant i \leqslant l$ *y* $\tilde{\phi}_i = 0$ *para todo* $l < i \leqslant r$ *.*

Demostración. Primero veamos que las primeras l entradas de $\tilde{\Phi}$ son no nulas. Sea i un entero tal que $\tilde{\phi}_i = 0$ y veamos que $l < i$. Como $\tilde{\phi}_i = 0$ tenemos que $\left\{\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_i\right\} = 0$. Como $\tilde{\Phi}$ es decreciente, entonces para todo k tal que $i \leqslant k \leqslant r$, tenemos que $\left\{\tilde{\phi}_k, \tilde{\phi}_k\right\} = 0$ y en consecuencia $\tilde{\phi}_k = 0$. Con las primeras $i-1$ entradas de $\tilde{\Phi}$, definimos $\tilde{\Phi}_{i-1} = \left(\tilde{\phi}_1, \ldots, \tilde{\phi}_{i-1}\right)^t$. Los otros elementos son nulos, así que $S\left(\tilde{\Phi}_{i-1}\right) = S\left(\tilde{\Phi}\right)$ y por ello

$$l = \operatorname{largo}\left(S\left(\tilde{\Phi}\right)\right) = \operatorname{largo}\left(S\left(\tilde{\Phi}_{i-1}\right)\right) < i.$$

Ahora veamos que los demás coeficientes de $\tilde{\Phi}$ son nulos. Como el largo de $S\left(\tilde{\Phi}\right)$ es l existe un vector $\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_l)^t$ de elementos de $\mathcal{H}$ tal que $S(\Psi) = S\left(\tilde{\Phi}\right)$. Usando la Proposición 11.2 construimos un vector decreciente $\tilde{\Psi} = \left(\tilde{\psi}_1, \ldots, \tilde{\psi}_l\right)^t$ tal que $S\left(\tilde{\Psi}\right) = S(\Psi)$. Tomemos una medida μ sobre el toro n-dimensional suficientemente grande para $\mathcal{H}$. Como $\tilde{\Psi}$ es diagonal, por la Proposición 9.8 existe una matriz de funciones M tal que $\tilde{\Phi} = M \bullet \tilde{\Psi}$. Como $\tilde{\Phi}$ es decreciente, tenemos que $\left\{\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_i\right\} \geqslant \left\{\tilde{\phi}_{i+1}, \tilde{\phi}_{i+1}\right\}$ y por ello $\left\{\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_i\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \geqslant \left\{\tilde{\phi}_{i+1}, \tilde{\phi}_{i+1}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega})$ para casi todo $\boldsymbol{\omega}$ en $\mathbb{T}^n$. Ahora, podemos escribir

$$\left\{\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\right\}_\mu = \left\{M \bullet \tilde{\Psi}, M \bullet \tilde{\Psi}\right\}_\mu = M\left\{\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}\right\}_\mu M^*,$$

y por ello

$$\operatorname{rango}\left(\left\{\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega})\right) \leqslant \operatorname{rango}\left(\left\{\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}\right\}_\mu(\boldsymbol{\omega})\right) \leqslant l \ (\mu\text{-p. p.}).$$

Como $\left\{\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\right\}_\mu$ es diagonal y decreciente tenemos que $\left\{\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_i\right\}_\mu = 0$ (p. p. μ) para todo $l < i \leqslant r$. Entonces $\left\{\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_i\right\} = \mu\left\{\tilde{\phi}_i, \tilde{\phi}_i\right\}_\mu = 0$ y por ello $\tilde{\phi}_i = 0$ para todo $l < i \leqslant r$. □

Otra posible demostración es usando la Sección 10.6, que indica que el largo es el supremo esencial de $\left\{\tilde{\Psi}, \tilde{\Psi}\right\}_\mu$ para cualquier μ suficientemente fuerte. Sin embargo esta demostración es un más directa ya que no involucra las sucesiones μ-quasi-ortonormales.

11.2. Resultado principal

Antes de probar el resultado principal de este Capítulo debemos hacer algunas definiciones adicionales.

Por abuso de notación, llamaremos $\mathrm{Id}_{m\times l}$ a la matriz de tamaño $m \times l$ que tiene 1 en la diagonal principal y 0 en las otras posiciones, o sea que en bloques se escribe como

$$\mathrm{Id}_{m\times l} = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{l\times l} \\ 0_{(m-l)\times l} \end{pmatrix}.$$

La idea principal detrás de la demostración del resultado principal es que si consideramos las matrices cuadradas, las matrices no inversibles son un conjunto de medida cero. Vamos a utilizar una variante que englobaremos en el siguiente lema.

Lema 11.4. *Sea μ una medida positiva en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, y sea U una matriz de tamaño $m \times m$ formada por funciones borelianas, tal que para todo ω en $\mathbb{T}^n$ la matriz $U(\omega)$ es unitaria. Entones los conjuntos*

$$\begin{aligned} E_U^{\mathbb{C}} &= \{A \in M_{l\times m}(\mathbb{C}) / \mu(C_A) \neq 0\} \\ E_U^{\mathbb{R}} &= \{A \in M_{l\times m}(\mathbb{R}) / \mu(C_A) \neq 0\} \end{aligned}$$

tienen medida de Lebesgue cero como subconjuntos de $M_{l\times m}(\mathbb{C})$ y $M_{l\times m}(\mathbb{R})$ respectivamente.

Demostración. La demostración es muy similar para ambos Ítemes En ambos casos, definimos el conjunto

$$C = \{(A, \boldsymbol{\omega}) \in M_{l\times m} \times \mathbb{T}^n / \det(AU(\mathbf{z}) \operatorname{Id}_{m\times l}) = 0\}$$

y sus secciones

$$\begin{aligned} C_{\boldsymbol{\omega}} &= \{A \in M_{l\times m} / \det(AU(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{Id}_{m\times l}) = 0\} \\ C_A &= \{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{T}^n / \det(AU(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{Id}_{m\times l}) = 0\}, \end{aligned}$$

en donde $M_{l\times m}$ indica $M_{l\times m}(\mathbb{C})$ y $M_{l\times m}(\mathbb{R})$ según corresponda.

Ahora consideramos el conjunto $M_{l\times m} \times \mathbb{T}^n$ con la medida producto de la medida de Lebesgue en $M_{l\times m}(\mathbb{C}) \approxeq \mathbb{C}^{l\times m}$ o $M_{l\times m}(\mathbb{R}) \approxeq \mathbb{R}^{l\times m}$ y la medida μ. Por la definición de C, es fácil ver que C es medible, ya que es la preimagen del 0 de una función medible.

Si logramos probar que en ambos casos $C_{\boldsymbol{\omega}}$ tiene medida de Lebesgue cero. De eso se deduce por el teorema de Fubinni que $|C| = 0$ y por ello $\mu(C_A) = 0$ para casi toda matriz A, o sea que $|E_U| = 0$.

Así que sólo nos resta probar que $C_{\boldsymbol{\omega}}^{\mathbb{C}}$ y $C_{\boldsymbol{\omega}}^{\mathbb{R}}$ tienen medida de Lebesgue cero.

Veamos primero que $C_{\boldsymbol{\omega}}^{\mathbb{C}}$ tiene medida de Lebesgue cero. Como $\boldsymbol{\omega}$ está fijo, consideramos la función $\det(AU(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{Id}_{m\times l})$ como una función de los coeficientes de la matriz $A = (a_{i,j})_{i,j}$. Esta función es un polinomio en las $l \times m$ variables $a_{i,j}$. Además no es el polinomio nulo, porque tomando $A = \operatorname{Id}_{l\times m} U^*(\boldsymbol{\omega})$ tenemos que

$$\det((\operatorname{Id}_{l\times m} U^*(\boldsymbol{\omega})) U(\boldsymbol{\omega}) \operatorname{Id}_{m\times l}) = \det(\operatorname{Id}_{m\times l} \operatorname{Id}_{m\times l}) = \det(\operatorname{Id}_{m\times l}) = 1.$$

Así que $C^{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{\omega}}$ es el conjunto de ceros de un polinomio no nulo y por ello tiene medida de Lebesgue cero.

Veamos ahora que $C^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{\omega}}$ tiene medida de Lebesgue cero. Ahora, para cada $\boldsymbol{\omega}$, consideramos las funciones $\operatorname{Re}(\det(AU(\boldsymbol{\omega})\operatorname{Id}_{m\times l}))$ y $\operatorname{Im}(\det(AU(\boldsymbol{\omega})\operatorname{Id}_{m\times l}))$ como funciones de los coeficientes reales de la matriz $A = (a_{i,j})_{i,j}$. Estas funciones son polinomios reales en las $l \times n$ variables a_{ij}. Como $U(\boldsymbol{\omega})$ es unitaria entonces $U(\boldsymbol{\omega})\operatorname{Id}_{m\times l}$ tiene rango l y por ello existen l filas $k_1, \ldots, k_l$ linealmente independientes. Consideramos entonces la matriz $I_{\mathbf{k}}$ de tamaño $l \times m$, definida por

$$(I_{\mathbf{k}})_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k_i = j \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}.$$

Entonces $I_{\mathbf{k}}U(\boldsymbol{\omega})\operatorname{Id}_{m\times l}$ está formada por l filas linealmente independientes y por ello

$$\operatorname{Re}(\det(I_{\mathbf{k}}U(\boldsymbol{\omega})\operatorname{Id}_{m\times l})) + \operatorname{Im}(\det(I_{\mathbf{k}}U(\boldsymbol{\omega})\operatorname{Id}_{m\times l})) = \det(I_{\mathbf{k}}U(\boldsymbol{\omega})\operatorname{Id}_{m\times l}) \neq 0.$$

Así que al menos uno de los dos polinomios es no nulo. En este caso, $C^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{\omega}}$ es la intersección de los ceros de los dos polinomios. Como al menos uno de ellos es no nulo $C^{\mathbb{R}}_{\boldsymbol{\omega}}$ tiene medida de Lebesgue cero. □

En el resultado principal, tenemos un vector con los generadores originales y un vector con los nuevos generadores que son combinaciones lineales de los anteriores. Vamos a usar una matriz A para representar esta combinación lineal.

Sean $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)^t$ un vector de elementos de $\mathcal{H}$, y llamemos $l = \operatorname{largo}(\Phi)$. Podemos ver a las matrices en $M_{l\times m}(\mathbb{C})$ como las matrices de funciones constantes en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$. Así que si $A = (a_{i,j})_{i,j}$ es una matriz de tamaño $l \times m$, el vector $\Psi_A = A \bullet \Phi$ es en realidad una combinación lineal finita (sin usar las traslaciones) de los elementos del vector Φ, en otras palabras

$$(\Psi_A)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\phi_j.$$

Vamos a considerar el conjunto de las matrices A tales que $S(\Psi_A)$ y $S(\Phi)$ son diferentes y vamos a demostrar que este conjunto tiene medida cero.

Teorema 11.5. *Sea $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)^t$ un vector de elementos de $\mathcal{H}$, y consideremos el conjunto F_Φ de las matrices A de tamaño $m \times l$ tales que $S(\Psi_A)$ y $S(\Phi)$ son diferentes, o sea*

$$F_\Phi = \{A \in M_{l\times m} / S(A \bullet \Phi) \neq S(\Phi)\}.$$

Entonces la medida de F_Φ es cero.

Este resultado vale si tanto si se consideran a las matrices complejas de $M_{m\times l}(\mathbb{C})$ *como a las matrices reales de* $M_{m\times l}(\mathbb{R})$.

Demostración. Sea $\tilde{\Phi}$ un vector decreciente tal que $S\left(\tilde{\Phi}\right) = S(\Phi)$ como el calculado en la Proposición 11.2, y sea U la matriz unitaria de funciones calculada en esa proposición tal que $\Phi = U \bullet \tilde{\Phi}$. Denotemos con l el largo de $S(\Phi)$ que es igual al largo de $S\left(\tilde{\Phi}\right)$. Por la Proposición 11.3 sabemos que solamente las primeras l coordenadas de $\tilde{\Phi}$ son no nulas, así que podemos escribir $\tilde{\Phi} = \left(\tilde{\Phi}_l, 0_{m-l}\right)^t$ y además $\mathrm{Id}_{m\times l} \bullet \tilde{\Phi}_l = \tilde{\Phi}$. Definimos entonces

$$\Psi_A = A \bullet \Phi = A \bullet \left(U \bullet \tilde{\Phi}\right) = A \bullet \left(U \bullet \left(\mathrm{Id}_{m\times l} \bullet \tilde{\Phi}\right)\right) = (AU\,\mathrm{Id}_{m\times l}) \bullet \tilde{\Phi}.$$

En estas operaciones, las tres matrices que aparecen son acotadas, así que los productos se pueden agrupar en forma indistinta.

Tomamos una medida $\mu > \left\{\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}\right\}$. El conjunto F_Φ está incluido en el conjunto E_U, ya que si A no pertenece al conjunto E_U entonces C_A tiene medida μ cero, o sea que $\det(AU\,\mathrm{Id}_{m\times l})$ es nulo solamente en un conjunto de medida μ cero. Así que por la Proposición 9.11 tenemos que

$$S(\Psi_A) = S\left((AU\,\mathrm{Id}_{m\times l}) \bullet \tilde{\Phi}\right) = S\left(\tilde{\Phi}\right) = S(\Phi).$$

Y como por el Lema 11.4 el conjunto E_U tiene medida cero, entonces F_Φ también tiene medida cero. $\square$

A partir de este resultado se deduce como caso particular el teorema probado por Bownik y Kaiblinger en [BK06]. En este caso, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, $n = d$ y los operadores $T_1, \ldots, T_n$ en $\mathbf{T}$ son las traslaciones enteras correspondientes a cada elemento de la base canónica. Además $S(\Phi) = S_{\mathrm{EIT}}(\Phi)$ el espacio invariante por traslaciones (cerrado) generado por $\phi_1, \ldots, \phi_m$.

Teorema 11.6 (Bownik y Kaiblinger [BK06])**.** *Sea* $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)^t$ *un vector de funciones en* $L^2(\mathbb{R}^n)$*, y consideremos el conjunto* F_Φ *de las matrices* A *de tamaño* $m \times l$ *tales que los espacios invariantes por traslaciones* $S_{\mathrm{EIT}}(\Psi_A)$ *y* $S_{\mathrm{EIT}}(\Phi)$ *son diferentes, o sea*

$$F_\Phi = \{A \in M_{l\times m} / S_{\mathrm{EIT}}(A \bullet \Phi) \neq S_{\mathrm{EIT}}(\Phi)\}.$$

Entonces la medida de F_Φ *es cero.*

En ese mismo trabajo, se da un ejemplo en el que F_Φ es un conjunto denso de medida cero. De manera que aunque casi toda elección de una matriz A sea válida, encontrar una puede ser un proceso sutil.

También se aplica de manera inmediata el resultado que acabamos de demostrar a los otros ejemplos de sistemas abstractos que vimos en los capítulos anteriores.

Queremos mencionar especialmente el caso de los sistemas de Gabor que describimos en la Sección 6.1. En este caso, el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es nuevamente $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, $n = 2d$ y los operadores $T_1, \ldots, T_n$ en $\mathbf{T}$ son las traslaciones enteras correspondientes a cada elemento de la base canónica y las modulaciones enteras correspondientes a múltiplos enteros de los elementos de la base canónica. Además $S(\Phi) = S_{\text{Gabor}}(\Phi)$ el espacio invariante por traslaciones y modulaciones (cerrado) generado por $\phi_1, \ldots, \phi_m$.

Teorema 11.7. *Sea $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)^t$ un vector de funciones en $L^2(\mathbb{R}^n)$, y consideremos el conjunto F_Φ de las matrices A de tamaño $m \times l$ tales que los espacios invariantes por traslaciones $S_{\text{EIT}}(\Psi_A)$ y $S_{\text{EIT}}(\Phi)$ son diferentes, o sea*

$$F_\Phi = \{A \in M_{l\times m} / S_{\text{EIT}}(A \bullet \Phi) \neq S_{\text{EIT}}(\Phi)\}.$$

Entonces la medida de F_Φ es cero.

Además en los sistemas de Gabor hay una aplicación interesante de la versión real del Teorema 11.5. Si se tiene un conjunto finito de generadores reales, entonces existe otro conjunto finito de generadores reales con la mínima cantidad de elementos posible.

Corolario 11.8. *Sea $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)^t$ un vector de funciones reales en $L^2(\mathbb{R}^n)$, y consideremos el conjunto F_Φ de las matrices reales A de tamaño $m \times l$ tales que los espacios invariantes por traslaciones $S_{\text{EIT}}(\Psi_A)$ y $S_{\text{EIT}}(\Phi)$ son diferentes, o sea*

$$F_\Phi = \{A \in M_{l\times m} / S_{\text{EIT}}(A \bullet \Phi) \neq S_{\text{EIT}}(\Phi)\}.$$

Entonces la medida de F_Φ es cero.

Por la definición del largo, la construcción de los generadores minimales en general involucra límites de las combinaciones lineales complejas de las traslaciones y modulaciones de los generadores originales, así que en general es esperable que estos nuevos generadores sean funciones complejas. En cambio, en este resultado consideramos solo las combinaciones lineales reales de los generadores originales, sin utilizar las modulaciones (ni las traslaciones). Por ello el nuevo conjunto de generadores obtenido también será de funciones reales. En las aplicaciones en general se prefiere trabajar con funciones reales, para poder realizar las cuentas en forma más eficiente.

Capítulo 12

Caracterización de conjuntos generadores

Supongamos que se tiene un espacio invariante por traslaciones S desconocido, del que sólo se sabe el largo l y que tiene una base de Riesz formada por las traslaciones de un conjunto con l funciones también desconocido. Dado un conjunto finito de funciones F que pertenecen a S, interesa saber si a partir de F es posible determinar en forma única al espacio invariante por traslaciones S. En ese caso decimos que F es un conjunto determinante de S. Una caracterización de los conjuntos F con esta propiedad fue encontrada por Aldroubi, Cabrelli, Hardin, Molter y Rodado en [ACHMR04].

Esto puede ser visto como un problema de muestreo, en el sentido que dado un conjunto de datos observados $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)^t$, que se sabe que pertenecen a cierto espacio fijo S, se trata de ver si es posible determinar el espacio S a partir de las observaciones, o es necesario continuar midiendo.

El objetivo de este Capitulo es extender este resultado, eliminando la hipótesis de que el subespacio S tenga una base de Riesz de traslaciones. Sin embargo, al eliminar esta hipótesis veremos que la información suministrada por el largo de S no es suficiente, y la reemplazaremos por alguna otra propiedad con características similares.

Extenderemos el resultado inicial a espacios invariantes por traslaciones en los que se conozca la función dimensión. Las hipótesis originales son equivalentes a saber que la función dimensión es constante e igual al largo l.

También veremos que es posible reemplazar el dato del largo l por la dimensión media, que es el promedio de la función dimensión. La ventaja es que la dimensión media es sólo un número (y no una función), al igual que el largo l que aparecía en las hipótesis originales. De manera que es más fácil de manejar y calcular.

Demostramos también las versiones abstractas de estos resultados y de manera inmediata lo podremos aplicar a otros esquemas como los sistemas de Gabor.

12.1. Extensión al esquema abstracto

Dado un número entero $k \geqslant 1$, tomamos Λ_k al conjunto de los multíndices $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ tales que $1 \leqslant \lambda_1 < \ldots < \lambda_k$, y llamamos $|\boldsymbol{\lambda}| = k$ el largo de $\boldsymbol{\lambda}$. A cada conjunto Λ_k le asignamos un orden arbitrario, que para fijar ideas podemos suponer que si $|\lambda| = |\delta| = k$ y $\lambda_k < \delta_k$ entonces $\lambda < \delta$ y en caso de $\lambda_k = \delta_k$ se consideran las otras coordenadas en forma descendente.. Además, llamamos Λ a la unión de los conjuntos Λ_k.

Dado una sucesión $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots)^t$ (quizás finita) de elementos de $\mathcal{H}$, para cada multíndices $\boldsymbol{\lambda}$ en Λ definimos $\Phi_{\boldsymbol{\lambda}} = \left(\phi_{\lambda_1}, \phi_{\lambda_2}, \ldots, \phi_{\lambda_k}\right)^t$ y el conjunto $A_{\boldsymbol{\lambda}}$ en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$

$$A_{\boldsymbol{\lambda}} = \left\{\boldsymbol{\omega} / \det\left(\left\{\Phi_{\boldsymbol{\lambda}}, \Phi_{\boldsymbol{\lambda}}\right\}_{\mu}(\boldsymbol{\omega})\right) \neq 0\right\}$$

Si Φ es finito y $|\lambda|$ es mayor que la cantidad de elementos en Φ entonces definimos A_λ como el conjunto vacío.

Con esta notación, vamos a copiar el resultado principal de [ACHMR04] para espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 12.1. *Sea S un espacio invariante por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$ del que sólo se sabe que tiene una base de Riesz formada por las traslaciones de l funciones. Sea $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)^t$ un vector de funciones de S. Entonces $S(\Phi) = S$ si y sólo si*

$$\bigcup_{|\lambda|=l} A_\lambda = \mathbb{T}^n \text{ (salvo un conjunto de medida cero)}$$

Como vimos en el Teorema 9.1, la condición de que S tenga una base de Riesz de traslaciones es equivalente a que S tenga una base ortonormal de traslaciones, que a su vez es equivalente a que tenga función dimensión constante.

Vamos a demostrar la generalización del Teorema anterior a espacios abstractos, o sea:

Teorema 12.2. *Sea μ una medida suficientemente fuerte y sea S un espacio $\mathbf{T}$-invariante de $\mathcal{H}$, del que solo se sabe que tiene función dimensión constante igual a l. Sea $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)$ un vector de elementos de S. Entonces $S(\Phi) = S$ si y sólo si*

$$\bigcup_{|\lambda|=l} A_\lambda = \mathbb{T}^n \text{ (salvo un conjunto de medida } \mu \text{ cero)}$$

Demostración. Analicemos cada implicación por separado.

- Veamos qué pasa si $\bigcup_{|\lambda|=l} A_\lambda = \mathbb{T}^n$.

  Consideremos el subespacio $T = S(\Phi)$. Dado cualquier $\boldsymbol{\omega}$ en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, está en algunos de los conjuntos A_{λ_ω} (salvo un conjunto de medida μ cero), por ello

  $$\dim_{\mathbf{T}}(S)_\mu(\boldsymbol{\omega}) = \text{rango}\Big(\{\Phi,\Phi\}_\mu(\boldsymbol{\omega})\Big) \geqslant \text{rango}\Big(\{\Phi_{\lambda_\omega},\Phi_{\lambda_\omega}\}_\mu(\boldsymbol{\omega})\Big) = l$$

  porque $\{\Phi_{\lambda_\omega},\Phi_{\lambda_\omega}\}_\mu(\boldsymbol{\omega})$ es inversible si $\boldsymbol{\omega}$ está en A_{λ_ω}.

  Como $S \subset T$ entonces por la Proposición 10.16 tenemos que

  $$l = \dim_{\mathbf{T}}(S)_\mu(\boldsymbol{\omega}) \leqslant \dim_{\mathbf{T}}(T)_\mu(\boldsymbol{\omega}) \leqslant l$$

  así que

  $$\dim_{\mathbf{T}}(S)_\mu = \dim_{\mathbf{T}}(T)_\mu = l$$

  y como las dos dimensiones son iguales, por la Proposición 10.16 tenemos que $S = T$.

- Veamos ahora qué pasa si $S(\Phi) = S$. El subespacio S tiene función dimensión constante igual a l entonces podemos tomar un conjunto de generadores cualquiera $\Theta = (\theta_1,\ldots,\theta_r,\ldots)^t$ (quizás finito) tal que

  $$\dim_{\mathbf{T}}(S)_\mu(\boldsymbol{\omega}) = \text{rango}\Big(\{\Theta,\Theta\}_\mu(\boldsymbol{\omega})\Big) = l$$

  (salvo un conjunto de medida μ cero).

  Usando el Teorema 10.14 podemos construir una sucesión μ-quasi-ortonormal $\Psi_\infty = (\psi_1,\ldots,\psi_r,\ldots)^t$. Como para casi todo μ el rango es l entonces podemos considerar el vector $\Psi = (\psi_1,\ldots,\psi_l)^t$ formado por los primeros l elementos de Ψ_∞ y tenemos que

  $$\{\Psi,\Psi\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) = \text{Id} \;\; (\text{p. p. } \mu).$$

  Consideremos ahora la sucesión Φ que aparece en el enunciado. Como $S(\Phi) = S$ entonces tenemos que

  $$\text{rango}\Big(\{\Phi,\Phi\}_\mu(\boldsymbol{\omega})\Big) = \dim_{\mathbf{T}}(S)_\mu(\boldsymbol{\omega}) = l,$$

  así que para cada $\boldsymbol{\omega}$ existe algún número $r_{\boldsymbol{\omega}}$ tal que tomando el vector Φ_{r_ω}, formado por los primeros $r_{\boldsymbol{\omega}}$ coeficientes de Φ, tenemos que

  $$\text{rango}\Big(\{\Phi_{r_{\boldsymbol{\omega}}},\Phi_{r_\omega}\}_\mu(\boldsymbol{\omega})\Big) = l.$$

Como Ψ es μ-quasi-ortonormal entonces por el Corolario 10.11 tenemos que

$$\Phi_{r_\omega} = \{\Phi_{r_\omega}, \Psi\}_\mu \bullet \Psi$$

y por ello

$$\{\Phi_{r_\omega}, \Phi_{r_\omega}\}_\mu = \left\{\{\Phi_{r_\omega}, \Psi\}_\mu \bullet \Psi, \Phi_{r_\omega}\right\}_\mu = \{\Phi_{r_\omega}, \Psi\}_\mu \{\Psi, \Phi_{r_\omega}\}_\mu .$$

Así que

$$\begin{aligned} l = \operatorname{rango}\left(\{\Phi_{r_\omega}, \Phi_{r_\omega}\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) &= \operatorname{rango}\left(\{\Phi_{r_\omega}, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega}) \{\Psi, \Phi_{r_\omega}\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) \\ \leqslant \operatorname{rango}\left(\{\Phi_{r_\omega}, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) &\leqslant \operatorname{columnas}\left(\{\Phi_{r_\omega}, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) = l, \end{aligned}$$

por lo que todos son iguales y en particular

$$\operatorname{rango}\left(\{\Phi_{r_\omega}, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) = l.$$

Fijando cualquier $\boldsymbol{\omega}$ en el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, esta matriz tiene l columnas y se tienen que poder elegir l filas $1 \leqslant \lambda_1 < \cdots < \lambda_l$ que son linealmente independientes. Con esta elección de filas formamos el multíndices $\lambda_{\boldsymbol{\omega}}$ y entonces tenemos que $\{\Phi_{\lambda_\omega}, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})$ es una matriz inversible.

Por ello

$$\begin{aligned} \det\left(\{\Phi_{\lambda_\omega}, \Phi_{\lambda_\omega}\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) &= \det\left(\{\Phi_{\lambda_\omega}, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega}) \{\Psi, \Phi_{\lambda_\omega}\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right) \\ &= \det\left(\{\Phi_{\lambda_\omega}, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega}) \{\Phi_{\lambda_\omega}, \Psi\}_\mu^* (\boldsymbol{\omega})\right) \\ &= \left|\det\left(\{\Phi_{\lambda_\omega}, \Psi\}_\mu (\boldsymbol{\omega})\right)\right|^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Así casi todos los $\boldsymbol{\omega}$ están en algún A_λ.

□

Si se puede tomar como μ a la medida de Lebesgue (normalizada) el enunciado es más directo y queda idéntico al original, ya que vuelve a ser equivalente la existencia de bases de Riesz de traslaciones con que la función dimensión sea constante. Por ejemplo en los sistemas de Gabor tenemos que:

Teorema 12.3. *Sea S un espacio invariante por traslaciones y modulaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$, del que solo se sabe que tiene una base de Riesz formada por las traslaciones y modulaciones de l elementos. Sea $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_r)$ un vector de funciones de S. Entonces $S_G(\Phi) = S$ si y sólo si*

$$\bigcup_{|\lambda|=l} A_\lambda = \mathbb{T}^n \text{ (salvo un conjunto de medida cero).}$$

12.2. Función dimensión

En estos resultados se combinan dos elementos, por un lado la construcción de la función dimensión a partir de los conjuntos A_λ y por el otro las propiedades que relacionan los valores de la dimensión con la inclusiones de los subespacios. Vamos ahora a analizar un poco más las construcción de la función dimensión por este método, ya que la otra parte ya apareció en la Proposición 10.16 como una generalización de los teoremas de Robertson.

En la definición de función dimensión que dimos en la Definición 10.17, consideramos el rango de la matriz (infinita) $\{\Phi, \Phi\}$ en donde se deben elegir una submatriz cualquiera que tenga determinante no nulo. Ahora, veremos que se puede hacer una búsqueda más restringida. Este rango es equivalente a buscar submatrices principales inversibles, en las que se eligen las mismas filas y columnas. Estas matrices son justamente $\{\Phi_\lambda, \Phi_\lambda\}$, los productos asociados a una elección de elementos λ.

Vimos que para todo elemento ϕ se tiene que $\{\phi, \phi\}_\mu \geqslant 0$. Algo similar pasa con los vectores, como se ve en el siguiente Lema.

Lema 12.4. *Sea $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)^t$ un vector de elementos de $\mathcal{H}$, entonces $\{\Phi, \Phi\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \geqslant 0$ para casi todo $\boldsymbol{\omega}$ en $\mathbb{T}^n$, salvo un conjunto de medida μ cero.*

Demostración. Por el Teorema 10.14 existe un vector Ψ μ-quasi-ortonormal tal que $S(\Phi) = S(\Psi)$ y por el Corolario 10.11 tenemos que $\Phi = \{\Phi, \Psi\}_\mu \bullet \Psi$, entonces

$$\{\Phi, \Phi\}_\mu = \Big\{\{\Phi, \Psi\}_\mu \bullet \Psi, \Phi\Big\}_\mu = \{\Phi, \Psi\}_\mu \{\Psi, \Phi\}_\mu = \{\Phi, \Psi\}_\mu \{\Phi, \Psi, \}_\mu^*$$

así que para casi todo $\boldsymbol{\omega}$ la matriz $\{\Phi, \Phi\}_\mu(\boldsymbol{\omega})$ es producto de una matriz y su adjunta y por ello es semidefinida positiva. □

A partir de los conjuntos A_λ definidos anteriormente, definiremos los conjuntos

$$B_l = \bigcup_{|\lambda|=l} A_\lambda \subset \mathbb{T}^n$$

y además tomamos

$$B_0 = \mathbb{T}^n.$$

Queremos ver que los conjuntos B_l están encajados, o sea que $B_{l+1} \subset B_l$ para todo $l = 1, \ldots, r, \ldots$. Fijemos un número entero $l > 1$ y un λ de largo l, y tomemos el vector con λ^0 que tiene largo $l-1$ y es igual que λ, pero sin el último elemento.

Por el Lema 12.4 tenemos que $\{\Phi_\lambda, \Phi_\lambda\}_\mu(\boldsymbol{\omega}) \geqslant 0$ (salvo en un conjunto de medida μ cero). Si $\boldsymbol{\omega}$ está en A_λ entonces la matriz $\{\Phi_\lambda, \Phi_\lambda\}_\mu(\boldsymbol{\omega})$ es inversible y entonces tiene que ser definida positiva. Los menores principales de una matriz definida positiva son definidos positivos ([HK92]), por ello en particular $\{\Phi_{\lambda^0}, \Phi_{\lambda^0}\}_\mu(\boldsymbol{\omega})$ es definida positiva y por ello es inversible. Así que $\boldsymbol{\omega}$ está en A_{λ^0}

De manera que $A_\lambda \subset A_{\lambda^0}$, entonces al tomar las uniones para formar los conjuntos B_l y B_{l-1}, la inclusión se extiende directamente y se deduce que $B_l \subset B_{l-1}$. Por otro lado, cuando $l = 1$ se tiene que $B_1 \subset B_0 = \mathbb{T}^n$ de manera trivial.

Ahora disjuntamos los nuevos conjuntos tomando

$$C_l = B_l \backslash B_{l+1}$$

y además

$$C_\infty = \bigcap_k B_k.$$

Como los conjuntos B_l están encajados y el primero B_0 es todo el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, entonces los conjuntos C_l (incluido C_∞) cubren todo el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ también.

En el caso en los conjuntos A_λ estén definidos a partir de un vector finito $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)^t$ de r elementos, los conjuntos A_λ con $|\lambda| > r$ son todos vacíos y por lo tanto los conjuntos B_l y C_l con $l > r$ son todos vacíos y también C_∞ es vacío.

Veamos la relación entre estos conjuntos y la función dimensión.

Proposición 12.5. *Sea μ una medida suficientemente fuerte y sea $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r, \ldots)^t$ una sucesión (quizás finita) de elementos de $\mathcal{H}$, entonces $\boldsymbol{\omega} \in C_l$ si y sólo si $\dim_{\mathbf{T}} (S(\Phi))_\mu (\boldsymbol{\omega}) = l$, para $l = 0, 1, \ldots, \infty$.*

Demostración. Como los conjuntos C_l son disjuntos y cubren el toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$, podemos definir la función d, tal que $d(\boldsymbol{\omega}) = l$ cuando $\boldsymbol{\omega} \in C_l$ con $l = 0, 1, \ldots, \infty$. Veremos que $\dim_{\mathbf{T}} (S(\Phi))_\mu (\boldsymbol{\omega}) = d(\boldsymbol{\omega})$.

- Veamos primero que $\dim_{\mathbf{T}} (S(\Phi))_\mu (\boldsymbol{\omega}) \geqslant d(\boldsymbol{\omega})$

  Si $\boldsymbol{\omega}$ está en C_l con $0 < l < \infty$, se tiene un λ de largo l tal que la matriz $\{\Phi_\lambda, \Phi_\lambda\}(\boldsymbol{\omega})$ es inversible, así que esa matriz tiene rango l. Como esa es una submatriz de $\{\Phi, \Phi\}(\boldsymbol{\omega})$ entonces $\{\Phi, \Phi\}(\boldsymbol{\omega})$ tiene al menos rango l así que $\dim_{\mathbf{T}} (S(\Phi))_\mu (\boldsymbol{\omega}) \geqslant l$.

  Cuando $\boldsymbol{\omega}$ está en C_∞ entonces para cada l con $0 < l < \infty$, se tiene que $\dim_{\mathbf{T}} (S(\Phi))_\mu (\boldsymbol{\omega}) \geqslant l$ y por ello $\dim_{\mathbf{T}} (S(\Phi))_\mu (\boldsymbol{\omega}) = \infty$.

  Cuando $\boldsymbol{\omega}$ está en C_0, por la definición tenemos que $\dim_{\mathbf{T}} (S(\Phi))_\mu (\boldsymbol{\omega}) \geqslant 0$.

- Ahora veamos que $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\left(\Phi\right)\right)_{\mu}\left(\boldsymbol{\omega}\right) \leqslant d\left(\boldsymbol{\omega}\right)$

  Si $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\left(\Phi\right)\right)_{\mu}\left(\boldsymbol{\omega}\right) = l$ con $0 < l < \infty$, entonces rango $\left(\left\{\Phi, \Phi\right\}\left(\boldsymbol{\omega}\right)\right) = l$ y usando un argumento similar al del Teorema 12.2 existe un λ de largo l en el que la matriz $\left\{\Phi_{\lambda}, \Phi_{\lambda}\right\}\left(\boldsymbol{\omega}\right)$ es inversible. Así que $\boldsymbol{\omega}$ está en A_{λ} y por ello en B_l. Así que está en algún C_k con $k \geqslant l$ (quizás $k = \infty$) y entonces $d\left(\boldsymbol{\omega}\right) \geqslant l$.

  Análogamente, si $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\left(\Phi\right)\right)_{\mu}\left(\boldsymbol{\omega}\right) = \infty$, podemos fijar número l arbitrario y considerar las submatrices $\left\{\Phi_k, \Phi_k\right\}\left(\boldsymbol{\omega}\right)$ con $k = 1, 2, \ldots$. En esta sucesión de matrices los rangos van creciendo a lo sumo en uno y no son acotados. Entonces existe algún $k_{\boldsymbol{\omega}}$ tal que rango $\left(\left\{\Phi_{k_{\boldsymbol{\omega}}}, \Phi_{k_{\boldsymbol{\omega}}}\right\}\left(\boldsymbol{\omega}\right)\right) = l$, y a partir de eso se deduce que $d\left(\boldsymbol{\omega}\right) \geqslant l$. Esta construcción se puede realizar para todo l, así que $d\left(\boldsymbol{\omega}\right) = \infty$.

  Si $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\left(\Phi\right)\right)_{\mu}\left(\boldsymbol{\omega}\right) = 0$, entonces por definición $d\left(\boldsymbol{\omega}\right) \geqslant 0$.

$\square$

Ahora daremos una versión de la extensión del resultado de [ACHMR04], que usa estos conjuntos y la función dimensión.

Teorema 12.6. *Sea μ una medida suficientemente fuerte y sea S un subespacio $\mathbf{T}$-invariante de $\mathcal{H}$ fijo pero desconocido del que sólo se conoce la función dimensión $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)_{\mu}$ que es acotada en casi todo punto μ. Entonces dada la sucesión $\Phi = \left(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r\right)^t$ (quizás finita) de elementos de $\mathcal{H}$ se tiene que $S = S\left(\Phi\right)$ si y sólo para cada casi todo punto $\boldsymbol{\omega}$ (respecto de μ) del toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ en el que $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)\left(\boldsymbol{\omega}\right) = l$ con $0 < l < \infty$ se tiene que $\boldsymbol{\omega}$ está en algún conjunto A_{λ} con $|\lambda| = l$.*

Demostración. Por un lado tenemos que si $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)\left(\boldsymbol{\omega}\right) = l$ con $0 < l < \infty$ entonces usando la Proposición 12.5 sabemos que $\boldsymbol{\omega}$ está en A_{λ} con $|\lambda| = l$ y por ello $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\left(\Phi\right)\right)\left(\boldsymbol{\omega}\right) \geqslant l = \dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)\left(\boldsymbol{\omega}\right)$. Esta desigualdad se extiende a los puntos $\boldsymbol{\omega}$ en que $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)\left(\boldsymbol{\omega}\right) = 0$ porque $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\left(\Phi\right)\right)\left(\boldsymbol{\omega}\right) \geqslant 0$. Entonces $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\left(\Phi\right)\right)\left(\boldsymbol{\omega}\right) \geqslant \dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)\left(\boldsymbol{\omega}\right)$ vale en todo el conjunto en que $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)$ es finita, salvo por un conjunto de medida μ cero. Además por hipótesis el conjunto donde $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)$ es infinita también tiene medida μ cero. Por ello tenemos que $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\left(\Phi\right)\right) \geqslant \dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)$ salvo en un conjunto de medida μ cero.

Por otro lado, como $S\left(\Phi\right) \subset S$ entonces por la Proposición 10.16 tenemos que $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\left(\Phi\right)\right) \leqslant \dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)$ y por ello ambas funciones son iguales salvo en un conjunto de medida μ cero.

Como $\dim_{\mathbf{T}}\left(S\right)$ que es acotada en casi todo punto (respecto de μ) entonces por la Proposición 10.16 tenemos que $S\left(\Phi\right) = S$.

Para ver el resultado inverso, si $S(\Phi) = S$ entonces $\dim_{\mathbf{T}}(S(\Phi))(\boldsymbol{\omega}) = \dim_{\mathbf{T}}(S)(\boldsymbol{\omega})$ salvo para un conjunto de medida 0. Por lo visto en la Proposición 12.5 se deduce que en si $\dim_{\mathbf{T}}(S)(\boldsymbol{\omega}) = l$ con $0 < l < \infty$ se tiene que $\boldsymbol{\omega}$ está en algún conjunto A_λ con $|\lambda| = l$. $\square$

Este resultado no sigue valiendo si el conjunto en donde $\dim_{\mathbf{T}}(S)$ es infinito tiene medida μ mayor que 0. Para ello se puede ver el ejemplo de la Sección 3.4. Además, por el Corolario 10.32, cambiando la medida μ por otra suficientemente fuerte ν, no se puede hacer que el conjunto donde $\dim_{\mathbf{T}}(S)$ es infinito pase de tener medida μ distinta de cero a medida ν cero o viceversa. O sea, este problema no se puede arreglar cambiando la medida por otra.

Nuevamente, cuando tomamos un $\mathcal{H}$ en el que la medida μ pueda ser la de Lebesgue (normalizada), como los espacios invariantes por traslaciones y los sistemas de Gabor, la escritura es más sencilla. Por ejemplo:

Corolario 12.7. *Sea S un subespacio invariante por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$, fijo pero desconocido del que sólo se conoce la función dimensión $\dim_{\mathbf{T}}(S)$ que es finita en casi todo punto. Entonces dada la sucesión $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)^t$ (quizás finita) de elementos de $\mathcal{H}$ se tiene que $S = S(\Phi)$ si y sólo para cada casi todo punto $\boldsymbol{\omega}$ del toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ en el que $\dim_{\mathbf{T}}(S)(\boldsymbol{\omega}) = l$ con $0 < l < \infty$ se tiene que $\boldsymbol{\omega}$ está en algún conjunto A_λ con $|\lambda| = l$.*

Corolario 12.8. *Sea S un subespacio invariante por traslaciones y modulaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$, fijo pero desconocido del que sólo se conoce la función dimensión $\dim_{\mathbf{T}}(S)$ que es acotada en casi todo punto. Entonces dada la sucesión $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)^t$ (quizás finita) de elementos de $\mathcal{H}$ se tiene que $S = S(\Phi)$ si y sólo para cada casi todo punto $\boldsymbol{\omega}$ del toro n-dimensional $\mathbb{T}^n$ en el que $\dim_{\mathbf{T}}(S)(\boldsymbol{\omega}) = l$ con $0 < l < \infty$ se tiene que $\boldsymbol{\omega}$ está en algún conjunto A_λ con $|\lambda| = l$.*

El primero de estos Corolarios extiende el resultado de [ACHMR04]. Si se agrega la hipótesis de que el subespacio tiene una base de Riesz de traslaciones entonces se reconstruye el resultado original. El segundo Corolario es la versión respectiva cuando se consideran sistemas de Gabor.

12.3. Dimensión media

Algo interesante del resultado original de [ACHMR04] es que el espacio invariante S se caracteriza por un número que corresponde a la cantidad de funciones que generan la base de Riesz. En la extensión estamos utilizando la función dimensión que es un objeto mucho más complicado. Por ello buscamos una característica de los subespacios que sirva para obtener una extensión del resultado original, pero que sea simplemente un número.

Elegimos la dimensión media, que corresponde al promedio de la función dimensión.

Definición 12.9. Sea μ una medida suficientemente fuerte y sea S un subespacio $\mathbf{T}$-invariante de $\mathcal{H}$. Definimos la dimensión media de S respecto de μ como

$$\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}} (S)_\mu = \frac{1}{\|\mu\|} \int_{\mathbb{T}^n} \dim_{\mathbf{T}} (S)_\mu (\boldsymbol{\omega})\, d\mu (\boldsymbol{\omega})$$

En el caso en que la función dimensión sea infinita en un conjunto de medida μ distinta de cero, entonces la dimensión media será infinita, y también puede ser infinita si la integral da infinita.

Además si $\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}} (S)_\mu = 0$ entonces como $\dim_{\mathbf{T}} (S)_\mu$ es no negativa queda que $\dim_{\mathbf{T}} (S)_\mu = 0$ y por ello es el subespacio trivial $\{0\}$.

Como siempre en el caso en que la medida μ este clara del contexto no la escribiremos.

Esta dimensión en general no es un número entero. Por ejemplo si tenemos el subespacio de banda limitada $[-\Omega, \Omega]$ con $\Omega \leqslant \frac{1}{2}$ entonces como vimos en la Sección 3.2 la función dimensión es $\chi_{[-\Omega,\Omega]}$ y por ello

$$\dim \operatorname{med}_E \left(L^2 \left(\widehat{[-\Omega, \Omega]} \right) \right) = \int_{\mathbb{T}} \chi_{[-\Omega,\Omega]} (\omega) \,\mathrm{d}\, \omega = 2\Omega.$$

En particular para $\Omega = \frac{1}{4}$ nos queda que

$$\dim \operatorname{med}_E \left(L^2 \left(\widehat{\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]} \right) \right) = \frac{1}{2}.$$

En los casos es que el subespacio tiene una base ortonormal o de Riesz de traslaciones (y usamos la medida de Lebesgue normalizada), entonces la función dimensión es constante e igual al número de funciones utilizadas para generar la base. Por ello la dimensión media también toma ese valor.

Un problema es que esta dimensión media cambia al cambiar la medida, de manera no trivial. Aunque en estos ejemplos lo más razonable es considerar la medida de Lebesgue normalizada, podemos utilizar otras medidas. Por ejemplo, veamos qué pasa al tomar ν la medida asociada a la función integrable $\frac{1}{2}\chi_{\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]} + \frac{3}{2}\chi_{\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]} + \frac{1}{2}\chi_{\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]}$. Esta medida es equivalente la medida de Lebesgue μ, así que $\dim_{\mathbf{T}} (S)_\mu = \dim_{\mathbf{T}} (S)_\nu$ y además ambas están normalizadas porque

$$\begin{aligned}\|\nu\| &= \int_{\mathbb{T}} \mathrm{d}\,\nu = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2}\chi_{[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}]} + \frac{3}{2}\chi_{[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]} + \frac{1}{2}\chi_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]}\,\mathrm{d}\,\mu \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{4} = 1.\end{aligned}$$

Pero si calculamos

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{med}_E \left(L^2 \left(\widehat{\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]} \right) \right)_\nu &= \int_{\mathbb{T}} \chi_{[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]}(\omega)\,\mathrm{d}\,\nu = \int_{[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]} 1\,\mathrm{d}\,\nu \\ &= \int_{[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}]} 1\frac{3}{2}\,\mathrm{d}\,\mu = \frac{1}{2}\frac{3}{2} = \frac{3}{4},\end{aligned}$$

así que la dimensión media cambia al cambiar la medida.

Ahora veremos una generalización de los teoremas de Robertson y del resultado del Teorema 12.2 usando esta dimensión media.

Proposición 12.10. *Dada una medida μ suficientemente fuerte, y sean S y T dos subespacios $\mathbf{T}$-invariantes de $\mathcal{H}$. Entonces:*

1. *Si $S \subset T$ y $\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(S) = \dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T) < \infty$ entonces $S = T$.*
2. *Si $S \subset T$ entonces $\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(S) \leqslant \dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T)$.*
3. *Si $S = T$ entonces $\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(S) = \dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T)$.*
4. *Si $S \subset T$ y $\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T) < \infty$ entonces*

$$\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T \ominus S) = \dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T) - \dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(S).$$

Demostración. Es más fácil probar el Ítem 1 al final.

2. Veamos primero el Ítem 2. Si $S \subset T$ por la Proposición 10.16 tenemos que $\dim_{\mathbf{T}}(S) \leqslant \dim_{\mathbf{T}}(T)$ y entonces al integrar tenemos que $\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(S) \leqslant \dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T)$.
3. El Ítem 3. también es directo. Si $S = T$ entonces $\dim_{\mathbf{T}}(S) = \dim_{\mathbf{T}}(T)$ y entonces al integrar $\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(S) = \dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T)$.
4. Ahora, para el Ítem 4 tenemos que si $\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T) < \infty$ entonces $\dim_{\mathbf{T}}(T)$ es finita (p. p. μ) entonces $\dim_{\mathbf{T}}(T \ominus S) = \dim_{\mathbf{T}}(T) - \dim_{\mathbf{T}}(S)$ e integrando obtenemos $\dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T \ominus S) = \dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(T) - \dim \operatorname{med}_{\mathbf{T}}(S)$.

1. Finalmente, para el Ítem 1, tenemos que $\dim \mathrm{med}_{\mathbf{T}} (T \ominus S) = 0$ y por lo tanto $T \ominus S = \{0\}$ así que $T = S$.

□

Así podemos dar una generalización del resultado de [ACHMR04], tomando como dato del subespacio a la dimensión media.

Teorema 12.11. *Sea μ una medida suficientemente fuerte, y sea S un subespacio $\mathbf{T}$-invariante de $\mathcal{H}$ fijo pero desconocido incluido en del que sólo se conoce la dimensión media* $\dim \mathrm{med}_{\mathbf{T}} (S) < \infty$. *Entonces dada la sucesión $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)^t$ (quizás finita) de elementos de $\mathcal{H}$ se tiene que $S = S(\Phi)$ si y sólo si*

$$\int_{\mathbb{T}^n} \sup_l \{\boldsymbol{\omega} \in A_\lambda \ \mathit{con} \ |\lambda| = l\} \, \mathrm{d}\, \mu(\boldsymbol{\omega}) = \dim \mathrm{med}_{\mathbf{T}} (S) .$$

Las demostraciones son análogas a las del Teorema 12.6, pero utilizando la Proposición 12.10 en vez de la Proposición 10.16.

Al igual que en el Teorema 12.6, este resultado no se puede extender al caso en que la dimensión media es infinita, y como ejemplo también sirve la Sección 3.4.

En los espacios invariantes por traslaciones y Sistemas de Gabor podemos tomar la medida de Lebesgue normalizada y en ese caso quedan los siguientes resultados.

Corolario 12.12. *Sea S un subespacio invariante por traslaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$ fijo pero desconocido, del que sólo se conoce la dimensión media y además* $\dim \mathrm{med}_{\mathbf{T}} (S) < \infty$. *Entonces dada la sucesión $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)^t$ (quizás finita) de funciones de $\mathcal{H}$ se tiene que $S = S(\Phi)$ si y sólo si*

$$\int_{\mathbb{T}^n} \sup_l \{\omega \in A_\lambda \ \mathit{con} \ |\lambda| = l\} \, \mathrm{d}\, \boldsymbol{\omega} = \dim \mathrm{med}_{\mathbf{E}} (S) .$$

Corolario 12.13. *Sea S un subespacio invariante por traslaciones y modulaciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$ fijo pero desconocido del que sólo se conoce la dimensión media* $\dim \mathrm{med}_{\mathbf{T}} (S) < \infty$. *Entonces dada la sucesión $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_r)^t$ (quizás finita) de funciones de $\mathcal{H}$ se tiene que $S = S(\Phi)$ si y sólo si*

$$\int_{\mathbb{T}^n} \sup_l \{\omega \in A_\lambda \ \mathit{con} \ |\lambda| = l\} \, \mathrm{d}\, \boldsymbol{\omega} = \dim \mathrm{med}_{\mathbf{T}} (S)$$

El primero de estos Corolarios es otra extensión del resultado demostrado en [ACHMR04]. Si se agrega la hipótesis de que el subespacio tiene una base de Riesz de traslaciones entonces se reconstruye el resultado original. El segundo Corolario es la versión respectiva cuando se consideran sistemas de Gabor.

12.3.1. Aplicación a onditas

En la teoría de onditas (wavelets) se aplican múltiples resultados de los espacios invariantes por traslaciones. En particular aparecen situaciones en donde se puede calcular la dimensión media de un espacio invariante por traslaciones, aunque las hipótesis involucradas no alcancen para determinar la función dimensión de este subespacio.

Nuevamente, para las onditas consideramos funciones en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. En este esquema además de las traslaciones enteras se consideran dilataciones, definidas a partir de una matriz expansiva A de tamaño $d \times d$, con todos sus coeficientes enteros y todos sus autovalores mayores a 1. Se define el operador de dilatación D_A como

$$D_A f\left(x\right) = \sqrt{\left|\det A\right|} f\left(Ax\right).$$

Este operador es unitario, pero no conmuta con las traslaciones, por lo que no es posible considerar dentro de nuestro esquema al sistema de operadores formado por D_A y las traslaciones $E_1, \ldots, E_d$ correspondientes a la base canónica.

El primer ejemplo de onditas surgió al considerar funciones en $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ y tomar las dilataciones de constante 2, y después fue generalizado a otras dimensiones y tipos de dilataciones.

Dado un vector de funciones $F = \left(f_1, \ldots, f_r\right)^t$ se considera el sistema de

$$\begin{aligned} W\left(F\right) &= \left\{\sqrt{\left|\det A\right|}^j f_i\left(A^j x - \alpha\right) / j \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{Z}^d, i = 1, \ldots, r\right\} \\ &= \left\{D_A^j T^{\boldsymbol{\alpha}} f_i / j \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{Z}^d, i = 1, \ldots, r\right\}. \end{aligned}$$

En este sistema sólo aparece el operador de dilatación a la izquierda de los operadores de traslación, y como no conmutan esta posición es importante para determinar el conjunto bajo estudio. Si $W\left(F\right)$ es una base ortonormal de $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ decimos que $F = \left(f_1, \ldots, f_r\right)^t$ es una *multiondita* (*multiwavelet*).

A cada multiondita se le asocia el espacio invariante por traslaciones

$$V_0 = S\left(\left\{D_A^j T^{\boldsymbol{\alpha}} f_i / j < 0, \alpha \in \mathbb{Z}^d, i = 1, \ldots, r\right\}\right),$$

y la función dimensión de la multiondita

$$\dim_W\left(F\right)\left(\boldsymbol{\omega}\right) = \sum_{i=1,\ldots,r} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{Z}^d} \left|\check{f}_i\left(\left(A^t\right)^j\left(\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\alpha}\right)\right)\right|,$$

en donde estamos usando la antitransformada en vez de la transformada para que las definiciones sean compatibles con las otras definiciones de este trabajo. A pesar de estar definida de una manera diferente, esta función dimensión es la función dimensión de un espacio invariante por traslaciones.

Proposición 12.14. *Si $F = (f_1, \ldots, f_r)^t$ es una multiondita entonces*

$$\int_{\mathbb{T}^d} \dim_W (F)(\boldsymbol{\omega}) \, \mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega} = \frac{r}{\det A - 1}$$

y

$$\dim_W (F)(\boldsymbol{\omega}) = \dim \left\langle \mathcal{T}\left(D^j \psi_i\right)(\boldsymbol{\omega}), i = 1, \ldots, r, j > 0 \right\rangle .$$

En donde usamos la función $\mathcal{T}$ definida en la Ecuación (10.6). Las demostraciones de estos resultados están en [BRS01] (Proposición 2.7 y Teorema 2.9). De esto se deduce usando la Ecuación (10.5) y la Ecuación (10.7) que

$$\dim_W (F)(\boldsymbol{\omega}) = \dim_{L^2\left(\mathbb{R}^d\right)} (V_0)(\boldsymbol{\omega}) = \dim_{\mathbf{E}} (V_0)(\boldsymbol{\omega}) .$$

Así que tenemos que

$$\int_{\mathbb{T}^d} \dim_{\mathbf{E}} (V_0)(\boldsymbol{\omega}) \, \mathrm{d}\,\boldsymbol{\omega} = \dim \mathrm{med}_{\mathbf{E}} (V_0) = \frac{r}{\det A - 1}.$$

En este esquema, tenemos que se puede conocer la dimensión media del espacio invariante por traslaciones V_0, aunque no se conozca su función dimensión. Es más, en los casos en que la función dimensión es constante, se tiene que V_0 tiene una base ortonormal de traslaciones. En particular, la función dimensión sea constantemente 1 si y sólo si la multiwavelet proviene de un análisis multiresolución. Los *análisis multiresolución* fueron descubiertos por Mallat [Mal89] y Meyer [Mey92], y son una pieza central para la construcción de onditas de soporte compacto realizada por Daubechies en [Dau92], que han motivado la popularización de las onditas en los últimos años.

Capítulo 13

Ejemplos de espectros

Hasta ahora en los ejemplos que aparecieron en el Capítulo 3 y el Capítulo 6 los espectros eran todo el toro o un intervalo o conjuntos sencillos. En particular, en todos los ejemplos se tenía que σ y $z(\tilde{\sigma})$ eran iguales. En este Capitulo vamos a ver ejemplos de espacios con espectros más extraños. En particular vamos a construir un espacio invariante por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$ en el que σ y $z(\tilde{\sigma})$ son realmente distintos, en el sentido de que difieren en un conjunto de medida positiva.

Además vamos a construir otro espacio de funciones definidas en $\mathbb{R}$, en el que vamos a tener que considerar una medida que no es la de Lebesgue ni una medida puntual. Este subespacio es invariante por traslaciones, pero está formado por funciones que no están en $L^2(\mathbb{R})$.

También vamos a volver a analizar el ejemplo que modela el sonido en estéreo visto en la Subsección 6.3.3, para tratar de eliminar la redundancia en que introducía el operador de intercambio.

13.1. Espectro denso

Vamos a ver un espacio parecido a los espacios de banda limitada angosta como los de la Sección 3.2. El objetivo es encontrar un ejemplo en donde las dos definiciones de espectro σ y $z(\tilde{\sigma})$ den conjuntos distintos, en el sentido de que difieren en un conjunto de medida positiva. En todos los ejemplos que vimos anteriormente estos dos espectros coinciden.

13.1.1. Conjunto de Cantor de medida positiva

Vamos a construir una variación del conjunto de Cantor que tiene medida positiva.

Dado el intervalo
$$C_1 = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$
eliminamos el intervalo central de longitud $\frac{1}{8}$, y el conjunto que nos queda es
$$C_2 = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{16}\right] \cup \left[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}\right]$$
que está formado por dos intervalos más pequeños. Ahora, a cada uno de estos dos subconjuntos les sacamos el subintervalo central con longitud $\frac{1}{32}$, así nos queda
$$C_3 = \left[-\frac{1}{4}, -\frac{11}{32}\right] \cup \left[-\frac{9}{32}, -\frac{1}{16}\right] \cup \left[\frac{1}{16}, \frac{9}{32}\right] \cup \left[\frac{11}{32}, \frac{1}{4}\right].$$

Se sigue así, recortando a cada intervalo un subintervalo centrado de un cuarto de la longitud que se recortó en el paso anterior.

Tomamos C como el límite de esta sucesión de conjuntos cerrados encajados. Por ser límite decreciente de conjuntos medibles, C es medible. Además por ser límite decreciente de cerrados es un cerrado. Y como todos los conjuntos están en el intervalo $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, que tiene medida finita, se tiene que la medida del límite es el límite de las medidas.

En el paso n hay 2^{n-1} segmentos y la longitud de los segmento a sacar es $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$. La medida del conjunto C_n es
$$\begin{aligned}|C_n| &= \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1}\left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n,\end{aligned}$$
así que cada segmento que queda es de tamaño
$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^{n-1}} > \frac{\frac{1}{4}}{2^{n-1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
por lo que siempre se pueden sacar los subintervalos que son de longitud $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Entonces la medida de C es el límite de las medidas de los conjuntos de la sucesión, esto es $\frac{1}{4}$, así que es un conjunto de Cantor con medida no nula.

Sin embargo, el conjunto C tiene interior vacío. Dado cualquier intervalo I de longitud positiva incluido en el intervalo $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, para valores grandes de n la longitud de los segmentos que componen C_n es más chica que la del intervalo elegido I. Por ello, una parte de los intervalos que se han eliminado en los pasos anteriores está dentro el intervalo elegido. Así que hay todo un subintervalo de I que está afuera de C_n y por ello está afuera de C.

13.1.2. Banda en el complemento

Consideraremos el conjunto de funciones cuya transformada de Fourier está en el complemento $C^C = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \setminus C$.

La medida del C^C es $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ y además como C tiene interior vacío tenemos que su complemento es denso en $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$. Además C es cerrado e incluye a los extremos $-\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{4}$, de manera que C^C es abierto.

Consideramos el espacio

$$L^2\left(C^C\right) = L^2\left(\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\right) \ominus L^2\left(C\right) \subset L^2\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right).$$

Vamos a trabajar con $\widehat{L^2\left(C^C\right)}$, el espacio formado por las transformadas de Fourier de sus funciones. Al igual que en la Ecuación (3.2) las traslaciones de

$$\tilde{f}\left(x\right) = \widehat{\chi_{C^C}}\left(x\right)$$

generan el subespacio $\widehat{L^2\left(C^C\right)}$.

En este caso, la función dimensión la podemos calcular como

$$\begin{aligned}
\dim_E\left(S\right)\left(\omega\right) &= \text{rango}\left(\left\{\tilde{f}, \tilde{f}\right\}\right)\left(\omega\right) \\
&= \text{rango}\left(\sum_k \left(\tilde{f}\right)^{\vee}\left(\omega - k\right)\overline{\left(\tilde{f}\right)^{\vee}\left(\omega - k\right)}\right) \\
&= \text{rango}\left(\sum_k \left|\chi_{C^C}\left(\omega - k\right)\right|^2\right) = \text{rango}\left(\chi_{C^C}\left(\omega\right)\right) = \chi_{C^C}\left(\omega\right)
\end{aligned}$$

Así que la función dimensión es 1 en C^C y 0 afuera. En esta cuenta estamos usando fuertemente que C^C está incluido en el intervalo $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ y que $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ para no tener problemas al periodizar las funciones. Entonces tenemos que $\tilde{\sigma}_E\left(\widehat{L^2\left(C^C\right)}\right) = C^C$

Vimos en la Proposición 10.37 que $\sigma_E\left(\widehat{L^2\left(C^C\right)}\right)$ es la clausura esencial de $\tilde{\sigma}_E\left(\widehat{L^2\left(C^C\right)}\right)$. Como C^C es abierto y denso en $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, si elegimos un punto ω en el intervalo $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ y tomamos un entorno $[\omega - r, \omega + r]$, siempre incluirá un punto η de C^C, que a su vez tendrá un intervalito que contiene a η y que está contenido en C^C y en $[\omega - r, \omega + r]$, así ω está en la clausura esencial de C^C. De manera que $\overline{C^C}^{\text{ess}} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$ y por ello $\sigma_E\left(\widehat{L^2\left(C^C\right)}\right) = z\left(\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]\right)$.

Esto nos sirve como ejemplo de que las dos definiciones de espectro son realmente distintas. Ya que los conjuntos $\tilde{\sigma}_E\left(\widehat{L^2\left(C^C\right)}\right) = z\left(C^C\right)$ y

$\sigma_E\left(\widehat{L^2(C^C)}\right) = z\left(\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]\right)$ difieren en un conjunto de medida no nula de la circunferencia, ya que C^C tiene medida $\frac{1}{4}$ y $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ tiene medida $\frac{1}{2}$ y sus imágenes por z también.

Se pueden hacer construcciones similares con otras bandas distintas de $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$, pero cuando la longitud total es mayor a 1 (o sea $\Omega > \frac{1}{2}$) comienzan a aparecer problemas similares a los de la Sección 3.3.

13.2. Espectro con medida de Lebesgue cero

Veremos un ejemplo en el que la media no es absolutamente continua ni puntual. En la construcción utilizaremos el conjunto de Cantor clásico, que tiene medida de Lebesgue 0, pero considerándolo con una medida μ que le asigna medida 1. A partir de este conjunto vamos a construir un subespacio de funciones en $\mathbb{R}$, pero que no están en $L^2(\mathbb{R})$. Para poder compararlo mejor con los ejemplos anteriores, también vamos a considerar el operador de traslación en $\mathbb{R}$

$$Ef(x) = f(x-1),$$

aunque esta definido en otro subespacio de funciones.

13.2.1. Conjunto de Cantor clásico

Vamos a construir el conjunto de Cantor clásico. Es muy similar al conjunto construido en la Subsección 13.1.1, pero los intervalos que vamos eliminando tienen los tamaños elegidos de otra manera.

Dado el intervalo

$$C_1 = \left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$$

eliminamos el intervalo central de longitud $\frac{1}{6}$, y el conjunto que nos queda es

$$C_2 = \left[-\frac{1}{4},-\frac{1}{12}\right] \cup \left[\frac{1}{12},\frac{1}{4}\right]$$

que está formado por dos intervalos más pequeños. Ahora, a cada uno de estos dos subconjuntos les sacamos el subintervalo central con longitud $\frac{1}{18}$, así nos queda

$$C_3 = \left[-\frac{1}{4},-\frac{7}{36}\right] \cup \left[-\frac{5}{36},-\frac{1}{12}\right] \cup \left[\frac{1}{12},\frac{5}{36}\right] \cup \left[\frac{7}{36},\frac{1}{4}\right].$$

Se sigue así, recortando a cada intervalo un subintervalo centrado de un tercio de la longitud del que se recortó en el paso anterior.

Tomamos C como el límite de esta sucesión de conjuntos cerrados encajados. Por ser límite decreciente de conjuntos medibles, C es medible. Además por ser límite decreciente de cerrados es un cerrado. Y como todos los C_n están en el intervalo $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, que tiene medida finita, la medida del límite es el límite de las medidas.

En cada paso hay 2^{n-1} segmentos y la longitud de los segmento a sacar es $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$. La medida del conjunto C_n es

$$\begin{aligned}|C_n| &= \frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} 2^{i-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n,\end{aligned}$$

así que cada segmento que queda es de tamaño

$$\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2^{n-1}} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n > \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

por lo que siempre se pueden sacar los subintervalos que son de longitud $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Entonces la medida de C es el límite de las medidas de los conjuntos de la sucesión, esto es 0, así que es un conjunto de Cantor con medida cero.

Si consideráramos el espacio invariante por traslaciones $\widehat{L^2(C)}$, con la medida de Lebesgue, sería el espacio que sólo tiene a la función nula. Por ello debemos elegir otra medida, que construiremos a continuación.

En cada uno de los pasos intermedios podemos definir una medida. Para ello en el paso n tomamos la función

$$f_n = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{C_n}.$$

Cada una de estas funciones tienen integral 1, así que la medida asociada es finita. Estas funciones no convergen en $L^1(\mathbb{T})$, pero veamos que si convergen como medidas en forma $*$-débil.

La constante que aparece en f_n está elegida de manera que en cada paso

$$\int_{\mathbb{T}} f_n(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n |C_n| = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1.$$

En particular, en cada uno de los segmentos $C_{n,k}$ que componen el conjunto tienen la mismo valor de la integral

$$\int_{C_{n,k}} f_n(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

En cada uno de los pasos siguientes la cantidad de segmentos incluidos en $C_{n,k}$ se duplica, pero cada uno de estos segmentos tiene la mitad de valor al integrarlo. Así que si $m > n$ entonces

$$\int_{C_{n,k}} f_m(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega = 2^{m-n}\frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dada una función continua m analicemos el límite de

$$\int_{\mathbb{T}} m(\omega)\,f_n(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega.$$

Como m es continua y $\mathbb{T}$ es compacto entonces m es absolutamente continua, o sea que para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que existe un δ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces $|m(x) - m(y)| < \varepsilon$. Tomemos un n_0 suficientemente grande para que cada intervalo $C_{n_0,k}$ tenga longitud menor que δ. Entonces si tomamos $m > n > n_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{T}} m(\omega)\,f_n(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega - \int_{\mathbb{T}} m(\omega)\,f_m(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\\ &= \int_{\mathbb{T}} m(\omega)\,(f_n(\omega) - f_m(\omega))\,\mathrm{d}\,\omega = \sum_{k=1}^{2^{n_0-1}} \int_{C_{n_0,k}} m(\omega)\,(f_n(\omega) - f_m(\omega))\,\mathrm{d}\,\omega.\end{aligned}$$

Veamos la integral sobre cada intervalito $C_{n_0,k}$ por separado. Fijando un punto cualquiera ω_k en $C_{n_0,k}$ tenemos

$$\begin{aligned}&\int_{C_{n_0,k}} m(\omega)\,(f_n(\omega) - f_m(\omega))\,\mathrm{d}\,\omega\\ &= \int_{C_{n_0,k}} (m(\omega) - m(\omega_k))\,(f_n(\omega) - f_m(\omega))\,\mathrm{d}\,\omega\\ &+ \int_{C_{n_0,k}} m(\omega_k)\,(f_n(\omega) - f_m(\omega))\,\mathrm{d}\,\omega.\end{aligned}$$

La primera parte la podemos acotar como

$$\begin{aligned}&\left|\int_{C_{n_0,k}} (m(\omega) - m(\omega_k))\,(f_n(\omega) - f_m(\omega))\,\mathrm{d}\,\omega\right|\\ &\leqslant \int_{C_{n_0,k}} \varepsilon\,|f_n(\omega) - f_m(\omega)|\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant \int_{C_{n_0,k}} \varepsilon\,(f_n(\omega) + f_m(\omega))\,\mathrm{d}\,\omega\\ &= \varepsilon\left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2\varepsilon\frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

A la segunda parte la podemos calcular como

$$\begin{aligned}
&\int_{C_{n_0,k}} m(\omega_k)\left(f_n(\omega)-f_m(\omega)\right)\mathrm{d}\,\omega \\
&= m(\omega_k)\left(\int_{C_{n_0,k}} f_n(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega-\int_{C_{n_0,k}} f_m(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\right) \\
&= m(\omega_k)\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n-1}}\right)=0.
\end{aligned}$$

Juntando estas acotaciones queda que

$$\left|\int_{\mathbb{T}} m(\omega) f_n(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega-\int_{\mathbb{T}} m(\omega) f_m(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\right| \leqslant 2^{n-1}\left(2\varepsilon\frac{1}{2^{n-1}}+0\right)=2\varepsilon,$$

así que la sucesión $\left(\int_{\mathbb{T}} m(\omega) f_n(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega\right)_n$ es de Cauchy y por lo tanto converge para toda función continua m. Así que las medidas asociadas a las funciones f_n convergen como medidas en forma $*$-débil. Llamamos μ_C a la medida que se obtiene en este límite.

13.2.2. Banda en el conjunto de Cantor

Consideremos ahora las funciones con soporte en el conjunto de Cantor, y usando la medida de Cantor que construimos tomamos $L^2(C,\mu_C)$. Como μ_C es finita entonces $L^2(C,\mu_C)\subset L^1(C,\mu_C)$. Dada una función m en $L^2(C,\mu_C)$ está bien definida la función

$$\hat{m}(x)=\int m(\omega)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\,\mu_C(\omega)$$

que es la transformada de Fourier de m.

Esta función no esta en $L^2(\mathbb{R})$ porque sino la original estaría en $L^2(\mathbb{R})$, considerado con la medida de Lebesgue normalizada.

La transformada en sentido inverso es dada una función f en $L^2\widehat{(C,\mu_C)}$ tomamos

$$\hat{f}(\omega)=\lim_{M\to\infty}\frac{\int f(x)\,g\left(\frac{x}{M}\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\,x}{\int \hat{\chi}(x)\,g\left(\frac{x}{M}\right)\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\,x}\ (\text{p. p. } \mu_C),$$

en donde

$$\hat{\chi}(x)=\int \chi_C(\omega)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\,\mu_C(\omega)$$

es la transformada de Fourier de la función característica del conjunto de Cantor, usando la medida de Cantor como en la ecuación anterior y g es la función gaussiana

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Podemos definir las correspondientes antitransformadas, con el signo + en la integral en vez del −. Como en los casos anteriores $^\vee\colon L^2\widehat{(C,\mu_C)} \to L^2(C,\mu_C)$ es la inversa de $^\wedge\colon L^2(C,\mu_C) \to L^2\widehat{(C,\mu_C)}$. Y también tenemos que $^\vee\colon L^2(C,\mu_C) \to L^2\widehat{(C,\mu_C)}$ es la inversa de $^\wedge\colon L^2\widehat{(C,\mu_C)} \to L^2(C,\mu_C)$.

En $L^2\widehat{(C,\mu_C)}$ podemos definir el producto escalar a través de la transformada de Fourier, o sea

$$\langle f, g\rangle_{L^2\widehat{(C,\mu_C)}} = \langle \check{f}, \check{g}\rangle_{L^2(C,\mu_C)}.$$

Y al elegir este producto las transformadas son isomorfismos isométricos.

Veamos que $L^2\widehat{(C,\mu_C)}$ que es invariante por traslaciones (aunque no esté en $L^2(\mathbb{R})$). Si $\hat{m}$ está en $L^2\widehat{(C,\mu_C)}$ entonces tomamos la función $M^k m = m(\omega)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\omega k}$ con k entero. Esta función sigue estando en $L^2(C,\mu_C)$ y su trasformada es

$$\begin{aligned}\widehat{M^k m} &= \int_{\mathbb{T}} m(\omega)\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\omega k}\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\,\mu_C(\omega)\\ &= \int_{\mathbb{T}} m(\omega)\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\omega(x-k)}\,\mathrm{d}\,\mu_C(\omega) = \hat{m}(x-k) = E^k\hat{m},\end{aligned}$$

así que $E^k\hat{m}$ también está en $L^2\widehat{(C,\mu_C)}$.

En particular tenemos que $\widehat{M^k m} = E^k\hat{m}$ y de la misma manera tenemos que $\left(M^k m\right)^\vee = E^k\check{m}$. Considerando las transformadas inversas, si tenemos una función f en $L^2\widehat{(C,\mu_C)}$ entonces $M^k\check{f} = \left(E^k f\right)^\vee$ y $M^k\hat{f} = \widehat{E^k f}$ respectivamente.

Entonces veamos que el producto en frecuencias es $\{f,g\} = \check{f}\overline{\check{g}}\mu_C$ ya que

$$\begin{aligned}\{f,g\}^\wedge(\alpha) = \widehat{\check{f}\overline{\check{g}}\mu_C}(\alpha) &= \int_{\mathbb{T}} \check{f}\overline{\check{g}}\,\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\alpha x}\,\mathrm{d}\,\mu_C(\omega)\\ &= \int_{\mathbb{T}} \check{f}\overline{\check{g}\,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\alpha x}}\,\mathrm{d}\,\mu_C(\omega) = \int_{\mathbb{T}} \check{f}\overline{M^\alpha\check{g}}\,\mathrm{d}\,\mu_C(\omega)\\ &= \int \check{f}\overline{(E^\alpha g)^\vee}\,\mathrm{d}\,\mu_C(\omega) = \left\langle \check{f}, (E^\alpha g)^\vee\right\rangle = \langle f, E^\alpha g\rangle.\end{aligned}$$

Ahora, para calcular el multiplicador, definimos nuevamente

$$m \bullet f = \left(m\check{f}\right)^\wedge$$

aunque en este caso estamos utilizando las transformada y antitransformada definidas en esta sección y no las usuales de $L^2(\mathbb{R})$. Entonces tomando $m = z^k$ tenemos que

$$m \bullet f = z^k \bullet f = \left(z^k \check{f}\right)^{\wedge} = \left(M^k \check{f}\right)^{\wedge} = \left(\left(T^k f\right)^{\vee}\right)^{\wedge} = T^k f$$

y por lo tanto $z^k \bullet f = T^k f$.

De manera similar a lo hecho en la Sección 3.1, veremos que

$$\hat{\chi} = \widehat{\chi_C}$$

es un generador, pero pensando a χ_C en $L^2(C, \mu_C)$. Dada una función g cualquiera en $\widehat{L^2(C, \mu_C)}$ tenemos que $g = \hat{m}$ con m en $L^2(C, \mu_C)$. Entonces $m \bullet \widehat{\chi_C} = \widehat{m\chi_C} = \hat{m} = g$. Así que

$$\dim_E\left(\widehat{L^2(C, \mu_C)}\right) = \operatorname{rango}(\{\hat{\chi}, \hat{\chi}\}) = \operatorname{rango}(\chi_C) = \chi_C$$

y por ello $\tilde{\sigma}\left(\widehat{L^2(C, \mu_C)}\right) = C$.

Calculemos ahora $\sigma\left(\widehat{L^2(C, \mu_C)}\right)$, utilizando la Proposición 10.37. Por un lado, C es cerrado, así que $\overline{C}^{\mu_C \text{ ess}} \subset C$. Por otro lado, dado un punto ω de C, ese punto está en una sucesión de intervalos encajados que corresponden a los distintos pasos para construir C. De cada uno de esos intervalos, al menos uno de los extremos es distinto de ω. Como los extremos de los intervalos nunca se eliminan entonces ω es un punto de acumulación de C.

Tomemos un subconjunto C' cerrado incluido en C, tal que no contiene a un punto ω de C. Entonces el complemento de C' es un abierto que incluye a ω y en particular incluye un intervalito $(\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon)$ para un ε suficientemente pequeño. Tomemos un n suficientemente grande para que $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n < \varepsilon$. Entonces ω está en alguno de los intervalitos $C_{n,k}$ que componen a C_n y ese intervalo $C_{n,k}$ está incluido en $(\omega - \varepsilon, \omega + \varepsilon)$ que está incluido en el complemento de C'. Así que

$$\int_{C'} f_n(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant 1 - \int_{C_{n,k}} f_n(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Al continuar construyendo C, en los pasos sucesivos la medida asociada por f_m al conjunto $C_{n,k}$ no cambia así que

$$\int_{C'} f_m(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega \leqslant 1 - \int_{C_{n,k}} f_m(\omega)\,\mathrm{d}\,\omega = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

y como las medidas asociadas a f_m convergen en a μ_C tenemos que integrando la función 1 queda

$$\int_{C'} \mathrm{d}\,\mu_C \leqslant 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Así que $\mu_C\left(C\backslash C'\right) \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ y en particular no es cero. Por ello C' no puede ser $\overline{C}^{\mu_C\,\mathrm{ess}}$ y esto vale para todo subconjunto C' cerrado incluido estrictamente en C, así que $\overline{C}^{\mu_C\,\mathrm{ess}} = C$ y por ello $\sigma\left(L^2\,\widehat{(C, \mu_C)}\right) = z\,(C)$.

13.3. Revisitando el sonido estéreo

En la Subsección 6.3.3 analizamos el caso en que tenemos dos funciones de $L^2\,(\mathbb{R})$ y los operadores son

$$\begin{aligned} T_1\,(f, g) &= (Ef, Eg) \\ T_2\,(f, g) &= (g, f)\,. \end{aligned}$$

Habíamos visto en la Ecuación (6.5) que el producto en frecuencias es

$$\begin{aligned} \left\{(f, g)\,, \left(\tilde{f}, \tilde{g}\right)\right\}(\omega_1, \omega_2) = {} & \frac{1}{2}\left\{f + g, \tilde{f} + \tilde{g}\right\}(\omega_1)\,\delta_0\,(\omega_2) \\ & + \frac{1}{2}\left\{f - g, \tilde{f} - \tilde{g}\right\}(\omega_1)\,\delta_{\frac{1}{2}}\,(\omega_2)\,. \end{aligned}$$

Así que podemos tomar como medida μ a

$$\mu = \frac{1}{2}\delta_0\,(\omega_2) + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}\,(\omega_2)\,,$$

que tiene norma 1 ya que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \mathrm{d}\,\mu\,(\boldsymbol{\omega}) &= \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{2}\delta_0\,(\omega_2) + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}\,(\omega_2)\,\mathrm{d}\,\omega_1\,\mathrm{d}\,\omega_2 \\ &= \int_{\mathbb{T}} \mathrm{d}\,\omega_1 \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2}\delta_0\,(\omega_2) + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}\,(\omega_2)\,\mathrm{d}\,\omega_2 = 1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Y entonces queda

$$\left\{(f, g)\,, \left(\tilde{f}, \tilde{g}\right)\right\}_\mu (\omega_1, \omega_2) = \left\{\begin{array}{lll} \left\{f + g, \tilde{f} + \tilde{g}\right\}(\omega_1) & \text{si} & \omega_2 = 0 \\ \left\{f - g, \tilde{f} - \tilde{g}\right\}(\omega_1) & \text{si} & \omega_2 = \frac{1}{2} \\ \text{indefinido} & & \text{en otro caso} \end{array}\right. .$$

Dada $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots)^t$ una sucesión (quizás finita) de pares de funciones en $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$, recordemos la definición de $E(\Phi)$

$$E(\Phi) = \left\{T_1^k T_2^j \phi_i \text{ con } k \in \mathbb{Z},\ j \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n, \ldots\right\}.$$

Al tener en cuenta la multiplicidad, para estos operadores los pares de funciones se repiten infinitas veces y por ello nunca pueden ser una base. Por ello, sería bueno tomar el conjunto

$$\left\{T_1^k \phi_i \text{ con } k \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n, \ldots\right\} \cup \left\{T_1^k T_2 \phi_i \text{ con } k \in \mathbb{Z},\ i = 1, \ldots, n, \ldots\right\}$$

en el que no aparecen repeticiones a menos que haya repeticiones en la sucesión original. Sin embargo, es mejor tomar dos combinaciones lineales de $T_1^k \phi_i$ con $T_1^k T_2 \phi_i$ elegidas convenientemente.

Para ello definimos los proyectores

$$P_0 = \frac{\operatorname{Id} + T_2}{2}$$
$$P_{\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{Id} - T_2}{2}.$$

Veamos que P_0 es un proyector

$$P_0^* = \frac{\operatorname{Id} + T_2^*}{2} = \frac{\operatorname{Id} + T_2}{2}^{-1} = \frac{\operatorname{Id} + T_2}{2}$$

y además

$$P_0^2 = \left(\frac{\operatorname{Id} + T_2}{2}\right)^2 = \frac{\operatorname{Id} + 2T_2 + T_2^2}{4} = \frac{2\operatorname{Id} + 2T_2}{4} = \frac{\operatorname{Id} + T_2}{2} = P_0.$$

De la misma manera se ve que $P_{\frac{1}{2}}$ es un proyector.

Además

$$P_0 P_{\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{Id} + T_2}{2} \frac{\operatorname{Id} - T_2}{2} = \frac{\operatorname{Id}^2 - T_2^2}{4} = 0 \tag{13.1}$$

y similarmente $P_{\frac{1}{2}} P_0 = 0$.

Además como T_2 y Id conmutan con T_1 entonces P_0 y $P_{\frac{1}{2}}$ conmutan con T_1.

Otra propiedad es que

$$P_0 + P_{\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{Id} + T_2}{2} + \frac{\operatorname{Id} - T_2}{2} = \operatorname{Id} \tag{13.2}$$
$$P_0 - P_{\frac{1}{2}} = \frac{\operatorname{Id} + T_2}{2} - \frac{\operatorname{Id} - T_2}{2} = T_2,$$

así que podemos reconstruir a los operadores originales Id y T_2 a partir de P_0 y $P_{\frac{1}{2}}$.

13.3.1. Recalculando el producto

Calculemos ahora el producto en frecuencias considerando sólo el operador T_1 a partir del producto en frecuencias considerando los operadores (T_1, T_2). Para ello resulta conveniente recalcular el producto en frecuencias de manera que se note mejor la estructura de los operadores. Así podremos comparar la estructura de $\mathcal{H}$ tomando los dos operadores (T_1, T_2) con la estructura que tiene al usar sólo T_1. Por ello, necesitaremos indicar con subíndices a cual de las dos estructuras nos referimos.

En este caso como

$$\left\langle \phi, \mathbf{T}^{(\alpha,\beta)}\psi \right\rangle = \begin{cases} \langle \phi, T_1^{\alpha}\psi \rangle & \text{si} \quad \beta \text{ es par} \\ \langle \phi, T_1^{\alpha}T_2\psi \rangle & \text{si} \quad \beta \text{ es impar} \end{cases} \tag{13.3}$$

Habíamos considerado para el producto en frecuencias una medida del tipo

$$\{\phi, \psi\}_{(T_1,T_2)} (\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} h_0 (\omega_1) \delta_0 (\omega_2) + \frac{1}{2} h_{\frac{1}{2}} (\omega_1) \delta_{\frac{1}{2}} (\omega_2)$$

en la que por la Ecuación (6.4) teníamos que

$$\widehat{\{\phi, \psi\}}_{(T_1,T_2)} (\alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\widehat{h_0} (\alpha) + \widehat{h_{\frac{1}{2}}} (\alpha) \right) & \text{si} \quad \beta \text{ es par} \\ \frac{1}{2} \left(\widehat{h_0} (\alpha) - \widehat{h_{\frac{1}{2}}} (\alpha) \right) & \text{si} \quad \beta \text{ es impar} \end{cases} .$$

Entonces al compararlo con la Ecuación (13.3) tenemos que

$$\begin{aligned} \widehat{h_0} (\alpha) &= \langle \phi, T_1^{\alpha}\psi \rangle + \langle \phi, T_1^{\alpha}T_2\psi \rangle = \langle \phi, T_1^{\alpha} (\mathrm{Id} + T_2) \psi \rangle \\ &= 2 \left\langle \phi, T_1^{\alpha} \frac{(\mathrm{Id} + T_2)}{2} \psi \right\rangle = 2 \langle \phi, T_1^{\alpha} P_0 \psi \rangle \\ &= 2 \left\langle \phi, T_1^{\alpha} P_0^2 \psi \right\rangle = 2 \langle \phi, P_0 T_1^{\alpha} P_0 \psi \rangle \\ &= 2 \langle P_0^* \phi, T_1^{\alpha} P_0 \psi \rangle = 2 \langle P_0 \phi, T_1^{\alpha} P_0 \psi \rangle , \end{aligned}$$

así que $h_0 = 2 \{P_0\phi, P_0\psi\}_{T_1}$. De la misma manera

$$\begin{aligned} \widehat{h_{\frac{1}{2}}} (\alpha) &= \langle \phi, T_1^{\alpha}\psi \rangle - \langle \phi, T_1^{\alpha}T_2\psi \rangle = \langle \phi, T_1^{\alpha} (\mathrm{Id} - T_2) \psi \rangle \\ &= 2 \left\langle \phi, T_1^{\alpha} P_{\frac{1}{2}} \psi \right\rangle = 2 \left\langle P_{\frac{1}{2}} \phi, T_1^{\alpha} P_{\frac{1}{2}} \psi \right\rangle \end{aligned}$$

por lo que $h_{\frac{1}{2}} = 2 \left\{ P_{\frac{1}{2}}\phi, P_{\frac{1}{2}}\psi \right\}_{T_1}$.

Así que tenemos que

$$\{\phi, \psi\}_{(T_1,T_2)} (\omega_1, \omega_2) = \{P_0\phi, P_0\psi\}_{T_1} \delta_0 (\omega_2) + \left\{ P_{\frac{1}{2}}\phi, P_{\frac{1}{2}}\psi \right\}_{T_1} \delta_{\frac{1}{2}} (\omega_2) ,$$

o sea que

$$\{\phi,\psi\}_{(T_1,T_2)}(\omega_1,\omega_2) = \left\{\sqrt{2}P_0\phi, \sqrt{2}P_0\psi\right\}_{T_1} \frac{1}{2}\delta_0(\omega_2) + \left\{\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\psi\right\}_{T_1} \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}(\omega_2).$$

13.3.2. Bases y marcos

Vamos a buscar un conjunto similar a $E(\Phi)$, las traslaciones de Φ, tratando de evitar las repeticiones innecesarias. Definimos para este caso en particular

$$\tilde{E}(\Phi) = \left\{T_1^k\sqrt{2}P_0\phi_i \text{ con } k\in\mathbb{Z},\, i=1,\dots,n,\dots\right\} \cup \left\{T_1^k\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i \text{ con } k\in\mathbb{Z},\, i=1,\dots,n,\dots\right\}$$

(con multiplicidad).

Queremos caracterizar los casos en que $\tilde{E}(\Phi)$ es una base ortonormal o alguna otra de las estructuras similares que definimos anteriormente.

Proposición 13.1. *Para los $\mathcal{H}$, $\mathbf{T}$, μ que estamos utilizando, dada $\Phi = (\phi_1,\phi_2,\dots,\phi_n,\dots)^t$ una sucesión (quizás finita) de pares de funciones en $L^2(\mathbb{R})\otimes L^2(\mathbb{R})$ entonces*

1. *$\tilde{E}(\Phi)$ es una base ortonormal si y sólo si $\{\Phi,\Phi\}_\mu(\omega) = \mathrm{Id}$ (p. p. ω).*
2. *$\tilde{E}(\Phi)$ es una base de Riesz si y sólo si existen constantes $0 < A \leqslant B$ tales que $A\,\mathrm{Id} \leqslant \{\Phi,\Phi\}(\omega) \leqslant B\,\mathrm{Id}$ (p. p. ω).*
3. *$\tilde{E}(\Phi)$ es un marco de Parseval si Φ es una sucesión μ-quasi-ortonormal.*

Demostración. Tomemos la sucesión

$$\tilde{\Psi} = \left(\sqrt{2}P_0\phi_1, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_1, \sqrt{2}P_0\phi_2, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_2, \dots, \sqrt{2}P_0\phi_k, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_k, \dots\right)^t$$

formada por los pares de funciones que aparecen en $\sqrt{2}P_0\Phi$ y $\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\Phi$.

Entonces $E_{T_1}\left(\tilde{\Psi}\right) = \tilde{E}_{(T_1,T_2)}(\Phi)$ (incluso teniendo en cuenta la multiplicidad). Lo bueno de esto es que en $E_{T_1}\left(\tilde{\Psi}\right)$ aparece un solo operador y además tiene un producto en frecuencias en el que se puede usar la medida de Lebesgue normalizada.

- Primero veamos que Φ es diagonal si y sólo si Ψ es diagonal.

Si Φ es diagonal entonces si $i \neq j$ tenemos que $\left\{\phi_i, \phi_j\right\}_{(T_1,T_2)} = 0$ y entonces

$$\begin{aligned}\left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_j\right\}_{T_1} &= 0\\ \left\{\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j\right\}_{T_1} &= 0.\end{aligned}$$

Además por la Ecuación (13.1)

$$\begin{aligned}\left\langle\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i, T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_0\phi_j\right\rangle &= \left\langle P_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}\phi_i, P_0\sqrt{2}T_1^{\alpha}\phi_j\right\rangle\\ &= \left\langle P_0P_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}\phi_i, \sqrt{2}T_1^{\alpha}\phi_j\right\rangle = 0,\end{aligned}$$

así que

$$\left\{\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_j\right\}_{T_1} = 0$$

incluso cuando $i = j$. Así que Ψ también es diagonal.

Si Ψ es diagonal entonces si $i \neq j$ entonces

$$\begin{aligned}\left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_j\right\}_{T_1} &= 0\\ \left\{\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j\right\}_{T_1} &= 0\end{aligned}$$

y por lo tanto $\left\{\phi_i, \phi_j\right\}_{(T_1,T_2)} = 0\delta_0(\omega_2) + 0\delta_{\frac{1}{2}}(\omega_2) = 0$, así que Φ es diagonal.

- Veamos que $S_{(T_1,T_2)}(\Phi) = S_{T_1}\left(\tilde{\Psi}\right)$

Para ver que $S_{T_1}\left(\tilde{\Psi}\right) \subset S_{(T_1,T_2)}(\Phi)$, alcanza con ver que los elementos de $\tilde{\Psi}$ pertenecen a $S_{(T_1,T_2)}(\Phi)$. Pero los elementos son justamente $\sqrt{2}P_0\phi_i$ y $\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i$ que están en $S_{(T_1,T_2)}(\phi_i) \subset S_{(T_1,T_2)}(\Phi)$ por construcción.

Para ver que $S_{T_1}\left(\tilde{\Psi}\right) \supset S_{(T_1,T_2)}(\Phi)$, alcanza con ver que los elementos de Φ y de $T_2\Phi$ pertenecen a $S_{T_1}\left(\tilde{\Psi}\right)$. Tenemos que por la Ecuación (13.2)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}P_0\phi_i + \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i\right) &= \left(P_0 + P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_i = \operatorname{Id}\phi_i = \phi_i\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}P_0\phi_i - \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i\right) &= \left(P_0 - P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_i = T_2\phi_i\end{aligned}$$

entonces ϕ_i y $T_2\phi_i$ están en $S_{T_1}\left(\tilde{\Psi}\right)$ para todo i.

1. Bases Ortonormales

   Por un lado necesitamos que $\tilde{E}_{(T_1,T_2)}(\Phi) = E_{T_1}(\Psi)$ sea diagonal que es equivalente a que Φ sea diagonal.

   Por otro lado, tenemos que $\tilde{E}_{(T_1,T_2)}(\Phi) = E_{T_1}(\Psi)$ es una base ortonormal si y sólo si

$$\left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_i\right\} = 1$$
$$\left\{\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i\right\} = 1$$

   si y sólo si

$$\{\phi_i, \phi_i\}_{(T_1,T_2)} = 1\frac{1}{2}\delta_0(\omega_2) + 1\frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}(\omega_2)$$

   si y sólo si

$$\{\phi_i, \phi_i\}_{(T_1,T_2)\mu} = 1 \text{ (p. p. } \mu)$$

   si y sólo si Φ es una $\{\Phi, \Phi\}_\mu(\omega) = \mathrm{Id}$ (p. p. μ).

   Así que ambas condiciones son equivalentes.

2. Bases de Riesz

   Es igual a la anterior, salvo que en este caso en vez de tener la función constante 1, tenemos que existen constantes $0 < A \leqslant B$ tales que

$$A \leqslant \left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_i\right\} \leqslant B$$
$$A \leqslant \left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_i\right\} \leqslant B$$

   y eso es equivalente a que

$$A \leqslant \{\phi_i, \phi_i\}_{(T_1,T_2)\mu} \leqslant B$$

   sobre el conjunto $\mathbb{T}\times\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ (ya que el complemento tiene medida μ cero).

3. Marcos de Parseval

   También es similar al de las bases ortonormales, pero ahora tenemos que ahora cada función que aparece es una función característica en vez de valer 1 constantemente.

$$\left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_i\right\} = \chi_{A_{i0}}$$
$$\left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_i\right\} = \chi_{A_{i\frac{1}{2}}}$$

y eso es equivalente a que

$$\{\phi_i, \phi_i\}_{(T_1,T_2)\mu} = \chi_{A_{i0}\times\{0\}\cup A_{i\frac{1}{2}}\times\left\{\frac{1}{2}\right\}}$$

sobre el conjunto $\mathbb{T}\times\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ (ya que el complemento tiene medida μ cero.)

□

Las condiciones que aparecen en los Ítem 1 y Ítem 2 son idénticas a las caracterizaciones de bases ortonormales y base de Riesz que vimos en la Sección 9.1 cuando μ es la medida de Lebesgue normalizada. De manera que en cierto sentido logramos reconstruir esa caracterización con esta otra medida.

A partir de este resultado vamos a probar que un resultado análogo para las bases y marcos construidos de manera más directa a partir de los operadores elegidos inicialmente.

Definimos para este caso en particular

$$\begin{aligned}\dot{E}(\Phi) &= \left\{T_1^k\phi_i \text{ con } k\in\mathbb{Z},\, i=1,\ldots,n,\ldots\right\}\\ &\cup\left\{T_1^kT_2\phi_i \text{ con } k\in\mathbb{Z},\, i=1,\ldots,n,\ldots\right\}\end{aligned}$$

(con multiplicidad).

Proposición 13.2. *Para los $\mathcal{H}$, $\mathbf{T}$, μ que estamos utilizando, dada $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots)^t$ una sucesión (quizás finita) de pares de funciones en $L^2(\mathbb{R})\otimes L^2(\mathbb{R})$, entonces*

1. *$\dot{E}(\Phi)$ es una base ortonormal si y sólo si $\tilde{E}(\Phi)$ es una base ortonormal.*

2. *$\dot{E}(\Phi)$ es una base de Riesz si y sólo si $\dot{E}(\Phi)$ es una base de Riesz. Además tienen las mismas constantes.*

3. *$\dot{E}(\Phi)$ es un marco de Parseval si y sólo si $\dot{E}(\Phi)$ es un marco de Parseval. Además tienen las mismas constantes.*

Demostración. Tomemos la sucesión

$$\dot{\Psi} = (\phi_1, T_2\phi_1, \phi_2, T_2\phi_2, \ldots, \phi_k, T_2\phi_k, \ldots)^t$$

formada por los pares de funciones que aparecen en Φ y $T_2\Phi$.

Entonces $E_{T_1}\left(\dot{\Psi}\right) = \dot{E}_{(T_1,T_2)}(\Phi)$ (incluso teniendo en cuenta la multiplicidad). Lo bueno de esto es que en $E_{T_1}\left(\dot{\Psi}\right)$ aparece un solo operador y además tiene un producto en frecuencias en el que se puede usar la medida de Lebesgue normalizada. Además, es claro que $S_{(T_1,T_2)}(\Phi) = S_{T_1}\left(\dot{\Psi}\right)$.

Además $S_{(T_1,T_2)}(\Phi) = S_{T_1}\left(\tilde{\Psi}\right)$, como vimos en la Proposición 13.1, así que $S_{T_1}\left(\dot{\Psi}\right) = S_{T_1}\left(\tilde{\Psi}\right)$. O sea que los subespacios **T**-invariantes generados por $\tilde{\Psi}$ y $\dot{\Psi}$ son iguales.

1. Bases Ortonormales

   - Primero veamos que si $E_{T_1}\tilde{\Psi}$ es una base ortonormal entonces $E_{T_1}\dot{\Psi}$ es una base ortonormal
     Calculemos
     $$\begin{aligned}\left\{\phi_i, \phi_j\right\} &= \left\{\left(P_0 + P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_i, \left(P_0 + P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_j\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{2}\left(P_0 + P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_i, \sqrt{2}\left(P_0 + P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_j\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_j\right\} + \left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j\right\}\right.\\ &\quad \left.+ \left\{\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_j\right\} + \left\{\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j\right\}\right)\end{aligned}$$
     Como $E_{T_1}\tilde{\Psi}$ es una base ortonormal, entonces
     $$\left\{\phi_i, \phi_j\right\} = \frac{1}{2}\left(\delta_{i,j} + 0 + 0 + \delta_{ij}\right) = \delta_{ij}.$$
     De manera similar
     $$\begin{aligned}\left\{\phi_i, T_2\phi_j\right\} &= \left\{\left(P_0 + P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_i, \left(P_0 - P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_j\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{i,j} - 0 + 0 - \delta_{ij}\right) = 0\\ \left\{T_2\phi_i, \phi_j\right\} &= \left\{\left(P_0 - P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_i, \left(P_0 + P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_j\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{i,j} + 0 - 0 - \delta_{ij}\right) = 0\\ \left\{T_2\phi_i, T_2\phi_j\right\} &= \left\{\left(P_0 - P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_i, \left(P_0 - P_{\frac{1}{2}}\right)\phi_j\right\}\\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{i,j} - 0 - 0 + \delta_{ij}\right) = \delta_{ij}\end{aligned}$$

   - Ahora veamos que si $E_{T_1}\dot{\Psi}$ es una base ortonormal entonces $E_{T_1}\tilde{\Psi}$ es una base ortonormal

Calculemos

$$\begin{aligned}\left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_j\right\} &= 2\left\{\frac{\mathrm{Id}+T_2}{2}\phi_i, \frac{\mathrm{Id}+T_2}{2}\phi_j\right\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{(\mathrm{Id}+T_2)\,\phi_i, (\mathrm{Id}+T_2)\,\phi_j\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\left\{\phi_i, \phi_j\right\} + \left\{\phi_i, T_2\phi_j\right\}\right. \\ &\left.+ \left\{T_2\phi_i, \phi_j\right\} + \left\{T_2\phi_i, T_2\phi_j\right\}\right)\end{aligned}$$

Como $E_{T_1}\dot{\Psi}$ es una base ortonormal, entonces

$$\left\{\phi_i, \phi_j\right\} = \frac{1}{2}\left(\delta_{i,j} + 0 + 0 + \delta_{ij}\right) = \delta_{ij}.$$

De manera similar

$$\begin{aligned}\left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j\right\} &= \frac{1}{2}\left\{(\mathrm{Id}+T_2)\,\phi_i, (\mathrm{Id}-T_2)\,\phi_j\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{i,j} - 0 + 0 - \delta_{ij}\right) = 0 \\ \left\{\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i, \sqrt{2}P_0\phi_j\right\} &= \frac{1}{2}\left\{(\mathrm{Id}-T_2)\,\phi_i, (\mathrm{Id}+T_2)\,\phi_j\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{i,j} + 0 - 0 - \delta_{ij}\right) = 0 \\ \left\{\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j\right\} &= \frac{1}{2}\left\{(\mathrm{Id}-T_2)\,\phi_i, (\mathrm{Id}-T_2)\,\phi_j\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\delta_{i,j} - 0 - 0 + \delta_{ij}\right) = \delta_{ij}.\end{aligned}$$

2. Bases de Riesz

Consideremos el miembro central de la desigualdad que aparece en la Ecuación (2.6) y define a las bases de Riesz.

$$\sum_{\substack{j=1,2,\ldots,k,\ldots \\ \alpha\in\mathbb{Z}}} c_0^{\alpha,j}T_1^\alpha\sqrt{2}P_0\phi_j + c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}T_1^\alpha\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j.$$

Tomemos ahora una parte de la sumatoria de la forma $c_0^{\alpha,j}T_1^\alpha P_0\phi_i + c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}T_1^\alpha P_{\frac{1}{2}}\phi_i$ dejando fijo α, y expandamos los operadores

$$\begin{aligned}&c_0^{\alpha,j}T_1^\alpha\sqrt{2}P_0\phi_j + c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}T_1^\alpha\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j \\ &= c_0^{\alpha,j}T_1^\alpha\sqrt{2}\frac{\mathrm{Id}+T_2}{2}\phi_j + c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}T_1^\alpha\sqrt{2}\frac{\mathrm{Id}-T_2}{2}\phi_j \\ &= \frac{c_0^{\alpha,j} + c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}}{\sqrt{2}}T_1^\alpha\phi_j + \frac{c_0^{\alpha,j} - c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}}{\sqrt{2}}T_1^\alpha T_2\phi_j.\end{aligned}$$

De esta manera podemos reescribir la sumatoria como

$$\sum_{\substack{j=1,2,\ldots,k,\ldots\\ \alpha\in\mathbb{Z}}} d_{\mathrm{Id}}^{\alpha,j} T_1^{\alpha}\phi_j + d_{T_2}^{\alpha,j} T_1^{\alpha} T_2 \phi_j,$$

en donde los coeficientes $d_{\mathrm{Id}}^{\alpha,j}$ y $d_{T_2}^{\alpha,j}$ los calculamos con las fórmulas

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{Id}}^{\alpha,j} &= \frac{c_0^{\alpha,j} + c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}}{\sqrt{2}} \\ d_{T_2}^{\alpha,j} &= \frac{c_0^{\alpha,j} - c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

A partir de estos coeficientes podemos despejar $c_0^{\alpha,j}$ y $c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}$ de manera que

$$\begin{aligned} c_0^{\alpha,j} &= \frac{d_{\mathrm{Id}}^{\alpha,j} + d_{T_2}^{\alpha,j}}{\sqrt{2}} \\ c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j} &= \frac{d_{\mathrm{Id}}^{\alpha,j} - d_{T_2}^{\alpha,j}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Además

$$\left|d_{\mathrm{Id}}^{\alpha,j}\right|^2 + \left|d_{T_2}^{\alpha,j}\right|^2 = \left|c_0^{\alpha,j}\right|^2 + \left|c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}\right|^2,$$

así que

$$\|d\|_2^2 = \sum_{\alpha,j} \left|d_{\mathrm{Id}}^{\alpha,j}\right|^2 + \left|d_{T_2}^{\alpha,j}\right|^2 = \sum_{\alpha,j} \left|c_0^{\alpha,j}\right|^2 + \left|c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j}\right|^2 = \|c\|_2^2.$$

Por lo tanto al considerar sucesiones c y d con una cantidad finita de términos no nulos tenemos que las Ecuaciones

$$A\|c\|_2^2 \leqslant \sum_{\substack{j=1,2,\ldots,k,\ldots\\ \alpha\in\mathbb{Z}}} c_0^{\alpha,j} T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_0\phi_j + c_{\frac{1}{2}}^{\alpha,j} T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j \leqslant B\|c\|_2^2$$

y

$$A\|d\|_2^2 \leqslant \sum_{\substack{j=1,2,\ldots,k,\ldots\\ \alpha\in\mathbb{Z}}} d_{\mathrm{Id}}^{\alpha,j} T_1^{\alpha}\phi_j + d_{T_2}^{\alpha,j} T_1^{\alpha} T_2\phi_j \leqslant B\|d\|_2^2$$

son iguales miembro a miembro. Por ello las constantes $0 < A \leqslant B$ existen para una de ellas si y sólo si existen para la otra.

3. Marcos de Parseval

   Ahora consideremos el miembro central de la desigualdad que aparece en la Ecuación (2.11) y define a los Marcos.

$$\sum_{\substack{j=1,2,\ldots,k,\ldots\\ \alpha\in\mathbb{Z}}} \left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_0\phi_j\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j\right\rangle\right|^2.$$

   Tomemos una parte de la sumatoria de la forma

$$\left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_0\phi_j\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j\right\rangle\right|^2$$

   dejando fijo α. Al expandir los operadores, cada parte de la suma queda

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_{0ó\frac{1}{2}}\phi_j\right\rangle\right|^2 &= \left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\sqrt{2}\frac{\mathrm{Id}\pm T_2}{2}\phi_j\right\rangle\right|^2\\ &= \frac{1}{2}\left|\left\langle \varphi, (\mathrm{Id}\pm T_2)\,\phi_j^{\alpha}\right\rangle\right|^2,\end{aligned}$$

   en donde llamamos $\phi_j^{\alpha} = T_1^{\alpha}\phi_j$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \varphi, (\mathrm{Id}\pm T_2)\,\phi_j^{\alpha}\right\rangle\right|^2 &= \left\langle \varphi, (\mathrm{Id}\pm T_2)\,\phi_j^{\alpha}\right\rangle \left\langle (\mathrm{Id}\pm T_2)\,\phi_j^{\alpha}, \varphi\right\rangle\\ &= \left\langle \varphi, \phi_j^{\alpha}\right\rangle\left\langle \phi_j^{\alpha}, \varphi\right\rangle \pm \left\langle \varphi, \phi_j^{\alpha}\right\rangle\left\langle T_2\phi_j^{\alpha}, \varphi\right\rangle\\ &\pm \left\langle \varphi, T_2\phi_j^{\alpha}\right\rangle\left\langle \phi_j^{\alpha}, \varphi\right\rangle + \left\langle \varphi, T_2\phi_j^{\alpha}\right\rangle\left\langle T_2\phi_j^{\alpha}, \varphi\right\rangle\\ &= \left|\left\langle \varphi, \phi_j^{\alpha}\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \varphi, T_2\phi_j^{\alpha}\right\rangle\right|^2\\ &\pm \left(\left\langle \varphi, \phi_j^{\alpha}\right\rangle\left\langle T_2\phi_j^{\alpha}, \varphi\right\rangle + \left\langle \varphi, T_2\phi_j^{\alpha}\right\rangle\left\langle \phi_j^{\alpha}, \varphi\right\rangle\right).\end{aligned}$$

   Así que sumando los dos casos queda

$$\begin{aligned}\left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_0\phi_j\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j\right\rangle\right|^2 &= \frac{2}{2}\left(\left|\left\langle \varphi, \phi_j^{\alpha}\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \varphi, T_2\phi_j^{\alpha}\right\rangle\right|^2\right)\\ &= \left|\left\langle \varphi, \phi_j^{\alpha}\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \varphi, T_2\phi_j^{\alpha}\right\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

   Entonces

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{j=1,2,\ldots,k,\ldots\\ \alpha\in\mathbb{Z}}} \left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_0\phi_j\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_j\right\rangle\right|^2\\ &= \sum_{\substack{j=1,2,\ldots,k,\ldots\\ \alpha\in\mathbb{Z}}} \left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}\phi_j\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \varphi, T_1^{\alpha}T_2\phi_j\right\rangle\right|^2,\end{aligned}$$

y por ello las Ecuaciones

$$A\left\|\varphi\right\|^2 \leqslant \sum_{\substack{j=1,2,\ldots,k,\ldots \\ \alpha\in\mathbb{Z}}} \left|\left\langle \varphi, T_1^\alpha \sqrt{2} P_0 \phi_j \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \varphi, T_1^\alpha \sqrt{2} P_{\frac{1}{2}} \phi_j \right\rangle\right|^2 \leqslant B\left\|\varphi\right\|^2$$

y

$$A\left\|\varphi\right\|^2 \leqslant \sum_{\substack{j=1,2,\ldots,k,\ldots \\ \alpha\in\mathbb{Z}}} \left|\left\langle \varphi, T_1^\alpha \phi_j \right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle \varphi, T_1^\alpha T_2 \phi_j \right\rangle\right|^2 \leqslant B\left\|\varphi\right\|^2$$

son equivalentes miembro a miembro. Así que las constantes $0 < A \leqslant B$ existen para una de ellas si y sólo si existen para la otra.

$\square$

Combinando los dos resultados anteriores queda:

Corolario 13.3. *Para los $\mathcal{H}$, $\mathbf{T}$, μ que estamos utilizando, dada una sucesión $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n, \ldots)^t$ (quizás finita) de pares de funciones en $L^2(\mathbb{R}) \otimes L^2(\mathbb{R})$, entonces:*

1. *$\dot{E}(\Phi)$ es una base ortonormal si y sólo si $\{\Phi, \Phi\}_\mu(\omega) = \mathrm{Id}$ (p. p. ω).*

2. *$\dot{E}(\Phi)$ es una base de Riesz si y sólo si existen constantes $0 < A \leqslant B$ tales que $A\,\mathrm{Id} \leqslant \{\Phi, \Phi\}(\omega) \leqslant B\,\mathrm{Id}$ (p. p. ω).*

3. *$\dot{E}(\Phi)$ es un marco de Parseval si Φ es una sucesión μ-quasi-ortonormal.*

Así obtuvimos caracterizaciones para las bases ortonormales, de Riesz y una condición suficiente para los marcos de Parseval, al considerar el sistema formado por las traslaciones de Φ y $T_2\Phi$. Estas condiciones son análogas a las que obtuvimos cuando podíamos tomar a μ como la medida de Lebesgue y considerar todas las traslaciones $E_{(T_1,T_2)}(\Phi)$.

Sin embargo, la condición de que la sucesión $\dot{E}(\Phi)$ sea un marco de Parseval no implica que $\Phi \cup T_2\Phi$ sea una sucesión μ-quasi-ortonormal, ya que en general por más que $\left\{\sqrt{2}P_0\phi_i, \sqrt{2}P_{\frac{1}{2}}\phi_i\right\} = 0$ no se tendrá que $\{\phi_i, T_2\phi_i\} = 0$.

Las mismas ideas se pueden aplicar en el caso analizado en la Subsección 6.2.2 del operador de paridad. Incluso con la identidad, aunque es un ejemplo mucho menos interesante. En general se puede realizar una construcción similar si alguna potencia de alguno de los operadores es la identidad.

Sin embargo, no sirve todos los ejemplos. En la Sección 13.2 se analiza las funciones suya transformada de Fourier está en el conjunto de Cantor, considerado con la medida de Cantor. Las correspondientes sucesiones de traslaciones $E(\Phi)$ típicamente no tiene repeticiones y por ello no es posible restringirse a sólo algunos exponentes para lograr reconstruir los resultados que teníamos cuando podíamos utilizar la medida de Lebesgue normalizada.

13.3.3. Función dimensión y espectros

De manera similar a lo que hicimos para $L^2(\mathbb{R})$ en la Subsección 3.4.1, descomponemos a la recta $\mathbb{R}$ como

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right]$$

y tomamos las funciones

$$g_k = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} xk}\, \widehat{\chi_{\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} xk} \frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x},$$

cuyas traslaciones con α entero, forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

A partir de estas funciones definimos

$$\tilde{g}_k = (g_k, 0).$$

En ese caso tenemos que $\{T_1^\alpha \tilde{g}_k = (E^\alpha g_k, 0)/k, \alpha \in \mathbb{Z}\}$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}) \times \{0\}$ y que $\{T_1^\alpha T_2 \tilde{g}_k = (0, E^\alpha g_k)/k, \alpha \in \mathbb{Z}\}$. Así que los dos conjuntos son una base ortonormal de $S = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$. Además estos conjuntos están incluidos en $E_{T_1,T_2}(\{\tilde{g}_k/k \in \mathbb{Z}\})$, pero en este conjunto aparece repetidos y por ello no es una base ortonormal. Así que tenemos un sistema de generadores y lo podemos usar para calcular la dimensión.

Tenemos por la Ecuación (6.5) que

$$\begin{aligned}
\{\tilde{g}_k, \tilde{g}_j\}_{(T_1,T_2)} &= \{(g_k, 0), (g_j, 0)\} \\
&= \frac{1}{2}\{g_k + 0, g_j + 0\}_E(\omega_1)\,\delta_0(\omega_2) \\
&+ \frac{1}{2}\{g_k - 0, g_j - 0\}_E(\omega_1)\,\delta_{\frac{1}{2}}(\omega_2) \\
&= \{g_k, g_j\}_E \left(\frac{1}{2}(\omega_1)\,\delta_0(\omega_2) + \frac{1}{2}\delta_{\frac{1}{2}}(\omega_2)\right) = \{g_k, g_j\}_E\, \mu,
\end{aligned}$$

así que

$$\{\tilde{g}_k, \tilde{g}_j\}_{(T_1,T_2)\mu} = \{g_k, g_j\}_E.$$

Por la definición de las funciones g_k tenemos que

$$\{g_k, g_j\}_E = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = j \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases},$$

así que

$$\dim_{(T_1,T_2)} (S)_\mu = \infty.$$

Es importante recordar que la función dimensión está definida salvo un conjunto de medida μ cero, por ello podemos redefinirla en el conjunto $\mathbb{T} \times \left(\mathbb{T} \setminus \left\{0, \frac{1}{2}\right\}\right)$ de manera que queda

$$\dim_{(T_1,T_2)} (S)_\mu (\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad \omega_2 = 0 \text{ o } \omega_2 = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}.$$

Así que podemos calcular el espectro

$$\tilde{\sigma}_{(T_1,T_2)} (S)_\mu = \mathbb{T} \times \left\{0, \frac{1}{2}\right\},$$

o sea las dos copias del toro $\mathbb{T}$ que se obtienen al restringir $\omega_2 = 0$ y $\omega_2 = \frac{1}{2}$ (identificado con $-\frac{1}{2}$). (O tomando la imagen por z tenemos que $z(\tilde{\sigma}) = z(\mathbb{T}) \{1, -1\}$.) Nuevamente este conjunto está definido salvo un conjunto de medida μ cero, así que podríamos haberlo tomado como $\mathbb{T}^2$, pero $\mathbb{T} \times \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$ es un representante es más claro.

Para calcular el otro espectro, tenemos que el conjunto $z\left(\mathbb{T} \times \left\{0, \frac{1}{2}\right\}\right)$ es cerrado, así que $\overline{\tilde{\sigma}_{(T_1,T_2)} (S)_\mu}^{\text{ess}} \subset \tilde{\sigma}_{(T_1,T_2)} (S)_\mu$. La medida elegida μ estaba concentrada en dos copias del toro $\mathbb{T}$, correspondientes a $\omega_2 = 0$ y $\omega_2 = \frac{1}{2}$. Sobre cada copia, se tenía la medida de Lebesgue del segmento normalizada, de manera que si se considera un cerrado incluido en $z\left(\mathbb{T} \times \left\{0, \frac{1}{2}\right\}\right)$ y distinto, entonces se está eliminando un abierto de alguna de estas dos copias de $z(\mathbb{T})$, que son conjuntos de medida μ positiva. Por ello

$$\sigma_{(T_1,T_2)} (S) = z(\mathbb{T}) \{1, -1\}.$$

Este último espectro no depende de la medida elegida. Es más, está definido en forma única y no se lo puede reemplazar ni siquiera por otro conjunto que difiera en un conjunto de medida cero. Si hubiéramos usado para $\tilde{\sigma}(S)_\mu$ el representante $\mathbb{T}^2$, entonces al tomar la clausura esencial se tiene que $C = z\left(\mathbb{T} \times \left\{0, \frac{1}{2}\right\}\right)$ es un cerrado tal que $\mathbb{T}^2 \setminus C$ tiene medida cero, así que finalmente hubiéramos llegado al mismo conjunto para $\sigma_{(T_1,T_2)} (S)$.

Apéndices

Apéndice A

Módulos de Hilbert

La noción de módulo de Hilbert es una generalización de los espacios de Hilbert. La definición es idéntica, se tiene una suma, un producto por escalares y un producto interno. La diferencia es que los escalares en vez de ser números complejos son elementos de una $\mathbb{C}^*$-álgebra. En particular, nosotros utilizamos como $\mathbb{C}^*$-álgebra a las funciones borelianas y acotadas en $\mathbb{T}$ o $\mathbb{T}^n$. Vimos que varias de las propiedades que en un espacio de Hilbert son un número, en los módulos de Hilbert del tipo que consideramos son una función definida en $\mathbb{T}$ o $\mathbb{T}^n$. Por ejemplo, tenemos la dimensión y la función dimensión.

En lo que sigue, vamos a dar las definiciones completas de las $\mathbb{C}^*$-álgebras y los módulos de Hilbert. Para más información se puede consultar [Lan95].

En una $\mathbb{C}^*$-álgebra, además de las operaciones usuales de un álgebra, se tiene una norma que es compatible con la estructura del álgebra. Con el producto interno y la norma del álgebra se construye una norma para el módulo.

Definición A.1. Dada A un álgebra sobre $\mathbb{C}$ es una $\mathbb{C}^*$-álgebra si tiene una norma $\|n\|$ y una involución $*$ tales que:

La operación $*\colon A \to A$ es antilineal:

- $(\lambda m)^* = \overline{\lambda} m^*$
- $(m+n)^* = m^* + n^*$
- $(mn)^* = n^* m^*$

El cuadrado de la involución es la identidad:

- $m^{**} = m$

La norma es compatible con la involución y el producto:

- $\|m^*\| = \|m\|$
- $\|mm^*\| = \|m\| \, \|m^*\|$

Completitud:

- A es completa con la norma $|\ \|$

En todos los casos vamos a suponer que A tiene una unidad 1_A tal que $1_A m = m$ para todo m en A.

Todas estas son propiedades conocidas de $L^\infty(\mathbb{T}, \mu)$ y $L^\infty(\mathbb{T}, \mu)$, que son las $\mathbb{C}^*$-álgebra que utilizamos en este trabajo.

Utilizando las $\mathbb{C}^*$-álgebras vamos a definir los módulos de Hilbert.

Definición A.2. Decimos que M es un *módulo de Hilbert* sobre la $\mathbb{C}^*$-álgebra A si se tienen operaciones $\bullet$ y $\{\ ,\ \}$ tales que:

La suma $+\colon M \times M \to M$ hace que M sea un *grupo abeliano*:

- $(\psi + \phi) + \varphi = \psi + (\phi + \varphi)$
- $\psi + \phi = \phi + \psi$
- Existe un elemento 0 de M tal que $0 + \psi = \psi$
- Para todo ψ de M existe otro elemento ϕ de M tal que $\psi + \phi = 0$. La notación usual de ϕ es $-\psi$.

Se tiene un producto $\bullet\colon A \times M \to M$ compatible con el producto del álgebra A

- $(1_A \bullet \psi) = \psi$ en donde 1_A es la unidad de A
- $(m \bullet (n \bullet \psi)) = (mn) \bullet \psi$

El producto $\bullet$ es lineal en ambas variables

- $((m + n) \bullet \psi) = m \bullet \psi + n \bullet \psi$
- $(m \bullet (\psi + \phi)) = m \bullet \psi + m \bullet \phi$

Se tiene un producto interno $\{\ ,\ \} : M \times M \to A$ que es sesquilineal, o sea

- $\{\psi + \phi, \varphi\} = \{\psi, \varphi\} + \{\phi, \varphi\}$
- $\{m\psi, \phi\} = m\,\{\psi, \phi\}$ para todo m en A
- $\{\psi, \phi\} = \{\phi, \psi\}^*$
- $\{\psi, \psi\} \geqslant 0$ y $\{\psi, \psi\} = 0$ si y sólo si $\psi = 0$

Se define la norma $\|\psi\|_* = \sqrt{\|\{\psi, \psi\}\|}$ en donde se usa la norma $\|\ \|$ de A

- M es completo con la norma $\|\ \|_*$

En este trabajo consideramos a $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ como un módulo de Hilbert sobre $L^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$, como vimos en la Sección 2.3. De la misma manera, consideramos en el caso abstracto a un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en el que se habían elegido operadores $(T_1, \ldots, T_n)$ y una medida conveniente como un módulo de Hilbert sobre $L^\infty\left(\mathbb{T}^d\right)$, como vimos en la Sección 8.3.

La semejanza de estas estructuras con los espacios de Hilbert, nos permitió por ejemplo utilizar el análogo a Gram-Schmidt para construir bases ortonormales de traslaciones en $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ y $\mathcal{H}$, en el Teorema 2.3 y el Teorema 9.1 respectivamente.

Apéndice B

Compresión y procesamiento de señales

Para entender mejor la utilidad de los espacios invariantes por traslaciones de $L^2(\mathbb{R})$ y $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ vamos a ver como se aplican a la compresión de imágenes. Por razones de espacio, no discutiremos los múltiples detalles técnicos que aparecen en las aplicaciones específicas.

Veremos las propiedades de los algoritmos de compresión que se utilizan para datos en general. Luego veremos como se utilizan los espacios invariantes por traslaciones para adaptar estos algoritmos a la comprensión de imágenes. En particular, vamos a analizar por qué este enfoque es mejor que aplicarlos directamente.

Finalmente veremos otros esquemas similares en los que se utilizan los espacios invariantes por traslaciones para el procesamiento de señales.

B.1. Algoritmos de compresión genéricos

Existen varios algoritmos que sirven para comprimir datos. Uno de los más conocidos es el LZW [Wel84] que se utiliza por ejemplo en el programa WinZip y similares. Estos algoritmos comprimen *sin pérdida de información* o sea que al comprimir los datos iniciales y descomprimirlos posteriormente, se recupera una copia exacta de los datos originales.

El proceso que utilizan estos algoritmos es complicado. Aprovechan ciertas repeticiones que aparecen normalmente en los datos para poder realizar la compresión. No vamos a dar una descripción precisa del algoritmo, sólo vamos a destacar algunas de las propiedades de los archivos que se comprimen bien con estos algoritmos:

- Secuencias repetitivas de un mismo valor.

- Bloques de datos repetidos.
- Solamente se utilizan algunos de los valores permitidos.
- Algunos datos se repiten mucho y otros aparecen pocas veces.

Los archivos de texto tienen este tipo propiedades. A cada letra del abecedario y signo de puntuación le corresponde un número. En los archivos de textos en castellano estas propiedades aparecen como:

- Muchos espacios “   ” o guiones “------” consecutivos
- Hay palabras y frases que se repiten mucho “ de la ” o “ espacio vectorial ”. También partes de palabras o terminaciones como “mente ”.
- Solamente aparecen letras y números y algunos símbolos de puntuación. En castellano, no aparecen vocales con acentos raros como “è” ni “å”.
- Las vocales y el espacio aparecen muy seguido. En cambio la letra “w” muy pocas veces.

Los tipos de patrones que se encuentran en cada archivo varían mucho. En los casos de archivos de texto depende mucho de cuál es el idioma en que esté escrito. También si es un archivo de texto simple, o es una página web en html o un archivo de LaTeX. Sin embargo en todos estos tipos de archivos se encuentran patrones similares a los descriptos.

B.2. Archivos de imágenes fotográficas

En la computadora, se divide a la imagen en pequeños cuadraditos llamados *pixeles*. Cada pixel tiene un solo color. Si la imagen es en tonos de gris, se le puede asignar a cada pixel un número que indica la luminosidad. En las imágenes a color se asignan usualmente tres valores, que corresponden a los colores rojo, verde y azul. Al combinarlos en diferentes proporciones se obtienen los demás colores.

Las imágenes fotográficas son un caso especial. Veamos algunas propiedades:

- Salvo en las imágenes muy sencillas no hay bloques de colores repetidos.
- Se puede tolerar pequeños errores. Si el tono de gris de un pixel cambia un poco, las personas que lo observan no se dan cuenta.

- Los pixeles contiguos en general tienen colores parecidos.
- Es normal que haya bloques en degradé, en que el color va subiendo o bajando en forma pareja.
- Cada pixel tiene vecinos a derecha e izquierda, pero también arriba y abajo. Está tan relacionado con unos como con los otros.

En cambio, en un archivo de texto típico:

- Hay muchas repeticiones de las palabras.
- Un error que reemplaza una letra por otra no se puede tolerar y el cambio puede ser desastroso para el texto (por ejemplo "oro" y "oso").
- Las letras contiguas en general no tienen posiciones cercanas en el alfabeto.
- Es raro que aparezcan palabras largas con las letras en orden alfabético o antialfabético.
- La letra que está arriba o abajo de una determinada letra en general no está relacionada. En cambio las vecinas a derecha e izquierda sí. Por ejemplo después de una "q" casi seguro que viene una "u" y es muy probable que antes haya un espacio " ". Sin embargo las letras que aparecen arriba y abajo de la "q" no son fáciles de predecir.

B.3. Compresión de imágenes

Como vimos, los datos que componen una imagen tienen características especiales que difieren de las de los archivos de texto. Es conveniente aprovecharlas para que los algoritmos de compresión sean efectivos. En general, en vez de crear un nuevo tipo de algoritmo de compresión desde cero, se opta por preprocesar la información y después comprimirla con alguno de los algoritmos conocidos. Aprovechando la estructura de la imagen, primero se la transforma en una secuencia de datos más fácil de comprimir y después se la comprime con algún algoritmo como los que vimos anteriormente.

En todos estos pasos se considera a la imagen como una función, de manera que es posible escribirla como una suma de funciones elegidas convenientemente.

Los pasos centrales de varios algoritmos, por ejemplo JPEG y JPEG2000 de compresión de imágenes, se pueden esquematizar así:

1. Se elige una base de funciones.
2. Se calculan los coeficientes de la imagen utilizando esa base.
3. Se redondean los coeficientes.
4. Se comprimen utilizando algún algoritmo de compresión estándar (sin pérdida de información).

El primer paso se realiza en general al definir el algoritmo. Cada algoritmo tiene su propia elección de bases. La elección es complicada, e involucra equilibrar varias condiciones contradictorias.

Para el segundo paso es útil que la base elegida sea ortonormal, de manera que la transformación de imagen a coeficientes y la inversa sean rápidas. Como la condición de ortonormalidad es muy restrictiva, a veces se utilizan bases biortonormales o marcos ajustados, que permiten hacer la conversión entre funciones y coeficientes de la base de manera eficiente.

En el tercer paso, al redondear se pierde parte de la información. En una computadora los números se manejan con una cierta precisión (unos 15 dígitos), y por ello en general no es posible trabajar con los coeficientes en forma exacta. Además, si cada coeficiente se manejara utilizando la máxima precisión disponible, entonces los coeficientes ocuparían mucho lugar, por lo que se debe redondear y considerar sólo unos pocos dígitos (2 o 3 dígitos, a veces menos). Para descomprimir la imagen hay que realizar el algoritmo inverso, pero no es posible eliminar los efectos del redondeo. Por ello la imagen final que se obtiene no es la imagen original, sino una imagen muy parecida. Cuanto mayor sea el redondeo, más diferencias habrá entre la imagen original y la que se obtiene al descomprimir.

Una buena elección de la base original hace que los errores que introduce el redondeo pasen desapercibidos al ser observados por una persona. Por ejemplo, es útil que las funciones originales sean continuas. Usualmente las imágenes tienen bloques grandes en donde los colores varían en forma continua, correspondientes a los objetos, el cielo, paredes lisas, etcétera. Si se utilizan funciones discontinuas en la base y la discontinuidad está en una de estas zonas suaves, entonces el algoritmo debe combinar varias funciones discontinuas eligiendo los coeficientes de manera que su suma sea continua en esa zona de la imagen. Al redondearse los coeficientes, la nueva suma de funciones discontinuas en general ya no es continua. Esta discontinuidad en la función aparece en la nueva imagen como una discontinuidad de color, que es fácil de detectar por la vista.

También resulta útil que las funciones sean simétricas, para disimular mejor los errores. Además, si la base elegida está generada por las traslaciones de algunas funciones, los errores que aparecen están distribuidos en forma pareja en toda la imagen, y por ello se notan menos. Al mover una imagen seguimos obteniendo una imagen y por ello tiene sentido modelar a las imágenes por medio de un espacio invariante por traslaciones. Las bases que buscamos en este trabajo justamente son las que están formadas por las traslaciones de una o varias funciones iniciales.

En el cuarto paso se utilizan algoritmos de compresión sin pérdida de información como el LZW, o algún algoritmo similar. Eligiendo la base según lo discutido anteriormente se logra que haya algunos pocos coeficientes grandes y muchos coeficientes pequeños. Al aplicar el redondeo, los coeficientes pequeños se transforman en ceros. Así la información resultante tiene una gran cantidad de elementos repetidos y por ello el archivo comprimido es pequeño. También es importante el orden en se toman los elementos de la base. Si se eligen de manera que en la mayoría de las imágenes los coeficientes pequeños estén agrupados, se obtienen al redondear muchos ceros consecutivos que son aún más fáciles de comprimir. Los resultados de este proceso no siempre es tan ideales como los descriptos, pero de todas maneras usualmente se obtiene una serie de datos en donde hay muchos coeficientes pequeños y pocos grandes, que se puede comprimir bien.

En este paso es importante destacar que cuanto más grande es el redondeo, más ceros aparecen y más fácilmente se comprime la imagen. También aparecen menos valores distintos de coeficientes no nulos. Al aumentar el redondeo se mejora la posibilidad de comprimir la imagen y se obtienen archivos más pequeños. Pero al mismo tiempo la imagen final difiere más de la imagen original y se pierde calidad. Esta es una de las tantas condiciones contradictorias que se deben tener en cuenta al definir los algoritmos de compresión de imágenes.

B.4. Otros algoritmos similares

Hay muchos otros algoritmos que siguen el mismo esquema que los algoritmos de compresión de imágenes. Para procesamiento de señales se utilizan procesos similares, por ejemplo:

1. Se elige una base.

2. Se calculan los coeficientes de la señal utilizando esa base.

3. Se procesan los coeficientes.

4. A partir de los nuevos coeficientes de calcula la nueva señal.

En estos casos no se comprime y descomprime los datos, porque no es necesario trasferir o almacenar la información. Sin embargo, ése no era el paso que hacía que aparezcan diferencias entre la imagen inicial y la final. El paso en donde se producían los cambios era en el redondeo de los coeficientes. Para estas otras aplicaciones en vez de redondear los coeficientes se les aplica alguna transformación elegida convenientemente. Por ejemplo:

- Para eliminar ruido se transforman en cero los coeficientes pequeños.
- Para eliminar rayas de las imágenes se transforman en cero los coeficientes correspondientes a funciones de frecuencias altas.
- Para resaltar los borde se agrandan los coeficientes correspondientes a funciones de frecuencias altas.

En todos estos casos la elección de una buena base sigue siendo fundamental. Para que el proceso aplicado sea lo más uniforme posible sobre toda la imagen, es bueno que sea una base formada por las traslaciones de algunas funciones.

Bibliografía

[ACHMR04] A. Aldroubi, C. Cabrelli, D. Hardin , U. Molter and A. Rodado, *Determining sets of shift invariant spaces.* Proceedings of ICWA, Chennai, India, 2004.

[BDR94a] C. de Boor, R. A. DeVore, A. Ron, *The structure of finitely generated shift-invariant spaces in* $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$, J. Funct. Anal. **119** (1994), 37–78.

[BDR94b] C. de Boor, R. A. DeVore, A. Ron, *Approximation from shift-invariant subspaces of* $L_2\left(\mathbb{R}^d\right)$, Trans. Amer. Math. Soc. 341 (1994), 787–806.

[BK06] M. Bownik, N. Kaiblinger, *Minimal generator sets for finitely generated shift-invariant subspaces of* $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, J. Math. Anal. Appl. **313** (2006), 342–352.

[Bow00] M. Bownik, *The structure of shift-invariant subspaces of* $L^2\left(\mathbb{R}^n\right)$, Journal of Functional Analysis **176** (2000), 282–309.

[BRS01] M. Bownik, Z. Rzeszotnik, D. Speegle, *A characterization of dimension function of wavelets*, Appl. Comput. Harmonic Anal. **10**, 2001, 71–92.

[Con97] J. B. Conway, *A course in functional analysis*, 2nd ed. Springer-Verlag, (1997).

[Dau92] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.

[GLT93] T. N. T. Goodman, S. L. Lee, W. S. Tang, *Wavelets in wandering subspaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 639–654.

[HK92] K. Hoffman, R. Kunze, *Álgebra Lineal*, Prentice Hall, Mexico, 1992.

[HLPS99] D. Han, D. R. Larson, M. Papadakis, Th. Stavropoulos, *Multiresolution Analyses of abstract Hilbert spaces and wandering subspaces*, Cont. Math **247** (1999), 259–284.

[HL00] D. Han, D. R. Larson, *Frames, bases and group representations*, Memoirs Amer. Math. Soc. **147**, nr. 697 (2000)

[HL01] D. Han, D. R. Larson, *Wandering vectors multipliers for unitary groups,* Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001) 3347–3370.

[KF72] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*, Mir, Moscú, 1972.

[Lan95] E. C. Lance, *Hilbert C^*Modules: a toolkit for operator algebraists,* London Math. Soc. Lecture notes Ser. **210** (1995).

[Mal89] S. Mallat, *Multiresolution approximations and wavelets orthonormal bases of* $L^2(\mathbb{R})$, Trans. Amer. Math. Soc. **315** (1989), 69–87.

[Mas02] G. Massaccesi, Wavelets multidimensionales en espacios de Hilbert abstractos, Tesis de Licenciatura - Universidad de Buenos Aires (2002).

[Mey92] Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Pap03] M. Papadakis, *Generalized frame multiresolution analisys of abstract Hilbert spaces*, in Sampling, Wavelets and Tomography (J.J. Benedetto and A. Zayed, eds.), Birkhauser, 179–223, 2003.

[Rob65] J. B. Robertson, *On wandering subspaces for unitary operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **16** (1965), 233–236.

[RS80] M. Reed, B. Simon, *Functional Analysis (Methods of Modern Mathematical Physics Vol. I)*, Academic Press, 1980.

[RS95] A. Ron, Z. Shen, *Frame and stable bases for shift invariant subspaces of* $L_2(\mathbb{R}^d)$, Canad J. Math **47** (1995) 1051–1094.

[RS97] A. Ron, Z. Shen, *Weyl-Heisenberg frames and Riesz bases in* $L_2(\mathbb{R}^d)$, Duke Math. J. **89** (1997), no. 2, 237–282.

[Tan00] W. S. Tang, *Oblique projections, biorthonormal Riesz bases and multiwavelets in Hilbert spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000), 463–473

[Wel84] T. Welch, *A technique for high-performance data compression*, Computer. Vol. **17**, 8–19 (1984).

[Wil02] E. Wilson, *The algebra of shift invariant spaces and applications to wavelets*, Wavelets and Applications, Barcelona, (2002).

Director de tesis:

Doctorando: