UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática.

Tensores Naturales sobre Variedades y Fibraciones.

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias Matemáticas.

Guillermo Sebastián Henry

Director de tesis: Dr. Guillermo Keilhauer.

Buenos Aires, 2009.

Tensores Naturales sobre Variedades y Fibraciones.

(Resumen)

En este trabajo estudiamos los tensores de tipo (0,2). Con este objetivo introducimos y desarrollamos el concepto de *super espacio*. Con la ayuda de estos objetos definimos el concepto de λ-*naturalidad* sobre variedades y fibraciones. Esta nueva noción extiende, por fuera del enfoque clásico de la geometría natural, es decir sin hacer uso de la teoría de los invariantes diferenciales, el concepto de naturalidad de los casos conocidos. También estudiamos la geometría del espacio tangente dotado de una *métrica natural* y su relación con la geometría de la variedad base.

Palabras Claves: Conexiones Generales · Fibraciones · Métricas Naturales · Tensores Naturales · Variedades Riemannianas.

Natural Tensor Fields on Manifolds and Fibrations.

(Abstract)

This work is devoted to the study of tensor fields of type (0,2). With this purpose we introduce and develop the notion of *superspace*. With the help of these objects we define the concept of λ-*naturality* on manifolds and fibrations. This new notion generalizes the concept of naturality already known in some examples, without making use of the theory of differential invariants and of the classical point of view of natural geometry. Also, we study the geometry of the tangent bundle endowed with a *natural metric* and its relation with the geometry of the base manifold.

Key Words: Fibrations · General Connections · Natural Metrics · Natural Tensors Fields · Riemannian Manifolds.

Agradecimientos

Agradezco a mi Director Guillermo Keilhauer.

A mis viejos María Inés y José Juan y a mi hermana Gisela.

A mis abuelos, tíos y primos.

A Jorge, Diana y Mariano.

A mis amigos de la Comarca: Guillermo, Gonzalo, Nicolás, Gastón, Mago, Moye, Negro, Diego y Faro.

A mis amigos y compañeros de la facultad: Fer, Dano, Santiago L., Vendra, Santiago M., Del Pe, Rela, Caro, Damian, Sandra, Fede, Leandro, Seba, Patricia, Guillermina, Manuel, Agus, Leo, Yuri, Anibal ,Caro M., Vicky, Magui, Mariana, Gustavo, Ariel, al δ y a Cebollitas.

A Daniela por hacer los senderos, los días, el tiempo, la arquitectura donde habita la felicidad.

Índice

Introducción

En 1958 Sasaki [40], con la intención de estudiar la geometría del fibrado tangente TM de una variedad Riemanniana (M, g) construye una métrica sobre TM, que hoy se conoce con el nombre de *métrica de Sasaki*, basándose en la métrica de la variedad base. Desde entonces mucha gente ha estudiado esta métrica. Podemos mencionar a Kowalski [24], Aso [3], Musso y Tricerri [36], entre otros. La métrica de Sasaki posee propiedades muy interesantes, pero se vió que resultaba un tanto rígida. Por ejemplo, Musso y Tricerri probaron en [36] que si el fibrado tangente dotado con esta métrica posee curvatura seccional constante, entonces necesariamente debe ser plano. De todas formas, tal vez la propiedad más importante que posee la métrica de Sasaki sea la sencillez y naturalidad con la que es construída a partir de la métrica de la variedad base y de la conexión de Levi-Civita que esta induce.

En 1972 Cheeger y Gromoll [7], introducen una nueva métrica sobre TM que, al igual que la métrica de Sasaki, construyen a partir de g, utilizando las distribuciones horizontales y verticales que induce su conexión de Levi-Civita. La relación entre las geometrías de (M, g) y de TM dotado con esta métrica es menos rígida que con la métrica de Sasaki. El fibrado tangente de una variedad plana resulta plano si lo consideramos con la métrica de Sasaki. Sin embargo, Sekizawa [41] probó que si (M, g) es plana entonces TM dotado con la *métrica de Cheeger-Gromoll* tiene curvatura seccional no negativa, y además nunca es constante. Sekizawa [41], Musso y Tricerri [36], Gudmundsson y Kappos [15] son algunos entre muchos que han estudiado esta métrica.

Estas métricas son ejemplos de lo que en 1988 Kowalski y Sekizawa [25] llamaron *métricas naturales*. Más precisamente, estas son tensores de tipo $(0, 2)$ sobre el fibrado tangente (no necesariamente definidas positivas) que provienen por medio de un operador natural de orden 2 (ver el Apéndice) de una métrica Riemanniana de la variedad base. En [25], dada una métrica g sobre M se da una caracterización de las métricas naturales utilizando la teoría de los *invariantes diferenciales* que fue desarrollada por Krupka en [30]. Al interesado en la teoría de los invariantes diferenciales recomendamos ver [31] y [23]. Digamos brevemente en que consiste la caracterización dada en [25]. Sea G una métrica natural sobre TM en el sentido de Kowalski y Sekizawa, entonces existen ζ_1, ζ_2 y ζ_3 *F-métricas derivadas de* g (estos son morfismos $\zeta : TM \oplus TM \oplus TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ lineales en la segunda y tercera coordenada, ver el Apéndice) tal que $G = \zeta_1^{s,g} + \zeta_2^{h,g} + \zeta_3^{v,g}$, con ζ_1 y ζ_2 simétricas, donde $\zeta_1^{s,g}$, $\zeta_2^{h,g}$ y $\zeta_3^{v,g}$ son los clásicos levantamientos diagonal (también conocido como de Sasaki), horizontal y vertical de ζ_1, ζ_2 y ζ_3 respectivamente.

En la década de 1960, con el trabajo de Okubo [37], comienza el estudio de la geometría del fibrado de bases LM de una variedad Riemanniana (M, g). Basándose en la métrica de Sasaki, Mok [34] contruye una métrica Riemanniana sobre LM utilizando la distribución que induce la conexión de Levi-Civita de (M, g). Otro ejemplo que podemos mencionar, puede verse en los trabajos de Jensen [18] y O'Neill [38], donde se construye una métrica sobre un fibrado principal dotado de una conexión cuya base es una variedad Riemanniana. La métrica que introdujo Mok, llamada *métrica de Sasaki-Mok*, es la imagen de g por un operador natural de orden 2. Siguiendo la línea de [25], Kowalski y Sekizawa en [26] caracterizaron los tensores de tipo $(0, 2)$ sobre LM que son imagen por un operador natural de orden 2 de una métrica Riemanniana fija en la variedad base.

En 1998, Calvo y Keilhauer [6] mostraron que los tensores de tipo $(0, 2)$ sobre el fibrado tagente de una variedad Riemanniana admiten una representación matricial global. Haciendo uso de esta relación uno a uno entre los tensores y cierta familia de aplicaciones matriciales, definieron y caracterizaron lo que ellos llamaron *tensores naturales*. En el caso simétrico, la noción de tensor natural dada en [6] coincide con la dada por Kowalski y Sekizawa. En la misma dirección Keilhauer definió y caracterizó en [22] los tensores naturales en el fibrado de bases de una variedad Riemanniana y de una variedad dotada de una conexión afín. Los tensores naturales sobre el fibrado tangente y cotangente de una variedad semi-Riemanniana fueron caracterizados por Araujo y Keilhauer en [2]. La diferencia principal entre [2], [6] y [22] y los trabajos [25] y [26], es que los primeros no hacen uso de la teoría de invariantes diferenciales, sino que en cada situación se valen de un fibrado principal adecuado para poder identificar a los tensores como aplicaciones matriciales. Como consecuencia de este enfoque se puede arribar a los resultados de clasificación de una forma más sencilla que en [25] y [26].

Dicho esto, nos sale al paso la siguiente pregunta: ¿Podemos extender la noción de tensor natural, en el sentido de [6] y [22], a cualquier fibración o variedad? Uno de los objetivos de este trabajo es poder dar una respuesta a esta pregunta y este es el punto central del Capítulo 2. Cuando se aborda este punto se presentan algunas dificultades. Tal vez, la más importante de ellas sea que para definir la naturalidad en los casos conocidos se hace un uso muy fuerte del espacio donde habitan los tensores, ya sea este el fibrado tangente, el fibrado ortonormal de bases, el cotagente, etc. Para sortear esa dificultad, motivados por númerosos ejemplos, definimos y desarrollamos el concepto de *super espacio* que, conviene aclarar, no son aquellos objetos bien conocidos en la física matemática. Un super espacio λ sobre una variedad M es una colección $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ donde N es una variedad diferenciable, $\psi : N \longrightarrow M$ una submersión, O un grupo de Lie y R una acción a derecha de O sobre N que es transitiva en las fibras y que satisface que $\psi \circ R_a = \psi$ para todo $a \in O$ y $e_i : N \longrightarrow TM$, con $1 \leq i \leq n$, son funciones diferenciables tales que $\{e_1(z), \ldots, e_n(z)\}$ es base de $M_{\psi(z)}$ para todo $z \in N$.

Veremos que dado un super espacio λ sobre una variedad M, los tensores de tipo $(0, 2)$ están en relación biunívoca con cierta familia de aplicaciones matriciales diferenciables ${}^{\lambda}T : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ que cumplen una determinada propiedad de invarianza. Este hecho, es el que nos permitirá estudiar los tensores sobre una variedad o fibración, desde el punto de vista de la naturalidad, sin hacer uso de la teoría de los invariantes diferenciales. Daremos númerosos ejemplos de super espacios. Entre ellos, el más sencillo y elemental es el fibrado de bases LM. Este ejemplo es muy importante porque, como veremos, el concepto de super espacio resulta una generalización del fibrado de bases, además nos dice que todas las variedades admiten al menos un super espacio.

En el Capítulo 2, caracterizamos los super espacios cuyo grupo actua sin punto fijo. Estos resultan ser fibrados principales, pero cabe aclarar que no todos los super espacios lo son. Veremos propiedades generales de los super espacios, como por ejemplo la dimensión que debe tener la variedad espacio.

También en este Capítulo, definiremos el concepto de *morfismo de super espacios*, con lo cual tendremos una categoría. Mostraremos diversos resultados sobre hechos generales con respecto a la relación entre los morfismos de super espacio y los tensores sobre la variedad. Por ejemplo, si T es un tensor sobre M y $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ es un morfismo de super espacios, entonces ${}^{\lambda'}T \circ f$ es una aplicación matricial diferenciable, aunque no necesariamente corresponda o provenga de un tensor sobre M. Luego, caracterizaremos aquellos tensores que satisfacen que la aplicación ${}^{\lambda'}T \circ f$

corresponde a un tensor y también aquellos que resultan invariantes, es decir que ${}^{\lambda'}T \circ f$ sea el mismo tensor T.

Introduciremos la noción de *conexión de super espacios*, la cual coincide con la de O-conexión en el caso de que el super espacio se trate de un fibrado principal. Estudiaremos condiciones para que un super espacio dotado de una conexión resulte paralelizable.

Valiéndonos de los super espacios podemos definir satisfactoriamente el concepto de tensor $\lambda-$ *natural sobre una variedad* y el concepto de $\lambda-$ *natural con respecto a una fibración*, que generalizan los casos conocidos. Ahora, la naturalidad depende del super espacio. Cada super espacio pone de relieve una característica o propiedad geométrica distinta de la variedad o fibración, y es esperable que lo que nosotros llamemos *natural* guarde relación con estas. También, caracterizaremos los tensores naturales para distintos ejemplos (grupos de Lie, bundle metrics sobre fibrados principales, entre otros) y mostraremos las relaciones que existen entre estos y los morfismos de super espacios.

Finalmente, llegamos a una generalización del concepto de super espacio: el *atlas de super espacios*. Este concepto nos permitirá definir la $\mathcal{A}-naturalidad$ en su versión débil y en su versión fuerte. Con respecto a esto, daremos ejemplos y caratectizaremos a los tensores $\mathcal{A}-naturales$.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de las métricas naturales en el fibrado tangente de una variedad Riemanniana. Las *métricas naturales* que consideraremos son aquellas métricas Riemannianas sobre el fibrado tangente que provienen mediante un operador natural de segundo orden de la métrica de la variedad base (Existe un super espacio λ sobre TM de modo que estas métricas resultan λ-naturales). Además, pedimos que estas métricas hagan de la proyección canónica $\pi : (TM, G) \longrightarrow (M, g)$ una submersión Riemanniana y que el subespacio horizontal inducido por la conexión de Levi-Civita de (M, g) sea ortogonal al subespacio vertical. Ejemplos importantes y conocidos son las métricas de Sasaki y de Chegeer-Gromoll. En este Capítulo estudiaremos las relaciones entre la geometría de la variedad base (M, g) y la del fibrado tangente dotado con una de estas métricas (TM, G).

Primero calcularemos el tensor de curvatura (TM, G) en un base apropiada. Para esto, definiremos una métrica auxiliar G^* en la variedad $N = O(M) \times R^n$ (donde $O(M)$ es la variedad de bases ortonormales de (M, g)), que no es otra cosa que la variedad espacio de un importante super espacio, y encontraremos explícitamente un marco global de N. Calcularemos el tensor de curvatura de (N, G^*) en dicho marco y, por medio de la fórmula para submersiones Riemannianas de O' Neill [38], llegaremos a las expresiones de las ecuaciones de curvatura para (TM, G).

Una consecuencia inmediata del hecho de conocer las ecuaciones de curvatura de (TM, G), es que se aprecia la estrecha relación entre ambas geometrías, la del fibrado y la de la variedad base. Obtendremos expresiones para la curvatura seccional y escalar de (TM, G), que generalizan los resultados conocidos. Además exhibiremos resultados en este sentido para nuevos ejemplos, como es el caso de la *métrica exponencial*. Daremos cotas de la curvatura escalar de ciertas métricas naturales sobre TM.

También estudiaremos los fibrados tangentes planos. Es sabido que si (TM, G), con G métrica natural, es plano entonces necesariamente (M, g) es plana. La recíproca, si bien se cumple para la métrica de Sasaki, en general no es cierta. Por ejemplo, no vale para la métrica de Chegeer-Gromoll. Entre otras cosas, hallaremos la condición que debe satisfacer la métrica natural para que valga: (TM, G) plana si y sólo si (M, g) plana. Al final del Capítulo, estudiamos las curvaturas del fibrado unitario tangente y de los r-fibrados tangentes y mostramos algunos hechos que resultan de comparar las geodésicas de TM dotado con dos métricas naturales distintas.

Finalmente, en el Capítulo 4, mostramos ejemplos de levantamientos de métricas de la variedad base de un super espacio a su variedad espacio, uno de los cuales es la generalización de la métrica de Sasaki-Mok. Este aspecto de la teoría resulta interesante, ya que aplicando los métodos desarrollados en el Capítulo 3, se pueden obtener relaciones entre la geometrías de las variedades base y espacio de los super espacios.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Fibraciones.

Sea M una variedad diferenciable. Una *fibración* sobre M es un triplete $\alpha = (E, \pi, F)$, donde:

1. E y F son variedades diferenciables.
2. $\pi : E \longrightarrow M$ es una submersión, es decir es una aplicación suryectiva de diferencial suryectivo.
3. Para todo $x \in M$ existe un abierto U de M tal que $x \in U$ y un difeomorfismo $\tau : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{F}$ que preserva fibras (recordamos que las fibras de una submersión π son las subvariedades de E dadas por $\pi^{-1}(x)$ con x en M). Esta propiedad se conoce con el nombre de trivialidad local, y dice que una fibración se parece localmente a la variedad producto $M \times F$. De esta propiedad se deduce que $pr_1 \circ \tau = \pi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{F} \arrow[dl, "pr_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

En este caso decimos que la fibración *es de fibra* $\mathbb{F}$, y a M la llamamos *base* y a E *espacio* de la fibración. Los fibrados vectoriales son ejemplos de fibraciones. El fibrado tangente y cotangente son fibraciones cuya fibra es difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Otro ejemplo importante son los fibrados principales. Para consultar sobre fibraciones puede verse entre otros [9],[32] y [35].

1.2 Fibrados Principales.

Definición 1.1 *Sea M una variedad diferenciable. Un fibrado principal sobre M es una cuaterna $(P, \pi, G, \cdot)$ tal que:*

1. *(P, π, G) es una fibración sobre M cuya fibra es un grupo de Lie G.*
2. *La aplicación $(\ \cdot\ ) : P \times G \longrightarrow P$ es diferenciable y satisface que $\pi(p.a) = \pi(p)$ y $(p.a).b = p.(ab)$.*
3. *La función $\tau = (\pi, \phi)$ mencionada en el párrafo anterior satisface que $\phi(p.a) = \phi(p).a$ para todo $a \in G$.*

A la fibra G se la suele llamar grupo estructural del fibrado principal.

Observación 1.2 *De 3. es fácil ver que el grupo G actua sobre P sin punto fijo o libremente. Esto quiere decir que si para a en G existe algún p de modo que $p.a = p$, entonces a debe ser la unidad de G.*

Dado $a \in G$ se define un automorfismo $Ad(a) : G \longrightarrow G$ que se conoce con el nombre de aplicación adjunta y está dado por $Ad(a)(b) = a.b.a^{-1}$. Si notamos con e la unidad de G, tenemos que $Ad(a)(e) = e$ y por lo tanto, queda definido un isomorfismo lineal $\mathbf{ad}(a) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ dado por $\mathbf{ad}(a)(V) = Ad(a)_{*_e}(V)$. Este automorfismo del algebra de Lie de G también se lo suele llamar la aplicación adjunta. Las aplicaciones adjuntas cumplen entre otras cosas las siguientes propiedades: $Ad(a.c) = Ad(a) \circ Ad(c)$ y $\mathbf{ad}(a.c) = \mathbf{ad}(a) \circ \mathbf{ad}(c)$.

Más adelante será útil tener presente la definición de morfismo de fibrados principales. A saber:

Definición 1.3 *Sean $\alpha = (P, \pi, G, \cdot)$ y $\beta = (P', \pi', G', \cdot)$ dos fibrados principales sobre M. Decimos que (f, τ) es un morfismo entre α y β si $f : P \longrightarrow P'$ es una función diferenciable que cumple que $\pi = \pi' \circ f$ y $\tau : G \longrightarrow G'$ es un morfismo de grupos de Lie que satisface que $f(p.a) = f(p).\tau(a)$ para todo p en P y a en G.*

1.2.1 Conexiones en Fibrados Principales.

Sea G un grupo de Lie actuando a derecha sobre una variedad P. Si $\mathfrak{g}$ es el algebra de Lie de G, $p \in P$ y $V \in \mathfrak{g}$, sea $\sigma : \mathfrak{g} \longrightarrow \chi(M)$ definida por

$$\sigma(V)(p) = (\sigma_p)_{*_e}(V)$$

donde σ_p es la aplicación canónica, inducida por la acción del grupo de lie en la variedad (i.e. $\sigma_p(g) = p.g$). Si tenemos un fibrado principal $(P, \pi, G, \cdot)$ sobre M, en particular π es una submersión, llamamos subespacio vertical de π en p a $V_p = \ker \pi_{*_p}$. Notemos que en este caso la aplicación $(\sigma_p)_{*_e} : \mathfrak{g} \longrightarrow V_p$ es biyectiva. Para los algunos cálculos, conviene tener presente que $\sigma(V)(p) = D|_{t_0}(p. \exp(t.V))$, donde $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ es la función exponencial del grupo G.

Definición 1.4 *Sea $(P, \pi, G, \cdot)$ un fibrado principal sobre M. Una conexión (de Ehresmann) es una aplicación diferenciable $\omega : TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ que satisface:*

- *Si $\omega_p = \omega \mid_{P_p}$, $\omega_p : P_p \longrightarrow \mathfrak{g}$ es lineal.*
- $\omega(\sigma(V)(p)) = V$ *si* $V \in \mathfrak{g}$.
- $\omega((R_a)_{*_p}(Y)) = \mathbf{ad}(a^{-1})(\omega(Y))$ *para todo* $a \in G$, $Y \in P_p$

donde $R_a : P \longrightarrow P$ es la aplicación $R_a(p) = p.a$

Definición 1.5 *En la situación anterior, llamamos subespacio horizontal de ω en p al subespacio de P_p determinado por*

$$H_u = \ker(\omega_u)$$

Observación 1.6 *La dimensión del subespacio horizontal es la misma que la de la variedad base M.*

Proposición 1.7 *[42] Sea $(P, \pi, G, \cdot)$ un fibrado principal sobre M dotado de una conexión ω, tenemos que:*

- $P_p = H_p \oplus V_p$.
- $H_{p.a} = (R_a)_{*_p}(H_p)$, *para todo a en G y p en P.*

- *H es una distribución C^∞.*

Observación 1.8 *Del primer item se deduce que el rango de la distribución H es igual a la dimensión de M.*

Observación 1.9 *También vale la recíproca de la proposición anterior. Tener una conexión en un fibrado principal es equivalente a tener una distribución H que cumpla las propiedades de la proposición anterior.*

1.3 Función de Conexión.

En esta sección introducimos lo que se conoce como la función de conexión. Esta nos será de mucha utilidad, principalmente porque interviene en la construcción de varias estructuras geométricas que veremos en los siguientes capítulos.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y ∇ una conexión afín sobre M. Designamos con TTM al doble fibrado tangente de M. Si $p \in M$, $u \in M_p$ y U es un abierto de M al que pertenece p, notamos con $\chi_{p,u}(U) = \{X \in \ \chi(U) : \ X(p) = u\}$. Tenemos el siguiente Teorema cuya demostración puede verse en [14]:

Teorema 1.10 *Existe una única función $K : TTM \longrightarrow TM$ diferenciable que satisface:*

1. *Si $u \in \ TM$ y $\pi(u) = p$, donde $\pi : TM \longrightarrow M$ es la proyección canónica, entonces $K((TM)_u) \subseteq M_p$.*

2. *$K|_{(TM)_u} : (TM)_u \longrightarrow M_p$ es lineal .*

3. *Si $u \in TM$, $b \in (TM)_u$ y $b = X_{*_p}(v)$ donde $v \in M_p$ y $X \in \chi_{p,u}(M)$, entonces $K(b) = \nabla_v X$.*

Definición 1.11 *LLamamos a K función de conexión inducida por ∇.*

Veamos cual es la representación local que tiene la función de conexión. Sea $u \in M_p$ y una carta (U, x) que incluye a p, con $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Sea $(TU, \bar{x})$ la carta de TM inducida por esta. Para simplificar la notación escribamos $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ para $1 \leq i \leq n$

y $A_j = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}$ para $1 \leq j \leq 2n$. Si $u = \sum_{i=1}^{n} u_k X_k(p)$ e $Y = \sum_{i=1}^{n} \rho_k X_k$ y $v \in M_p$ se tiene que

$$\nabla_v Y = \sum_{k=1}^{n} \{v(\rho_k) + \sum_{i,j=1}^{n} v(x^i) u_k \Gamma_{ij}^k(p)\} X_k(p)$$

donde Γ_{ij}^k son los símbolos de Christofell de la conexión ∇ .

Si tomamos el campo Y con las funciones coordenas $\rho_k = u_k$ para todo k, entonces $Y_{*_p}(X_i(p)) = A_i(u)$ para $1 \leq i \leq n$. Luego,

$$K_u(A_i(u)) = \nabla_{X_i(p)} Y = \sum_{k=1}^{n} \{\sum_{j=1}^{n} u_k \Gamma_{ij}^k(p)\} X_k(p)$$

Por otro lado, si consideramos el campo Y cuyas funciones coordenadas son $\rho_k = x_k + u_k - x_k(p)$, tenemos que $Y_{*_p}(X_i(p)) = A_i(u) + A_{n+i}(u)$ para $1 \leq i \leq n$, con lo cual

$$K_u(A_i(u) + A_{n+i}(u)) = \nabla_{X_i(p)} Y = X_i(p) + \sum_{k=1}^{n} \{\sum_{j=1}^{n} u_k \Gamma_{ij}^k(p)\} X_k(p)$$

Por lo tanto, $K_u(A_{i+n}(u)) = X_i(p)$. De esto se deduce que si $b \in (TM)_u$ y $b = \sum_{i=1}^{n} b_i A_i(u) + \sum_{i=1}^{n} b_{n+i} A_{n+i}(u)$, la representacón local es de la función de conexión es

$$K(b) = \sum_{k=1}^{n} \{b_{n+k} + \sum_{i,j=1}^{n} b_i u_j \Gamma_{ij}^k(p)\} X_k(p)$$

1.3.1 Subespacio Horizontal y Vertical.

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n dotada de una conexión ∇. Sea $\pi : TM \longrightarrow M$ la proyección canónica y $K : TTM \longrightarrow M$ la función de conexión inducida por ∇. Si $u \in TM$ entonces, $\pi_{*_u} : (TM)_u \longrightarrow M_{\pi(u)}$ y $K_u : (TM)_u \longrightarrow M_{\pi(u)}$. Vamos a considerar

$$(TM)_u^v = \{b \in \ (TM)_u : \ \pi_{*_u}(b) = 0\} = Ker(\pi_{*_u})$$

que llamamos *subespacio vertical* y

$$(TM)_u^h = \{b \in \ (TM)_u : \ K_u(b) = 0\} = Ker(K_u)$$

que llamaremos *subespacio horizontal inducido por* ∇ *en* u. Cuando quede claro por el contexto simplemente lo llamaremos *subespacio horizontal en* u.

Sea $p \in (U,x)$ una carta de M y $(TU,\bar{x})$ la carta de TM inducida por esta. Si notamos los vectores tangentes inducidos por estas cartas como en la sección anterior, tenemos que $\pi_{*_u}(A_k(u)) = X_k(p)$ y $\pi_{*_u}(A_{n+k}(u)) = 0$ si $1 \leq k \leq n$. Luego, si $b \in (TM)_u$ y $b = \sum_{i=1}^{2n} b_i A_i(u)$ se tiene que $\pi_{*_u}(b) = \sum_{i=1}^{n} b_i X_i(\pi(u))$, de lo cual deducimos que $b \in (TM)_u^v$ si y sólo si $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Entonces, tenemos que $\{A_{n+1}(u), \ldots, A_{2n}(u)\}$ es una base de $(TM)_u^v$. Por otro lado, si $b \in (TM)_u^h$, esto es pedir que $K_u(b) = 0$, lo cual sucede si y sólo si $b_{n+k} = -\sum_{i,j=1}^{n} b_i u_j \Gamma_{ij}^k(\pi(u))$. Si consideramos los campos

$$H_i(u) = A_i(u) - \sum_{k=1}^{n}\{\sum_{j=1}^{n} \bar{x}^{n+j}(u)\Gamma_{ij}^k(\Pi(u))\}A_{k+n}(u)$$

para $i = 1, \cdots n$, es fácil verificar que $\{H_1(u), \ldots, H_n(u)\}$ es una base para $(TM)_u^h$.

Observación 1.12 *De lo anterior se ve sin dificultad que* $\dim((TM)_u^v) = dim((TM)_u^h) = n$ *y* $(TM)_u = (TM)_u^v \oplus (TM)_u^h$. *Sea* $\pi_* \times K : TTM \longrightarrow TM \times TM$ *la aplicación dada por* $(\pi_* \times K)(b) = (\pi_{*_u}(b), K_u(b))$ *para* $b \in (TM)_u$. *Podemos decir que si restringimos a una fibra la aplicación* $(\pi_* \times K)|_{(TM)_u} : (TM)_u \longrightarrow M_{\pi(u)} \times M_{\pi(u)}$ *es un isomorfismo lineal y se tiene que* $(\pi_* \times K)((TM)_u^h) = M_{\pi(u)} \times 0_p$ *y* $(\pi_* \times K)((TM)_u^v) = 0_p \times M_{\pi(u)}$.

Capítulo 2

Super Espacios

Los Tensores Naturales de tipo (0,2) sobre el fibrado tangente fueron introducidos por Kowalski y M. Sekizawa en 1988 [25]. En 1998, Calvo y Keilhauer [6], definieron y caracterizaron, utilizando sólo técnicas de la geometría Riemanniana, los Tensores Naturales de tipo (0,2) en el fibrado tangente de una variedad Riemanniana. Ejemplos de estos son las conocidas metricas de Sasaki y de Cheeger-Gromoll. En 2000, siguiendo la línea propuesta en [6], Araujo y Keilhauer [2], y Keilhauer [22], extendieron el concepto de tensor natural al fibrado tangente y cotangente de una variedad semi-Riemanniana y al fibrado de bases de una variedad. El objetivo principal de este capítulo es generalizar la noción de Tensor Natural a fibraciones y variedades en general. Con este fin, motivados por algunos ejemplos, introducimos el concepto de Super Espacio y estudiamos sus propiedades.

2.1 Fibrados Principales, Conexiones y Tensores.

Dado un fibrado principal $(P, \pi, G, \cdot)$ sobre una variedad M dotado de una conexión ω, veremos una construcción, que junto con otros ejemplos motivará la definición de super espacio. El objetivo es poder asociar a los tensores de tipo (0,2) sobre P una aplicación matricial global.

2.1.1 Aplicaciones de Referencia.

Dado un fibrado principal $(P, \pi, G, \cdot)$ sobre M con conexión ω en P, consideramos las aplicaciones $\tilde{\pi} : TP \longrightarrow TM$ y $\tilde{K} : TP \longrightarrow \mathfrak{g}$ dadas por

$$\tilde{\pi}(b) = \pi_{*_p}(b) \qquad p \in P \quad b \in P_p \tag{2.1}$$

$$\tilde{K}(b) = \omega_p(b) \qquad p \in P \quad b \in P_p \tag{2.2}$$

Notaremos con $\tilde{K}_p$ la restricción de $\tilde{K}$ a la fibra P_p y con $\tilde{\pi}_p$ la restricción de $\tilde{\pi}$ a P_p. Sin dificultad se puede verificar a partir de la definición de las aplicaciones $\tilde{\pi}$ y $\tilde{K}$ la siguiente proposición:

Proposición 2.1 *Si $H_p = \ker(\omega_p)$ es el subespacio horizontal y $V_p = \ker(\pi_{*_u})$ el vertical, entonces*

- $\tilde{\pi}_p : H_p \longrightarrow M_{\pi(p)}$ *es un isomorfismo lineal.*
- $\tilde{K}_p : V_p \longrightarrow \mathfrak{g}$ *es un isomorfismo lineal.*
- $V_p = \ker(\tilde{\pi}_p)$ *y* $H_p = \ker(\tilde{K}_p)$.
- $(\tilde{\pi}_p \times \tilde{K}_p) : P_p \longrightarrow M_{\pi(p)} \times \mathfrak{g}$ *es un isomorfismo lineal.*

Aplicaciones de Referencia:
Si $\dim M = n$ y $\dim(G) = k$ y $p \in P$ sean

$$e_i(p, u, w) = (\tilde{\pi}_p \times \tilde{K}_p)^{-1}(u_i, 0)$$

$$e_{n+j}(p, u, w) = (\tilde{\pi}_p \times \tilde{K}_p)^{-1}(0, w_j)$$

para $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq k$, donde $u = \{u_1, \cdots, u_n\}$ es una base de $M_{\pi(p)}$ y $w = \{w_1, \cdots, w_k\}$ es una base de $\mathfrak{g}$. Fácilmente se ve que $\{e_i(p, u, w), e_{n+j}(p, u, w)\}$ es una base de P_p, y que los vectores $\{e_i(p, u, w)\}_{i=1}^n$ generan el subespacio horizontal y $\{e_{n+j}(p, u, w)\}_{j=1}^k$ el vertical. Si notamos con $N_1 = \{(p, u) : p \in P \; y \; u \text{ base de } M_{\pi(p)}\}$ y con $L\mathfrak{g}$ el conjunto de bases de $\mathfrak{g}$, entonces quedan construídas las funciones diferenciables

$$e_i : N_1 \times L\mathfrak{g} \longrightarrow TP$$

y

$$e_{n+j} : N_1 \times L\mathfrak{g} \longrightarrow TP$$

que llamaremos la aplicaciones de referencia con respecto a $N_1 \times Ł\mathfrak{g}$.

Veamos la siguiente construcción. Consideremos la variedad $N = N_1 \times L\mathfrak{g}$ y la función diferenciable $\psi : N \longrightarrow P$ dada por $\psi(p,u,W) = p$. Claramente, ψ resulta una submersión. El grupo de Lie $O = GL(n) \times GL(k)$ actua por derecha sobre N mediante la acción:

$$R_{(a,\ b)}(p,u,w) = (p,u.a,w.b)$$

donde $u.a = (\sum_{i=1}^{n} u_i a_1^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} u_i a_n^i)$ para $a \in GL(n)$ y $w.b = (\sum_{l=1}^{k} w_l b_1^l, \ldots$ $\ldots, \sum_{l=1}^{k} w_l b_k^l)$ para $b \in GL(k)$. Conviene notar que la acción es transitiva en las fibras, es decir que dado (p,u,w) y (p,u',w') existe $(a,b) \in GL(n) \times GL(k)$ tal que $R_{(a,b)}(p,u,w) = (p,u',w')$. Tenemos la siguiente situación: $\psi \circ R = \psi$

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "R_{(a,b)}"] \arrow[d, "\psi"'] & N \arrow[dl, "\psi"] \\ P & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (p,u,w) \arrow[r, "R_{(a,b)}"] \arrow[d, "\psi"'] & (p,ua,wb) \arrow[dl, "\psi"] \\ p & \end{tikzcd}$$

Las aplicaciones $e_i,\ e_{n+j} : N \longrightarrow TP$ se comportan con respecto a la acción de la siguiente manera:

$$e_i \circ R_{(a,b)}(p,u,w) = \sum_{l=1}^{n} a_i^l e_l(p,u,w). \tag{2.3}$$

$$e_{n+j} \circ R_{(a,b)}(p,u,w) = \sum_{l=1}^{k} b_j^l e_{n+l}(p,u,w). \tag{2.4}$$

Esto es porque $e_i(p,u.a,w.b) = (\tilde{\pi}_p \times \tilde{K}_p)^{-1}((u.a)_i,0) = (\tilde{\pi}_p \times \tilde{K}_p)^{-1}(\sum_{l=1}^{n} a_i^l.u_l,0)$ $= \sum_{l=1^n} a_i^l(\tilde{\pi}_p \times \tilde{K}_p)^{-1}(u_l,0) = \sum_{l=1}^{n} a_i^l e_l(p,u,w)$. De la misma manera se ve (2.4).

Campos y Tensores:

Sea X un campo tangente de P. Como $\{e_i(p,u,w), e_{n+j}(p,u,w)\}$ es una base de P_p podemos escribir $X(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i^\omega(p,u,w)e_i(p,u,w) + \sum_{j=1}^{k} x_{n+j}^\omega(p,u,w)e_{n+j}(p,u,w)$.

Por lo tanto, un campo X induce una aplicación diferenciable ${}^{\omega}X : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ dada por

$$ {}^{\omega}X(p,u,w) = x_1^{\omega}(p,u,w), \ldots, x_n^{\omega}(p,u,w), x_{n+1}^{\omega}(p,u,w), \ldots, x_{n+k}^{\omega}(p,u,w). $$

Como $\sum_{i=1}^{n} x_i^{\omega}(p,u,w)e_i(p,u,w) + \sum_{j=1}^{k} x_{n+j}^{\omega}(p,u,w)e_{n+j}(p,u,w) = X(p) =$ $= \sum_{r=1}^{n} x_r^{\omega}(p,u.a,w.b)e_r(p,u.a,w.b) + \sum_{s=1}^{k} x_{n+s}^{\omega}(p,u.a,w.b)e_{n+s}(p,u.a,w.b)$, utilizando (2.3) y (2.4), se ve fácilmente que $x_i^{\omega}(p,u,w) = \sum_{r=1}^{n} x_r^{\omega}(p,u.a,w.b)a_r^i$ y $x_{n+j}^{\omega}(p,u,w) =$ $= \sum_{s=1}^{k} x_{n+s}^{\omega}(p,u.a,w.b)b_s^j$, con lo cual tenemos que la aplicación ${}^{\omega}X$ inducida por el campo X se comporta con respecto a la acción R como sigue :

$$ {}^{\omega}X \circ R_{(a,b)} =^{\omega} X. \begin{pmatrix} (a^{-1})^t & 0 \\ 0 & (b^{-1})^t \end{pmatrix}. \tag{2.5} $$

Proposición 2.2 *Existe una correspondencia biunívoca entre los tensores de tipo (0,2) sobre P y las aplicaciones diferenciables $T : N \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$ donde $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_4 & T_3 \end{pmatrix}$ con $T_1 : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, $T_2 : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times k}$, $T_3 : N \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k}$, $T_4 : N \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times n}$, que satisfacen*

- $T_1 \circ R_{(a,b)} = a^t.T_1.a$
- $T_2 \circ R_{(a,b)} = a^t.T_2.b$
- $T_3 \circ R_{(a,b)} = b^t.T_3.b$
- $T_4 \circ R_{(a,b)} = b^t.T_4.a$

Demostración: Dado F un tensor de tipo (0,2) sobre P sea ${}^{\omega}F : N \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$ la aplicación matricial inducida por F que esta dada por: ${}^{\omega}F(p,u,w)$ es la matriz de $F(p)$ en la base $\{e_i(p,u,w), e_{n+j}(p,u,w)\}$. Se ve sin dificultad que ${}^{\omega}F$ cumple las propiedades enunciadas en la proposición. La aplicación $(F \longrightarrow^{\omega} F)$ resultará biunívoca entre los tensores de tipo (0,2) sobre M y la aplicaciones matriciales diferenciables con la propiedades de invarianza antes mencionadas. Para probar esto es necesario utilizar que el grupo O actua transitivamente en las fibras de N y que ψ es una submersión.

□

2.1.2 Ejemplos Adicionales.

En el párrafo anterior vimos que los tensores de tipo (0,2) sobre espacio de un fibrado principal dotado de una conexión los podemos ver como aplicaciones matriciales que cumplen ciertas condiciones de invarianza. Veamos que introduciendo algunas variantes en la construcción hecha anteriormente obtenemos nuevos ejemplos en los que pasa lo mismo.

Supongamos que la variedad base M del fibrado principal $(P, \pi, G, \cdot)$ está dotada de una métrica Riemmanniana. Definimos la variedad $N_2 = \{(p, u) : p \in P,\ u$ es una base ortonormal de $M_{\pi(p)}\}$.

Ejemplo 2.3 (N=N$_2\times$ L($\mathfrak{g}$)): *Sean*

- *La variedad* $N = N_2 \times L(\mathfrak{g})$.
- *La submersión* $\psi : N \longrightarrow P$ *dada por* $\psi(p, u, w) = p$.
- *El grupo de Lie* $O = O(n) \times GL(k)$ *y la acción a derecha sobre* N *dada por* $R_{(a,b)}(p, u, w) = (p, u.a, w.b)$, *donde* $u.a$ *y* $w.b$ *se definen como en el caso anterior.*
- $$e_i(p, u, w) = (\tilde{\pi}_p \times \tilde{K}_p)^{-1}(u_i, 0)$$
  $$e_{n+j}(p, u, w) = (\tilde{\pi}_p \times \tilde{K}_p)^{-1}(0, w_j).$$

Las aplicaciones $\{e_i, e_{n+j}\}$ *y las aplicaciones inducidas por campos y tensores se comportan igual que el caso anterior. La diferencia es que, como el grupo actuante es* $O(n) \times GL(k)$, *tenemos*

$$^{\omega}X \circ R_{(a,b)} =^{\omega} X. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (b^{-1})^t \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.4 (N=N$_2$× L($\mathfrak{g}$)×G): *Sean*

- *La variedad* $N = N_2 \times L(\mathfrak{g}) \times G$.
- *La aplicación diferenciable* $\psi : N \longrightarrow P$, *inducida por la acción del grupo estructural del fibrado principal, dada por* $\psi(p, u, w, g) = p.g$. *La aplicación* ψ *es una submersión.*
- *El grupo de Lie* $O = O(n) \times GL(k) \times G$ *y su acción a derecha sobre* N *determinada por* $R_{(a,b,h)}(p, u, w, g) = (p.h, u.a, w.b, h^{-1}.g)$, *donde* $u.a$ *para* $a \in O(n)$ *y* $w.b$ *para* $b \in GL(k)$ *se definen como los casos anteriores y* $p.h$ *es la acción del grupo de* G *sobre* P. *Esta acción resulta transitiva en las fibras de* N.
- *Definimos las aplicaciones de referencia con respecto a* N *como:*

$$e_i(p, u, w, g) = (\tilde{\pi}_{p.g} \times \tilde{K}_{p.g})^{-1}(u_i, 0)$$
$$e_{n+j}(p, u, w, g) = (\tilde{\pi}_{p.g} \times \tilde{K}_{p.g})^{-1}(0, w_j).$$

Tenemos la siguiente situación: $\psi \circ R = \psi$

$$\begin{tikzcd}
(p,u,w,g) \arrow[r, "R_{(a,b,h)}"] \arrow[d, "\psi"'] & (ph, ua, wb, h^{-1}g) \arrow[dl, "ph.h^{-1}g=pg"] \\
pg &
\end{tikzcd}$$

Las aplicaciones e_i, $e_{n+j} : N \longrightarrow TP$ *se comportan con respecto a la acción de la siguiente manera:*

$$e_i \circ R_{(a,b,h)} = \sum_{l=1}^{n} a_i^l e_l$$

$$e_{n+j} \circ R_{(a,b,h)} = \sum_{l=1}^{k} b_j^l e_{n+l}$$

Campos y Tensores:

Un campo tangente X *sobre* P *puede escribirse de la siguiente manera* $X(pg) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\omega}(p, u, w, g) e_i(p, u, w, g) + \sum_{j=1}^{k} x_{n+j}^{\omega}(p, u, w, g) e_{n+j}(p, u, w, g)$. *Por lo tanto, un campo* X *induce una aplicación diferenciable* ${}^{\omega}X : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ *dada por*

$$^{\omega}X(p,u,w,g) = x_1^{\omega}(p,u,w,g),\ldots,x_n^{\omega}(p,u,w,g),x_{n+1}^{\omega}(p,u,w,g),\ldots,x_{n+k}^{\omega}(p,u,w,g)$$

La aplicación $^{\omega}X$ *inducida por el campo* X *se comporta con respecto a la acción* R *como sigue:*

$$^{\omega}X \circ R_{(a,b,h)} = ^{\omega} X. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & (b^{-1})^t \end{pmatrix}$$

Proposición 2.5 *Existe una correspondencia biunívoca entre los tensores de tipo (0,2) de* P *y las aplicaciones diferenciables* $T : N \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$ *donde* $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_4 & T_3 \end{pmatrix}$ *con* $T_1 : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$*,* $T_2 N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times k}$*,* $T_3 : N \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k}$*,* $T_4 : N \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times n}$*, que satisfacen*

- $T_1 \circ R_{(a,b,h)} = a^t.T_1.a$
- $T_2 \circ R_{(a,b,h)} = a^t.T_2.b$
- $T_3 \circ R_{(a,b,h)} = b^t.T_3.b$
- $T_4 \circ R_{(a,b,h)} = b^t.T_4.a$

Demostración: *Es similar a la demostración de la Proposición 2.2. Aquí la aplicación matricial inducida por un tensor* F *sobre* P *esta dada por:* $^{\omega}F(p,u,w,g)$ *es la matriz de de* $F(pg)$ *en la base* $\{e_i(p,u,w,g), e_{n+j}(p,u,w,g)\}$*.*

□

Observación 2.6 *Sea* F *un tensor sobre* P*. Entonces* $^{\omega}F$ *depende sólo del parámetro del grupo de Lie* G *si y sólo si existe* $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *diferenciable tal que*

$$^{\omega}F(p,u,w,g) = \begin{pmatrix} f(g).Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observación 2.7 *Tenemos una construcción análoga tomando* $N = N_1 \times L(\mathfrak{g}) \times G$*, donde el grupo que actua es* $O = GL(n) \times GL(k) \times G$*. En este caso el único tensor, tal que su aplicación matricial inducida depende sólo del parámetro del grupo de Lie* G*, es el tensor nulo.*

Ejemplo 2.8 (N=N$_2$× O($\mathfrak{g}$)×G): *Si $\mathfrak{g}$ está dotado de una métrica Euclídea, notamos con $O(\mathfrak{g})$ el conjunto de bases ortonormales de $\mathfrak{g}$, es decir, $O(\mathfrak{g}) = \{(w_1, \ldots, w_k)$ b.o.n de $\mathfrak{g}\}$. Sean*

- *La variedad $N = N_2 \times O(\mathfrak{g}) \times G$.*
- *La submersión $\psi : N \longrightarrow P$ dada por $\psi(p, u, w, g) = p.g$.*
- *El grupo de Lie $O = O(n) \times O(k) \times G$ y su acción a derecha sobre N*

  $R_{(a,b,h)}(p, u, w, g) = (p.h, u.a, w.b, h^{-1}.g)$, donde $u.a$, $w.b$ y $p.h$ se definen como en los casos anteriores. La acción resulta transitiva en las fibras y sin punto fijo.
- *Las aplicaciones de referencia se definen como:*

$$e_i(p, u, w, g) = (\tilde{\pi}_{p.g} \times \tilde{K}_{p.g})^{-1}(u_i, 0)$$
$$e_{n+j}(p, u, w, g) = (\tilde{\pi}_{p.g} \times \tilde{K}_{p.g})^{-1}(0, w_j).$$

Observación 2.9 *Las aplicaciones de referencia, los campos y tensores se comportan igual al caso anterior. En este caso el grupo actuante es $O(n) \times O(k) \times G$, por eso tenemos que*

$$^{\omega}X \circ R_{(a,b,h)} =^{\omega} X. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

Observación 2.10 *Sea F tensor sobre P. Entonces $^{\omega}F$ depende sólo del parámetro del grupo de Lie G si y sólo si existen $f_1 : G \longrightarrow \mathbb{R}$ y $f_3 : G \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciables tal que*

$$^{\omega}F(p, u, w, g) = \begin{pmatrix} f_1(g).Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & f_3(g).Id_{k\times k} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2.11 (N=N$_2$× G): *Fijada una base $W = (W_1, \ldots, W_2)$ de $\mathfrak{g}$ sean $N = N_2 \times G$, $\psi(p, u, g) = pg$, $O = O(n) \times G$ y la acción $R_{(a,h)}(p, u, g) = (ph, u.a, h^{-1}g)$. Las aplicaciones de referencia $\{e_i\}_{i=1}^k : N \longrightarrow TP$ y $\{^We_{n+j}\}_{j=1}^k : N \longrightarrow TP$ están dadas por $e_i(p, u, g) = (\tilde{\pi}_{p.g} \times \tilde{K}_{p.g})^{-1}(u_i, 0)$ y por $^We_{n+j}(p, u, g) = (\tilde{\pi}_{p.g} \times \tilde{K}_{p.g})^{-1}(0, W_j)$.*

Componiendo las aplicaciones e_i, ${}^W e_{n+j}$ *con la acción* R *tenemos que*

$e_i \circ R_{(a,h)} = \sum_{l=1}^{n} a_i^l e_l$ *y* ${}^W e_{n+j} \circ R_{(a,h)} = {}^W e_{n+j}$ *para* $1 \leq i \leq n$ *y* $1 \leq j \leq k$. *O sea,*

$$\{e_i, {}^W e_{n+j}\} \circ R_{(a,h)} = \{e_i, {}^W e_{n+j}\}. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & Id_{k\times k} \end{pmatrix}$$

Campos y Tensores.

En esta contrucción, al igual que en las anteriores, los campos tangentes sobre P *inducen aplicaciones diferenciables de* N *en* $\mathbb{R}^{n+k}$. *La manera de construir* ${}^{\omega,W}X$ *es similar y se basa en la escritura que tiene el campo* X *con respecto a las aplicaciones* e_i, ${}^W e_{n+j}$. ${}^{(\omega,W)}X$ *se comporta con respecto a la acción del siguiente modo:*

$${}^{(\omega,W)}X \circ R_{(a,h)} = {}^{(\omega,W)} X. \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & Id_{k\times k} \end{pmatrix}.$$

Proposición 2.12 *Los tensores de tipo (0,2) sobre* P *están en correspondencia biunívoca con las aplicaciones diferenciables* $T : N \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$ *donde* $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_4 & T_3 \end{pmatrix}$ *con* $T_1 : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$, $T_2 N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times k}$,$T_3 : N \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k}$, $T_4 : N \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times n}$, *que satisfacen*

- $T_1 \circ R_{(a,h)} = a^t.T_1.a$
- $T_2 \circ R_{(a,h)} = a^t.T_2$
- $T_3 \circ R_{(a,h)} = T_3$
- $T_4 \circ R_{(a,h)} = T_4.a$

Demostración: *Sea* F *un tensor de tipo* $(0,2)$ *sobre* P, *entonces si* ${}^{(\omega,W)}F(p,u,g)$ *es la matriz de* $F(pg)$ *en la base* $\{e_i(p,u,w,g), {}^W e_{n+j}(p,u,w,g)\}$, ${}^{(\omega,W)}F : N \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$ *es una aplicación matricial con las propiedades mencionadas en la proposición. No es difícil ver que esta asignación en biunívoca.*

□

Observación 2.13 *Sea* F *un tensor de tipo (0,2) sobre* P. ${}^{(\omega,W)}F$ *depende sólo del parámetro del grupo de Lie* G *si y sólo si existen* f_1 *y* $\{f_3^{rs}\}_{1\leq r,s\leq k}$ *funciones diferenciables de* G *en* $\mathbb{R}$ *tal que*

$${}^{(\omega,W)}F(p,u,g) = \begin{pmatrix} f_1(g).Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & f_3^{ij}(g) \end{pmatrix}$$

Observación 2.14 *Por cada elección de una base de $\mathfrak{g}$ tenemos un sistema distinto. Si $W = \{W_1, \ldots, W_k\}$ y $\tilde{W} = \{\tilde{W}_1, \ldots, \tilde{W}_k\}$ son bases de $\mathfrak{g}$, sean $(N, \psi, O, , R, \{e_i {}^W e_{n+j}\}\ )$ y $(N, \psi, O, R, \{e_i, {}^{\tilde{W}} e_{n+j}\}\ )$ los sistemas que inducen W y $\tilde{W}$ respectivamente. Sea $b \in GL(k)$ tal que $\tilde{W} = W.b$. Luego, tenemos que*

$$^{\tilde{W}}\{e_{n+j}(p, u, g)\} =^W \{e_{n+l}(p, u, g)\}.b \quad para\ 1 \leq j \leq k.$$

Si F es un tensor sobre P y $^{(\omega,W)}F$ y $^{(\omega,\tilde{W})}F$ son las aplicaciones matriciales inducidas, entonces estas se relacionan por

$$^{\tilde{W}}F(p, u, g) = \begin{pmatrix} Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & b^t \end{pmatrix} .{}^W F(p, u, g). \begin{pmatrix} Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

2.2 Super Espacios.

Definición 2.15 *Sea M una variedad diferenciable de dimensión n. LLamamos super espacio de M a una colección $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ donde*

1. *N variedad diferenciable.*
2. *$\psi : N \longrightarrow M$ una submersión.*
3. *O un grupo de Lie y R una acción a derecha de O sobre N que es transitiva en las fibras y que cumple que $\psi \circ R_a = \psi$ para todo $a \in O$.*
4. *$e_i : N \longrightarrow TM$, con $1 \leq i \leq n$, funciones diferenciables tal que $\{e_1(z), \ldots, , e_n(z)\}$ es base de $M_{\psi(z)}$ para todo $z \in N$.*

Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "R_a"] \arrow[dr, "\psi"'] & N \arrow[r, "\{e_i\}"] \arrow[d, "\psi"] & TM \arrow[dl, "\pi"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Cambio de Bases.

En lo que sigue, a menos que se diga lo contrario M será una variedad diferenciable de dimensión n y G un grupo de Lie de dimensión k.

Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M. Si $\psi(z) = p$, como $\psi(z.a) = p$ para todo $a \in O$, $\{e_1(z), \ldots, e_n(z)\}$ y $\{e_1(z.a), \ldots, e_n(z.a)\}$ son bases de M_p. Luego, existe $A \in GL(n)$ tal que $\{e_i(z.a)\} = \{e_i(z)\}.A$, es decir $e_i(z.a) = \sum_{l=1}^{n} A_i^l e_l(z)$ para $1 \leq i \leq n$. Del mismo modo, si $\bar{p}$ es un punto de M diferente de p y $\bar{z} \in N$ es tal que $\psi(\bar{z}) = \bar{p}$, $\{e_i(\bar{z}.a)\}$ y $\{e_i(\bar{z})\}$ son bases de $M_{\bar{p}=\psi(\bar{z})}$ y existe $\bar{A} \in Gl(n)$ que satisface $\{e_i(\bar{z}.a)\} = \{e_i(\bar{z})\}.\bar{A}$. Si el cambio de base no depende de la fibra (i.e. $A = \bar{A}$) y sólo depende de la acción del grupo O tenemos una aplicación diferenciable

$$L : O \longrightarrow GL(n) \quad \text{de modo que} \quad \{e_i\} \circ R_a = \{e_i\}.L(a)$$

En este caso diremos que el super espacio λ tiene un *cambio de base rígido*. A la aplicación L la llamaremos *morfismo de cambio de base* (ver la Observación 2.16). En el caso que el morfismo de cambio de base depende del grupo O y también de la fibra, entonces $L : O \times E \longrightarrow GL(n)$ es una función diferenciable y

$$\{e_i(z.a)\} \circ R_a = \{e_i(z)\}.L(a, \psi(z)).$$

En este caso lo llamaremos *cambio de base no rígido.* De ahora en adelante, a menos que se diga lo contrario, consideraremos super espacios con *cambio de base rígido* .

Observación 2.16 *La aplicación $L : O \longrightarrow GL(n)$ definida anteriormente es un morfismo de grupos. Pues como $\{e_i(z.e)\} = \{e_i(z)\}$ entonces $L(e) = Id_{n\times n}$. Sean $a, b \in O$ y consideremos $\{e_i(z.(ab))\}$. Por un lado, $\{e_i(z.(ab))\} = \{e_i(z)\}.L(ab)$, por otro lado, $\{e_i(z.(ab))\} = \{e_i((z.a).b)\} = \{e_i(z.a)\}.L(b) = \{e_i(z)\}.(L(a)L(b))$. Luego, $L(a)L(b) = L(ab)$.*

Campos y Tensores.

Los campos tangentes sobre M inducen aplicaciones diferenciables de N en $\mathbb{R}^n$. Si $X \in \chi(M)$, podemos escribir a X como $X(\psi(z)) = \sum_{l=1}^{n} x^l(z) e_l(z)$. Sea ${}^\lambda X : N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$${}^\lambda X(z) = (x^1(z), \ldots, x^n(z)).$$

Escribiendo respectivamente a $X(\psi(z))$ y $X(\psi(z.a))$ en las bases $\{e_1(z), \ldots, e_n(z)\}$ y $\{e_1(z.a), \ldots, e_n(z.a)\}$ y del hecho de que $X(\psi(z)) = X(\psi(z.a))$ si $a \in O$, se deduce que $x^i(z) = \sum_{l=1}^{n} x^l(z.a)(L(a))^i_l$ para $1 \leq i \leq n$, donde $L(a)$ es el morfismo de cambio de base del super espacio λ evaluado en a. De esto se sigue, que las aplicaciones ${}^\lambda X$ se comportan con respecto a la acción del grupo de Lie O sobre N de la siguiente manera

$$^\lambda X \circ R_a =^\lambda X.[L(a)^t]^{-1}$$

También los tensores de tipo (0,2) sobre M inducen aplicaciones diferenciables de N en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Para $F \in \chi^0_2(M)$ consideramos la aplicación ${}^\lambda F : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por

$$({}^\lambda F)_{ij}(z) = F(\psi(z))(e_i(z), e_j(z))$$

Esta aplicación matricial cumple la siguiente propiedad de invarianza:

$$^\lambda F \circ R_a(z) = (L(a))^t.{}^\lambda F(z).L(a)$$

para todo $a \in O$ y $z \in N$. Pues

$$[{}^\lambda F(z.a)]_{ij} = F(\psi(z.a))(e_i(z.a), e_j(z.a)) = F(\psi(z))(\sum_{r=1}^{n} e_r(z)L(a)^r_i, \sum_{s=1}^{n} e_s(z)L(a)^s_j)$$

$$= \sum_{r,s=1}^{n} L(a)^r_i.F(\psi(z))(e_r(z), e_s(z)).L(a)^s_j = \sum_{r,s=1}^{n} L(a)^r_i.{}^\lambda F(z)_{rs}.L(a)^s_j\ .$$

Se puede ver fácilmente que si X e Y son campos sobre M se tiene que

$$F(\psi(z))(X, Y) =^\lambda X(z).{}^\lambda F(z).({}^\lambda Y(z))^t$$

Proposición 2.17 *Los tensores de tipo (0,2) sobre M están biunívocamente relacionados con las aplicaciones diferenciables $T : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ que satisfacen que*

$$T \circ R_a = (L(a))^t.T.L(a)$$

Demostración: Si F es un tensor de tipo (0,2) sobre M sabemos que ${}^\lambda F$ es una aplicación matricial con esta propiedad. Veamos que dado una aplicación matricial T, que satisface esta propiedad de invarianza, podemos construir un tensor F de modo que ${}^\lambda F = T$. Definimos $F(p)(X,Y) =^\lambda X(z).T(z).({}^\lambda Y(z))^t$ donde z es un punto N tal que $\psi(z) = p$. Veamos que está bien definido. Sea z y $\bar{z}$ que están en la fibra de p. Luego existe $a \in O$ de modo que $\bar{z} = z.a$. Entonces ${}^{\lambda}X(\bar{z}).T(\bar{z}).({}^{\lambda}Y(\bar{z}))^t = {}^{\lambda}X(z).(L(a)^t)^{-1}.L(a)^t.{}^{\lambda}T(z).L(a).L(a)^{-1}.({}^{\lambda}Y(z))^t = {}^{\lambda}X(z).T(z).({}^{\lambda}Y(z))^t$. F es $\mathcal{F}(M)$-bilineal y, dado X e Y campos sobre M, $F(X,Y) : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, pues $F(X,Y) \circ \psi$ es diferenciable y ψ es una submersión. Por lo tanto, F es un tensor de tipo (0,2) sobre M. Por construcción de F se cumple que ${}^{\lambda}F = T$.

□

2.2.1 Ejemplos de Super Espacios.

Las estructuras construidas en las Secciones 2.1.1 y 2.1.2 son ejemplos de super espacios. Sea $(E, \pi, G, \cdot)$ un fibrado principal sobre M, $\dim M = n$, con grupo estructural G, $\dim G = k$, y ω una conexión sobre el fibrado principal.

Ejemplo 2.18 *Sea* $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ *donde:*

- $N = N_1 \times L(\mathfrak{g})$.
- $\psi : N \longrightarrow E, \ \ \psi(q, u, v) = q$.
- $O = GL(n) \times GL(k), \ R_{(a,b)}(q, u, v) = (q, ua, vb)$.
- $e_i(q, u, v) = (\tilde{\pi}_q \times \tilde{K}_q)^{-1}(u_i, 0)$.
  $e_{n+j}(q, u, v) = (\tilde{\pi}_q \times \tilde{K}_q)^{-1}(0, v_j)$.

Este es un super espacio sobre E *donde el morfismo de cambio de base* $L : GL(n) \times GL(k) \longrightarrow GL(n + k)$ *esta dado por*

$$L(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} .$$

Ejemplo 2.19 *Si tenemos una métrica sobre* $\mathfrak{g}$*, sea* $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ *donde*

- $N = N_1 \times O(\mathfrak{g}) \times G$.
- $\psi : N \longrightarrow E, \ \ \psi(q, u, v, g) = q.g$.
- $O = GL(n) \times O(k) \times G, \ R_{(a,b,h)}(q, u, v, g) = (qh, ua, vb, h^{-1}g)$

- $e_i(q,u,v,g) = (\tilde{\pi}_{q.g} \times \tilde{K}_{q.g})^{-1}(u_i, 0).$
  $e_{n+j}(q,u,v,g) = (\tilde{\pi}_{q.g} \times \tilde{K}_{q.g})^{-1}(0, v_j).$

En este caso el morfismo de cambio de base $L : GL(n) \times O(k) \times G \longrightarrow GL(n+k)$ está dado por

$$L(a,b,h) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} .$$

Si no tenemos una métrica sobre $\mathfrak{g}$, fijamos una base w de $\mathfrak{g}$ y consideramos , en vez de $O(\mathfrak{g})$, $O^w(\mathfrak{g}) = \{w.a : \ a \in O(k)\}$. Considerando $N = N_2 \times O(\mathfrak{g}) \times G$ tenemos un ejemplo similar.

Ejemplo 2.20 *Si tomamos una base $W = \{W_1, \ldots, W_k\}$ de $\mathfrak{g}$, sea $\lambda = (N, \psi, O, R, , \{e_i\})$ con*

- $N = N_2 \times G$.
- $\psi : N \longrightarrow E, \ \ \psi(q,u,g) = q.g.$
- $O = O(n) \times G,\ R_{(a,h)}(q,u,g) = (qh, ua, h^{-1}g)$.
- $e_i(q,u,g) = (\tilde{\pi}_{q.g} \times \tilde{K}_{q.g})^{-1}(u_i, 0).$
  $e_{n+j}(q,u,g) = (\tilde{\pi}_{q.g} \times \tilde{K}_{q.g})^{-1}(0, W_j).$

En este ejemplo, el morfismo de cambio de base es $L(a,h) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & Id_{k\times k} \end{pmatrix}$ que resulta independiente del parámetro del grupo de Lie G. Si tomamos $N = N_1 \times G$ obtenemos un ejemplo similar.

Ejemplo 2.21 *Este ejemplo es muy importante porque nos dice que toda variedad diferenciable admite un super espacio. Sea LM el fibrado principal de bases de la variedad M, cuya dimensión es n. Luego, LM es un super espacio sobre M. Es decir, $\lambda = (LM, \pi, GL(n), \ \cdot\ , \ \{e_i\})$ es un super espacio sobre M, donde π es la proyección canónica de LM en M. Con $\cdot$ notamos la acción natural de $GL(n)$ sobre LM y las aplicaciones de referencia son la proyecciones i-ésimas*

$$e_i(p,u) = \pi_i(p,u) = u_i \ \textit{para}\ 1 \leq i \leq n$$

El morfismo de cambio de base es $L(a) = a$ para todo $a \in GL(n)$.

Ejemplo 2.22 *Si* $(P, \pi, G, \cdot)$ *es un fibrado principal sobre* M *tal que existe un morfismo de fibrados principales* (f, τ) *con el fibrado principal* LM*, entonces* $\lambda = (P, \pi, G, \ \cdot, \ \{\pi_i \circ f\})$ *es un super espacio sobre* M*, donde* $\pi_i : LM \longrightarrow TM$ *son las proyeciones* $\pi_i(p, u) = u_i$*. En este caso, el morfismo de cambio de base* $L : G \longrightarrow GL(n)$ *está dado por* $L(a) = \tau(a)$ *para todo* $a \in G$*.*

Observación 2.23 *El Ejemplo 2.21 es un caso particular de 2.22. Por otro lado, si* M *es paralelizable un fibrado principal sobre* M *tiene estructura de super espacio.*

Sea M una variedad diferenciable dotada de una conexión ∇ y sea K la función de conexión inducida por esta (ver en el Capítulo de Preliminares la Sección 1.3). Consideremos el fibrado de bases LM. Sobre la variedad LM tenemos las 1-formas $\{\theta^i\}$ y $\{\omega^i_j\}$ con $1 \leq i, j \leq n$ definidas por

$$\pi_{*_{(p,e)}}(b) = \sum_{i=1}^{n} \theta^i(p, e)(b) e_i.$$

$$K((\pi_j)_{*_{(p,e)}}(b)) = \sum_{i=1}^{n} \omega^i_j(p, e)(b) e_i.$$

donde $(p, e) = (p, e_1, \ldots, e_n) \in LM$, $b \in (LM)_{(p,e)}$, y $\pi : LM \longrightarrow M$ es la proyección canónica. Las 1-formas $\{\theta^1, \ldots, \theta^n, \{\omega^i_j\}_{1 \leq i,j \leq n}\}$, evaluadas en (p, e), forman una base de $T^*_{(p,e)}(LM)$. Notamos con $\{H_1, \ldots, H_n, V^i_j\}$ su base dual. Los siguientes dos ejemplos se pueden encontrar en [22]:

Ejemplo 2.24 *Sea* $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ *un super espacio de* LM *dado por*

- $N = LM \times GL(n)$.
- $\psi : N \longrightarrow LM, \ \ \psi(p, u, \xi) = (p, u.\xi)$.
- $O = GL(n)$ *y la acción* $R_a(p, u, \xi) = (p, ua, a^{-1}\xi)$
- $e_i(p, u, \xi) = H_i(\psi(p, u, \xi))$
  $e^i_j(p, u, \xi) = V^i_j(\psi(p, u, \xi))$

El morfismo de cambio de base es la función constante $L(a) = Id_{(n+n^2)\times(n+n^2)}$ *para todo* $a \in GL(n)$*.*

Ejemplo 2.25 *Si M está dotada de una métrica Riemanniana podemos considerar el super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ sobre LM donde*

- $N = O(M) \times GL(n)$.
- $\psi : N \longrightarrow LM,\ \ \psi(p, e, \xi) = (p, e.\xi)$.
- $O = O(n),\ \ R_a(p, e, \xi) = (p, ea, a^{-1}\xi)$
- $e_i(p, e, \xi) = H_i(\psi(p, e, \xi))$
  $e^i_j(p, e, \xi) = V^i_j(\psi(p, e, \xi))$

Del mismo modo que en el ejemplo anterior, el morfismo de cambio de base $L(a) : O(n) \longrightarrow GL(n + n^2)$ es constantemente igual a la matriz identidad de $\mathbb{R}^{(n+n^2)\times(n+n^2)}$.

Trataremos los Ejemplos 2.24 y 2.25 en la sección que sigue.

Ejemplo 2.26 *Este ejemplo se puede ver en [6], donde se estudian los Tensores Naturales en el fibrado tangente de una variedad Riemanniana. Consideremos en M una métrica Riemanniana y sea (TM, π, M) su fibrado tangente. Si K es la función de conexión inducida por la conexión de Levi-Civita de la métrica de M sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ donde:*

- $N = O(M) \times \mathbb{R}^n$.
- $\psi : N \longrightarrow TM,\ \ \psi(p, u, \xi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi^i u_i$.
- $O = O(n)$ *y la acción* $R_a(p, u, \xi) = (p, u.a, \xi.a)$.
- $e_i(p, u, \xi) = (\pi_{*_{\psi(p,u,\xi)}} \times K_{\psi(p,u,\xi)})^{-1}(u_i, 0)$
  $e_{n+i}(p, u, \xi) = (\pi_{*_{\psi(p,u,\xi)}} \times K_{\psi(p,u,\xi)})^{-1}(0, u_i)$.

Aquí el morfismo de cambio de base $L : O(n) \longrightarrow GL(2n)$ es $L(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ para todo $a \in O(n)$.

Ejemplo 2.27 *Sea (T_1M, π, M) el fibrado unitario tangente de una variedad Riemannianna (M, g). Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ donde*

- $N = O(M)$ *es el fibrado ortonormal de bases de* M.

- $\psi : O(M) \longrightarrow T_1M$ *es la submersión dada por* $\psi(p, u_1, \ldots, u_n) = u_n$.

- $O = O(n-1)$ *y* $R_a(p, u) = (p, \bar{u})$ *donde* $\bar{u} = (\sum_{i=1}^{n-1} u_i a_1^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} u_i a_{n-1}^i, u_n)$.

- $e_i(p, u) = (\pi_{*_{u_n}} \times K_{u_n})^{-1}(u_i, 0)$ *para* $1 \leq i \leq n$.
  $e_{n+j}(p, u) = (\pi_{*_{u_n}} \times K_{u_n})^{-1}(0, u_j)$ *para* $1 \leq j \leq n-1$.

λ es un super espacio sobre T_1M. El morfismo de cambio de base es $L(a) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ para todo $a \in O(n-1)$. Para más detalles sobre este ejemplo puede verse [17].

2.2.2 Comparando dos Super Espacios sobre LM.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana, consideremos el fibrado principal de bases LM. Para los Ejemplos 2.24 y 2.25 hemos definido los campos tangentes de LM $\{H_i\}_{i=1}^n$ y $\{V_j^i\}_{1 \leq i,j \leq n}$ que forman un marco global. En cada punto $(p, e) \in LM$ tenemos que $\{H_1(p, e), \ldots, H_n(p, e), V_1^1(p, e), \ldots, V_n^1(p, e), \ldots, V_1^n(p, e), \ldots, V_n^n(p, e)\}$ forman una base de $T_{(p,e)}(LM)$. Si llamamos $H_{(p,e)}$ al subespacio generado por $\{H_1(p, e), \ldots, H_n(p, e)\}$ se cumple que:

a) $V_{(p,e)} =< V_j^i(p, e) >$ es el subespacio vertical en (p, e)

b) $H_{(p,e)} \oplus V_{(p,e)} = (LM)_{(p,e)}$

c) $H_{(p,e.a)} = (R_a)_{*_{(p,e)}}(H_{(p,e)})$ para todo $a \in GL(n)$

donde $R_a : LM \longrightarrow LM$ son los difeomorfismos inducidos por la acción del grupo $GL(n)$ en LM. $H_{(p,e)}$ es una distribución sobre LM que satisface las propiedades enunciadas en la Proposición 1.7, entonces por la Observación 1.9 tenemos una conexión ω sobre LM que definimos para $(p, e) \in LM$ como sigue:

$$\omega(p, e)(h) = 0 \quad \text{para todo } h \in H_{(p,e)}$$

$$\omega(p, e)(\sigma_{(p,e)}(X)) = X \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}).$$

Sea $\lambda = \{N, \psi, O, R, \{e_i\}\}$ el super espacio sobre LM dado por:

- $N = N_2 \times GL(n)$
- $O = O(n) \times GL(n)$
- $R_{(a,b)}((p,e),u,g) = (p, e.h, u.a, h^{-1}g)$
- $\psi(p,e,u,g) = (p, eg)$

Fijemos una base de $\mathfrak{gl}(n)$. Por ejemplo, tomemos las matrices $\{X_{ij}\}_{1\leq i,j,\leq n}$ que son aquellas que tienen un 1 en la entrada (i,j) y 0 en las demás. Las aplicaciones $e_i, e_j^i : N \longrightarrow T(LM)$, con $1 \leq i,j \leq n$, están definidas por

$$e_i((p,e),u,g) = (\tilde{\pi}_{(p,eg)} \times \tilde{K}_{(p,eg)})^{-1}(u_i, 0).$$

$$e_j^i((p,e),u,g) = (\tilde{\pi}_{(p,eg)} \times \tilde{K}_{(p,eg)})^{-1}(0, X_{ij}).$$

Sea $F : N \longrightarrow GL(n)$ donde $F(p,e,u,g) = b$ si $(eg).b = u$, entonces

$$F((p,e),u,g) = g^{-1}.\begin{pmatrix} < e_1, u_1 > & \dots & < e_n, u_1 > \\ \vdots & & \vdots \\ < e_1, u_n > & \dots & < e_n, u_n > \end{pmatrix}^{-1}$$

y tenemos que

$$e_i((p,e),u,g) = \sum_{r=1}^{n} H_r(p,eg)(F((p,e),u,g)_i^r$$

$$e_j^i((p,e),u,g) = \sum_{r=1}^{n} V_j^r(p,eg).g_i^r$$

En [22] se asocia a cada tensor G de tipo (0,2) sobre LM una aplicación matricial ${}^{\nabla}G : LM \times GL(n) \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+n^2)\times(n+n^2)}$ dada por

$${}^{\nabla}G = \begin{pmatrix} (G_{ij}) & (G_{ij}^1) & \dots & (G_{ij}^n) \\ ({}^1G_{ij}) & (G_{ij}^{11}) & \dots & (G_{ij}^{1n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ({}^nG_{ij}) & (G_{ij}^{n1}) & \dots & (G_{ij}^{nn}) \end{pmatrix}$$

donde las submatrices $G_{ij}(p,e,g) = G(p,e.g)(H_i(p,e.g),H_j(p,e.g))$, $G^l_{ij}(p,e,g) = G(p,e.g)(H_i(p,e.g),V^l_j(p,e.g))$, ${}^lG_{ij}(p,e,g) = G(p,e.g)(V^l_i(p,e.g),H_j(p,e.g))$ y $G^{lm}_{ij}(p,e,g) = G(p,e.g)(V^l_i(p,e.g),V^m_j(p,e.g))$. Esta no es otra que la aplicación inducida por el super espacio del Ejemplo 2.24. Para simplificar la escritura, identificaremos las submatrices de la aplicación ${}^\nabla G$ con las aplicaciones $B_1 : LM \longrightarrow R^{n\times n}$, $B_2 : LM \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n^2}$, $B_3 : LM \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$ y $B_4 : LM \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2\times n}$, que satisfacen que $B_1(p,e.g) = G_{ij}(p,e,g)$, $B_2(p,e.g) = \left((G^1_{ij}) \quad \dots \quad (G^n_{ij}) \right)(p,e,g)$,

$$B_3(p,e.g) = \begin{pmatrix} (G^{11}_{ij}) & \dots & (G^{1n}_{ij}) \\ \vdots & & \vdots \\ (G^{n1}_{ij}) & \dots & (G^{nn}_{ij}) \end{pmatrix}(p,e,g) \text{ y } B_4(p,e.g) = \begin{pmatrix} ({}^1G_{ij}) \\ \vdots \\ ({}^nG_{ij}) \end{pmatrix}(p,e,g).$$

Considerando el super espacio λ, este asocia a cada tensor G sobre LM una aplicación diferenciable ${}^\lambda G : N \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+n^2)\times(n+n^2)}$. Escribamos las submatrices de ${}^\lambda G$ como

$${}^\lambda G(p,e,u,g) = \begin{pmatrix} A_1(p,e,u,g) & A_2(p,e,u,g) \\ A_4(p,e,u,g) & A_3(p,e,u,g) \end{pmatrix}$$

siendo

$$((A_1)(p,e,u,g))_{ij} = G(\psi(p,e,u,g))(e_i(p,e,u,g),e_j(p,e,u,g)),$$

$$A_2 = \left((A^1_2) \quad \dots \quad (A^n_2) \right) \in \mathbb{R}^{n\times n^2}$$

donde $(A^l_2)_{ij}(p,e,u,g) = G(\psi(p,e,u,g))(e_i(p,e,u,g),e^l_j(p,e,u,g))$,

$$A_4 = \begin{pmatrix} (A^1_4) \\ \vdots \\ (A^n_4) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2\times n}$$

donde $(A^l_4)_{ij}(p,e,u,g) = G(\psi(p,e,u,g))(e^l_i(p,e,u,g),e_j(p,e,u,g))$, y

$$A_3 = \begin{pmatrix} (A^{11}_3) & \dots & (A^{1n}_3) \\ \vdots & & \vdots \\ (A^{n1}_3) & \dots & (A^{nn}_3) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2}$$

donde $(A^{ij}_3)_{lm}(p,e,u,g) = G(\psi(p,e,u,g))(e^i_l(p,e,u,g),e^j_m(p,e,u,g))$. En todos los casos los subíndices i,j,l,m se mueven entre 1 y n.

Mediante un simple cálculo, teniendo en cuenta la relación que existe entre las aplicaciones de referencia de λ $\{e_i, e^i_j\}$ y el marco global de LM $\{H_i, V^i_j\}$, vemos como se relacionan las aplicaciones ${}^{\nabla}G$ y ${}^{\lambda}G$. Esta relación queda expresada en la siguiente proposición

Proposición 2.28 *Con las notaciones anteriores resulta que:*

- *horizontal x horizontal:*

$$A_1((p,e),u,g) = (F(p,e,u,g))^t.B_1(p,eg).F(p,e,u,g)$$

- *horizontal x vertical:*

$$A_1((p,e),u,g) = (F(p,e,u,g))^t.B_2(p,eg).\begin{pmatrix} g & & & \\ & g & & \\ & & \ddots & \\ & & & g \end{pmatrix}$$

- *vertical x horizontal:*

$$A_4((p,e),u,g) = \begin{pmatrix} g & & & \\ & g & & \\ & & \ddots & \\ & & & g \end{pmatrix}^t .B_4(p,eg).F(p,e,u,g)$$

- *vertical x vertical:*

$$A_3((p,e),u,g) = \begin{pmatrix} g & & & \\ & g & & \\ & & \ddots & \\ & & & g \end{pmatrix}^t .B_3(p,eg).\begin{pmatrix} g & & & \\ & g & & \\ & & \ddots & \\ & & & g \end{pmatrix}$$

Los casos están distinguidos por "horizontal $\times$ horizontal", "horizontal $\times$ vertical", etc. Con esto queremos resaltar la pertenencia, con respecto a la distribución horizontal y vertical, de los vectores que están implicados en la construcción de las submatrices de ${}^{\lambda}G$ y ${}^{\nabla}G$.

Observación 2.29 *Consideremos el super espacio sobre LM construído en el Ejemplo 2.25 y sea ${}^{<\,>}G$ la aplicación matricial inducida por este para un tensor G. En [22], se dice que un tensor G de tipo (0,2) sobre LM es natural con respecto a la métrica si la aplicación matricial inducida ${}^{<\,>}G(p,e,\xi)$ depende sólo del parámetro ξ. Sea G un tensor sobre LM tal que ${}^{\lambda}G(p,e,u,g) ={}^{\lambda} G(g)$, es decir que depende sólo del parámetro g, entonces resulta que G es natural con respecto a la métrica*

2.2.3 Super Espacios y Fibrados Principales.

Teorema 2.30 *Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M tal que O actua sobre N sin punto fijo, entonces (N, ψ, O, R) es un fibrado principal sobre M.*

Observación 2.31 *Conviene observar que el concepto de fibrado principal se puede definir de otra manera (ver [9]). De todas formas esta definición es equivalente a la dada en los en el Capítulo de Preliminares; A saber, sea G un grupo de Lie actuando sin punto fijo sobre una variedad P, de modo que exista la variedad cociente P/G y que la proyección canónica $\pi : P \longrightarrow P/G$ sea una submersión, entonces decimos que $(P, \pi, G, \cdot)$ es un fibrado principal de grupo estructural G sobre P/G.*

Para probar el teorema necesitaremos la siguiente proposición, cuya demostración puede verse en [9]. Recordamos que si un grupo O actua sobre una variedad N, tenemos definida una relación de equivalencia sobre N determinada por: $z \sim z'$ si y sólo si existe $a \in O$ tal que $z' = z.a$.

Proposición 2.32 *Sea O un grupo de Lie que actua sobre la variedad N. Para que N/O tenga estructura de variedad diferenciable y para que $\pi : N \longrightarrow N/O$, la proyección canónica, sea una submersión, es necesario y suficiente que el subconjunto de $N \times N$, definido por $\bar{\Delta} = \{(z, z') : z \sim z'\}$ sea una subvariedad cerrada.*

Como corolario de la proposición obtenemos el lema:

Lema 2.33 *Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M. Luego N/O tiene estructura de variedad diferenciable y $\pi : N \longrightarrow N/O$ es una submersión.*

Demostración: Sean z y $z' \in N$, como O actua transitivamente en las fibras, tenemos que $z \sim z'$ si y sólo si $\psi(z) = \psi(z')$. Consideremos la aplicación $\rho : N \times N \longrightarrow M \times M$ dada por $\rho(z, z') = (\psi(z), \psi(z'))$. ρ resulta una submersión porque ψ lo es. Podemos ver que $\bar{\Delta} = \rho^{-1}(\Delta)$, donde Δ es la subvariedad diagonal de $M \times M$. Luego, como Δ es una subvariedad cerrada, de dimensión igual a la dimensión de M, y como ρ es una submersión, obtenemos que $\bar{\Delta}$ es una subvariedad cerrada de $N \times N$. Por la proposición anterior, concluímos que N/O tiene estructura de variedad y que $\pi : N \longrightarrow N/O$ es una submersión.

$\square$

Lema 2.34 *Con las hipótesis del lema anterior se cumple:*

i) N/O *es difeomorfo a* M*.*

ii) $\ker \pi_* = \ker \psi_*$.

Demostración: Definamos $f : N/O \longrightarrow M$ como $f([z]) = \psi(z)$. Si $z \sim z'$, entonces $z' = z.a$ para algún $a \in O$, luego $\psi(z) = \psi(z')$ y por lo tanto f está bien definida. Por definición es $f \circ \pi = \psi$, con lo cual f resulta diferenciable por ser π una submersión y ψ una función diferenciable.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\ N/O \arrow[rr, "f"] & & M \end{tikzcd}$$

Como $f \circ \pi = \psi$, tenemos que $\ker \pi_* \subseteq \ker \psi_*$. Sea $g : M \longrightarrow N/O$ definida por $g(p) = \pi(z)$ donde $z \in N$ cumple que $\psi(z) = p$. Si tenemos z y $z' \in N$ son tales que $\psi(z) = \psi(z')$, entonces $z \sim z'$, con lo cual $\pi(z) = \pi(z')$ y con esto queda probada la buena definición de g. El hecho de que $\pi = g \circ \psi$, de la misma manera que para la función f, nos dice que g es diferenciable y que $\ker \psi_* \subseteq \pi_*$, con esto hemos probado el punto ii).

Veamos que $g \circ f = Id_{N/O}$ y que $f \circ g = Id_M$. Sea $[z] \in N/O$, luego $g(f([z])) = g(\psi(z)) = \pi(z) = [z]$. Si $p \in M$, sea z tal que $\psi(z) = p$, entonces $f(g(p)) = f(\pi(z)) = \psi(z) = p$. Por lo tanto, $g = f^{-1}$ y $f : N/O \longrightarrow M$ es un difeomorfismo.

□

Observación 2.35 *Sea* $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ *un super espacio sobre* E *tal que* O *actua sin punto fijo sobre N. Por el Lema 2.33 y la Observación 2.31 podemos afirmar que* (N, π, R, O) *es un fibrado principal sobre la variedad cociente* N/O *.*

Demostración del Teorema 2.30: La observación anterior nos dice que la colección (N, π, O, R) tiene estructura de fibrado principal sobre N/O. El Lema 2.34 dice que las variedades bases N/O y M son difeomorfas y el difeomorfismo $f : N/O \longrightarrow M$ que utilizamos en la demostración del lema cumple por definición que $\psi = f \circ \pi$.

Para probar que (N, ψ, O, R) es un fibrado principal sobre M falta ver que cumpla la condición de ser localmente trivial. Es decir, que para todo $p \in M$ exista un abierto U de M que contiene a p y un difeomorfismo $\tau : \psi^{-1}(U) \longrightarrow U \times O$, de modo que $\tau = (\psi, \phi)$, donde $\phi(z.a) = \phi(z).a$ para todo $a \in O$ y $z \in \psi^{-1}(U)$.

Sea $p \in M$, tomemos $[z_o] \in N/O$ tal que $f([z_0]) = p$. Como (N, π, O, R) es un fibrado principal, cumple la condición de ser localmente trivial. Luego, existe V abierto de N/O que contiene a $[z_0]$ y $\bar{\tau} : \pi^{-1}(V) \longrightarrow V \times O$ un difeomorfismo, de modo que $\bar{\tau}(z) = (\pi(z), \bar{\phi}(z))$, donde $\bar{\phi}(z.a) = \bar{\phi}(z).a$ para todo $a \in O$. Si consideramos $U = f(V)$, que es abierto de M porque f es un difeomorfismo, vemos que $\psi^{-1}(U) = \psi^{-1}(f(V)) = \pi^{-1}(V)$. Definimos $\tau : \psi^{-1}(U) \longrightarrow U \times O$ como

$$\tau(z) = (\psi(z), \bar{\phi}(z))$$

La función τ es un difeomorfismo, pues $\tau = (f, Id_O) \circ \bar{\tau}$, y por como elegimos $\bar{\phi}$, también se cumple que $\bar{\phi}(z.a) = \bar{\phi}(z).a$ para todo a en O y todo z en $\psi^{-1}(U)$. ▫

Nota: En adelante, si decimos que un super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ sobre M es también un fibrado principal queremos decir que la cuaterna (N, ψ, O, R) es un fibrado principal sobre M.

Observación 2.36 *Tenemos el recíproco del Ejemplo 2.22. Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M donde el grupo O actua sin punto fijo sobre N. La aplicación $(f, \tau) : (N, \psi, O, R) \longrightarrow LM$ donde $f(z) = (\psi(z), e_1(z), \ldots, e_m(z))$ y $\tau(a) = L(a)$, con L el morfismo de cambio de base, es un morfismo de fibrados principales. Aquí notamos de la misma manera al fibrado principal de bases que a su variedad espacio.*

Corolario 2.37 *Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M, tal que O actua sobre N sin punto fijo. Entonces*

$$\dim N = \dim O + \dim M.$$

Veamos que esto no sucede siempre:

Ejemplo 2.38 *Sea $\lambda = (\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\}), pr_1, GL(n), R, \{e_i\})$ el super espacio sobre $\mathbb{R}^n$ dado por*

- $pr_1(p,q) = p$
- $R_a(p,q) = (p,q).a = (p,q.a) = (p, \sum_{i=1}^{n} q_i a_1^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} q_i a_n^i)$
- $e_i(p,q) = \frac{\partial}{\partial u_i}|_p$, *donde* $\{\frac{\partial}{\partial u_i}|_p\}_{i=1}^n$ *es la base de* R_p^n *inducida por la carta canónica de* R^n.

La dimensión de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ *es* $2n$*, mientras que* $\dim GL(n) + \dim \mathbb{R}^n = n^2 + n$ *que son diferentes para* $n > 1$. *La acción de* $GL(n)$ *sobre* $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$*, si bien es transitiva en las fibras, actua con punto fijo.*

Observación 2.39 *El recíproco del teorema es cierto. Es decir, si* λ *es un super espacio sobre* M *y también un fibrado principal sobre* M*, entonces* O *actua sin punto fijo.*

Sea un grupo O actuando sobre la variedad N. Para cada $z \in N$ notamos con $S_z = \{a \in O : z.a = z\}$ al grupo estabilizador de z. S_z es un subgrupo cerrado de O, pues $S_z = \sigma_z^{-1}(z)$, donde $\sigma_z(a) = z.a$. Por lo tanto, S_z es un subgrupo de Lie de O para cada $z \in N$.
Las demostraciones de las Proposiciones 2.40 y 2.42 pueden verse en [9].

Proposición 2.40 *Si* H *es un subgrupo de Lie del grupo* O*,* H *opera por traslación a derecha en* O*. La variedad cociente existe y*

$$\dim O/H = \dim O - \dim H \ .$$

Observación 2.41 *Luego, tenemos que dado* $z \in N$*,* O/S_z *tiene estructura de variedad y* $\dim O/S_z = \dim O - \dim S_z$.

Sea $f_z : O/S_z \longrightarrow N$ la aplicación dada por $f_z([a]) = z.a$. Esta bien definida, pues $a \sim b$ implica que $ab^{-1} \in S_z$, luego $z = z.ab^{-1}$, lo que implica finalmente que $z.b = z.a$.

Proposición 2.42 *Sea* O *un grupo de Lie que actua sobre una variedad* N*. Si un punto* $z \in N$ *es tal que la órbita* $z.O$ *es un subespacio localmente cerrado de* N *(i.e. para todo punto* $w \in z.O$ *existe* V *abierto de* N*, tal que* $V \cap z.O$ *es un conjunto cerrado de* V*), entonces* $z.O$ *es una subvariedad de* N *y* $f_z : O/S_z \longrightarrow z.O$ *es un difeomorfismo.*

Esta proposición generaliza el Corolario 2.37:

Proposición 2.43 *Sea* $\lambda = (N, , \psi, O, R, \{e_i\})$ *un super espacio sobre* M*, entonces:*

i) Existe $k \in \mathbb{N}_0$ *tal que* $\dim S_z = k$ *para todo* $z \in N$*.*

ii) $\dim N = \dim M + \dim O - k$.

Demostración: Sea $z \in N$ y $\psi(z) = p$. Como ψ es una submersión resulta que

$$\dim N = \dim \ker \psi_{*_z} + \dim M$$

La dimensión de $\ker \psi_{*_z}$ es igual a la dimensión de $\psi^{-1}(p)$. Como O actua transitivamente en las fibras tenemos que $z.O = \psi^{-1}(p)$. Notando que $\psi^{-1}(p)$ es localmente cerrada en N, por la Proposición 2.42, podemos decir que O/S_z es difeomorfo a $\psi^{-1}(p)$, con lo cual la $\dim O/S_z = \dim \psi^{-1}(p)$. De la Proposición 2.40 obtenemos que $\dim O - \dim S_z = \dim \psi^{-1}(p)$. Finalmente queda que

$$\dim N = \dim M + \dim O - \dim S_z$$

Esto lo cumple cualquier $z \in N$, con lo cual la $\dim S_z = k$ es constante.

□

2.3 Morfismo de Super Espacios.

Definición 2.44 *Sean* $\lambda = \{N, \psi, O, R, \{e_i\}\}$ *y* $\lambda' = \{N', \psi', O', R', \{e_i'\}\}$ *dos super espacios sobre* M*. Un morfismo de super espacios entre* λ *y* λ' *es un par* $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ *tal que:*

1. $f : N \longrightarrow N'$ *diferenciable.*

2. $\tau : O \longrightarrow O'$ *es un morfismo de grupos de Lie.*

3. $\psi' \circ f = \psi$*, osea el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\psi"'] & N' \arrow[d, "\psi'"] \\ & E \end{tikzcd}$$

4. $f(z.a) = f(z).\tau(a)$ *para todo* $z \in N$ *y para todo* $a \in O$.

Observación 2.45 *En la Sección 2.5.2 vamos a generalizar la definición de morfismo de super espacios. En esa generalización, los super espacios no están necesariamente dados sobre una misma variedad.*

2.3.1 Ejemplos.

Consideremos el fibrado de bases LM de una variedad Riemanniana (M, g). Sean λ, λ' y λ'' los super espacios sobre LM de los Ejemplos 2.20, 2.24 y 2.25 respectivamente. Recordamos que el grupo estructural de LM es $GL(n)$, entonces en el super espacio del Ejemplo 2.20 tomaremos como grupo a $G = GL(n)$.

Ejemplo 2.46 *Sea* $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ *donde* $f : N_2 \times GL(n) \longrightarrow LM \times GL(n)$ *y* $\tau : O(n) \times GL(n) \longrightarrow GL(n)$ *dadas por*

- $f((q, v), u, \xi) = (q, v, \xi)$
- $\tau(a, b) = b$

Veamos que (f, τ) *es efectivamente un morfismo de super espacios. Dado que* f *es diferenciable y* τ *un morfismo de grupos de Lie, sólo hace falta verificar que* $f \circ R = R'_\tau \circ f$ *y que* $\psi' \circ f = \psi$. *Para esto tomamos* $(q, v, u, \xi) \in N_2 \times GL(n)$ *y* $(a, b) \in O(n) \times GL(n)$, *y observamos que* $f((q, v, u, \xi).(a, b)) = f(q, v.b, u.a, b^{-1}\xi) = (q, v.b, b^{-1}\xi) = R'_b(q, v, \xi) = f(q, v, u, \xi).\tau(a, b)$. *Por otra parte,* $\psi'(f(q, v, u, \xi)) = \psi'(q, v, \xi) = (q, v.\xi) = \psi(q, v, u, \xi)$.

Ejemplo 2.47 *Sea* $(f, \tau) : \lambda'' \longrightarrow \lambda$ *donde* $f : O(M) \times GL(n) \longrightarrow N_2 \times GL(n)$ *y* $\tau : O(n) \longrightarrow O(n) \times GL(n)$ *dadas por:*

- $f(q, e, \xi) = (q, e, e, \xi)$
- $\tau(a) = (a, a)$

Para $(q, e, \xi) \in O(M) \times GL(n)$ *y* $a \in O(n)$ *tenemos que* $f((q, e, \xi).a) = f(q, e.a, a^{-1}\xi)$ $= (q, e.a, e.a, a^{-1}\xi) = f(q, e, \xi).\tau(a)$ *y* $\psi(f(q, e, \xi)) = \psi(q, e, e, \xi) = (q, e.\xi) = \psi''(p, e, \xi)$.

Ejemplo 2.48 *Sea $\lambda = \{N, \psi, O, R, \{e_i\}\}$ un super espacio sobre M. Tomemos un elemento a_0 del grupo O y definamos $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda$ donde $f(z) = z.a_0$ y $\tau(b) = a_0^{-1}.b.a_0$, osea $\tau(b) = Ad(a_0^{-1})(b)$. El par (f, τ) es un morfismo de super espacios. Es fácil ver que f es diferenciable, que τ es un morfismo de grupos de Lie y que $\psi(f(z)) = \psi(z.a) = \psi(z)$. Falta ver que f conmuta con la acción. Para $z \in N$ y $b \in O$ tenemos que $f(z.b) = z.b.a_0$, por otro lado $f(z).\tau(b) = z.a_0.a_0^{-1}.b.a_0 = z.b.a_0$, con lo cual $f(z.b) = f(z).\tau(b)$. Observemos que $\{e_i(f(z))\}$ y $\{e_i(z)\}$ son bases de $E_{\psi(z)}$, por lo tanto, existe una matriz inversible que las relaciona. Esta matriz es el morfismo de cambio de base de λ evaluado en a_0, osea $\{e_i(f(z))\} = \{e_i(z)\}.L(a_0)$ para todo $z \in N$.*

Ejemplo 2.49 *Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M. Ya hemos visto, en el Ejemplo 2.21, que el fibrado principal de bases LM induce un super espacio sobre M. Notamos a este con $\alpha = (LM, \pi, GL(n), \cdot, \{\pi_i\})$. Si notamos con L al el morfismo de cambio de base de λ, sea $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \alpha$ donde*

- $f(z) = (\psi(z), e_1(z), \ldots, e_n(z))$
- $\tau(a) = L(a)$

para todo $z \in N$ y para todo $a \in O$. (f, τ) resulta un morfismo de super espacios.

Observación 2.50 *Sean λ y λ' dos super espacios y $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ un morfismo entre ellos. Si λ y λ' son fibrados principales, entonces (f, τ) es un morfismo de fibrados principales.*

Proposición 2.51 *Sean λ y α dos super espacios sobre M y $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \alpha$ un morfismo de super espacios. Si α es un fibrado principal y τ es inyectiva entonces λ es un fibrado principal.*

Demostración: Sea $\lambda = (N, O, R, \psi, \{e_i\})$ y $\alpha = (N', O', R', \psi', \{e'_i\})$. Con e y e' notamos el elemento neutro de O y O' respectivamente. Sea $a \in O$ y $z \in N$ tal que $z.a = z$. Luego, $f(z) = f(z.a) = f(z).\tau(a)$. Como α es un fibrado principal, O' actua sin punto fijo sobre N' y por lo tanto $\tau(a) = e'$. Al ser τ inyectiva, necesariamnete se tiene que $a = e$, con lo cual, la acción de O sobre N es sin punto fijo y por 2.30 λ es un fibrado principal. □

Proposición 2.52 *Sea $\lambda = (N, R, O, \psi, \{e_i\})$ y $\lambda' = (N', R', O', \psi', \{e'_i\})$ dos super espacios sobre M y $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ un morfismo de super espacios. Tenemos que*

(a) Si τ es suryectiva entonces f es suryectiva

(b) Si O' actua sin punto fijo , osea si λ' es un fibrado principal

$$(b.1)\quad \tau \text{ es suryectiva} \Longleftrightarrow f \text{ es suryectiva}$$
$$(b.2)\quad \tau \text{ es inyectiva} \Longrightarrow f \text{ es inyectiva}$$
$$(b.3)\quad \tau \text{ es biyectiva} \Longrightarrow f \text{ es biyectiva}$$

(c) Si O y O' actuan sin punto fijo entonces

$$(c.1)\quad f \text{ es inyectiva} \Longleftrightarrow \tau \text{ es inyectiva}$$
$$(c.2)\quad f \text{ es biyectiva} \Longleftrightarrow \tau \text{ es biyectiva}$$

Demostración: Notamos con e y e' el elemento neutro de O y O' respectivamente. (a) Sea $z' \in N'$ y sea $z \in N_{\psi'(z')} = \psi^{-1}(\psi'(z'))$. $f(z)$ está en la misma fibra que z' y por lo tanto existe $a' \in O'$ tal que $z' = f(z).a'$. Como τ es suryectiva, $z' = f(z).\tau(a) = f(z.a)$ para algún $a \in O$.

(b) Para probar $(b.1)$ sólo hace falta ver que el hecho de que f sea suryectiva implica que τ debe ser suryectiva. Para que τ sea suryectiva sólo hace falta que f lo sea en una fibra. Sea $a' \in O'$, tomemos $z \in N$ y notemos que $f(z).a'$ está en la misma fibra que $f(z)$. Como f es suryectiva, existe $\bar{z}$ en la misma fibra que z tal que $f(\bar{z}) = f(z).a'$. Luego, $\bar{z} = z.a$ para algún $a \in O$, con lo cual $f(z).a' = f(z).\tau(a)$ y, como O' actua sin punto fijo, $a' = \tau(a)$.

Veamos $(b.2)$, supongamos que τ es inyectiva y sean z y $\bar{z}$ tal que $f(z) = f(\bar{z})$. Como están en la misma fibra existe $a \in O$ tal que $\bar{z} = z.a$ y por lo tanto $f(\bar{z}) = f(z).\tau(a)$. Al ser λ' un fibrado principal $\tau(a) = e'$, y como τ era inyectiva, se tiene que $a = e$. Por lo tanto, $z = \bar{z}$. El punto $(b.3)$ se deduce de $(b.1)$ y $(b.2)$.

(c) Supongamos que f es inyectiva y sea $a \in O$ tal que $\tau(a) = e'$. Para $z \in N$ tenemos que $f(z.a) = f(z).\tau(a) = f(z)$. Como f es inyectiva $z.a = z$, y como O actua sobre N sin punto fijo tenemos que $a = e$, con lo cual vimos $(c.1)$. De $(b.1)$ y $(c.1)$ se deduce $(c.2)$.

□

2.3.2 Morfismos y Tensores.

Aplicación de entrelazamiento.

Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ y $\lambda' = (N', \psi, O', R', \{e_i'\})$ dos super espacios sobre M ($\dim M = n$) y $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ un morfismo entre ellos. Si ${}^{\lambda'}T : N' \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ es la aplicación matricial inducida por un tensor T de tipo $(0, 2)$ sobre M con respecto al super espacio λ', entonces ${}^{\lambda'}T \circ f : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ es una función diferenciable. ¿Corresponde ${}^{\lambda'}T \circ f$ a un tensor sobre M?, Es decir, ¿Existe un tensor sobre M tal que su expresión matricial inducida con respecto de λ sea ${}^{\lambda'}T \circ f$?, ¿Cuál es la relación entre ${}^{\lambda}T$ y ${}^{\lambda'}T \circ f$?

Un morfismo $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ manda fibras en fibras. Entonces, dado $z \in N$ tenemos que $\{e_i'(f(z))\}$ y $\{e_i(z)\}$ son bases de $M_{\psi(z)} = M_{\psi'(f(z))}$. Por lo tanto, existe $C(z) \in GL(n)$ tal que $\{e_i'(f(z))\} = \{e_i(z)\}.C(z)$. Esto motiva la siguiente definición:

Definición 2.53 *Sea $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ un morfismo de super espacios. LLamamos aplicación de entrelazamiento de (f, τ) a la función $C : N \longrightarrow GL(m)$ que cumple que*

$$\{e_i'(f(z))\} = \{e_i(z)\}.C(z)$$

para todo $z \in N$.

Ejemplo 2.54 *La aplicación de entrelazamiento para $(Id_N, Id_O) : \lambda \longrightarrow \lambda$ es la función constante $C(z) = Id_{m\times m}$. En el Ejemplo 2.48, la aplicación de entrelazamiento es $C(z) = L(a_0)$ para todo $z \in N$. En Ejemplo 2.49, la aplicación es $C(z) = Id_{n\times n}$, pues $\pi_i(f(z)) = \pi_i(\psi(z), e_1(z), \ldots, e_n(z)) = e_i(z)$ para $1 \leq i \leq n$.*

Veamos como se comporta la aplicación de entrelazamiento con respecto a la acción del grupo O en el super espacio λ.

Proposición 2.55 *Si $L : O \longrightarrow GL(n)$ y $L' : O' \longrightarrow GL(n)$ son los morfismos de cambio de base de λ y λ' respectivamente, entonces*

$$C(z.a) = (L(a))^{-1}.C(z).L'(\tau(a))$$

para todo $z \in N$ y $a \in O$.

Demostración: Dado $z \in N$ y $a \in O$, tenemos que $\{e'_i(f(z.a))\} = \{e_i(z.a)\}.C(z.a) = \{e_i(z)\}.L(a).C(z.a)$. Por otro lado, $\{e'_i(f(z.a))\} = \{e'_i(f(z).\tau(a))\} = \{e'_i(f(z))\}.L'(\tau(a)) = \{e_i(z)\}.C(z).L'(\tau(a))$. Entonces, $L(a).C(z.a) = C(z).L'(\tau(a))$, con lo que queda probada la proposición.

□

Observación 2.56 *Si los morfismos de cambio de base de λ y λ' cumplen que $L' \circ \tau = L$ y que $Im(L) \subseteq O(n)$, entonces la aplicación de entrelazamiento de (f, τ), $C : N \longrightarrow GL(n)$, es la aplicación matricial inducida con respecto a λ de algún tensor sobre M. Pues, de la proposición anterior se tiene que $C(z.a) = (L(a))^{-1}.C(z).L(a) = (L(a))^t.C(z).L(a)$. Por la Proposición 2.17, C proviene de un tensor sobre M.*

Proposición 2.57 *Sea λ y λ' dos super espacios sobre M. Si (f, τ) y (g, γ) son dos morfismos entre λ y λ', entonces existe $a : N \longrightarrow O'$ tal que $g(z) = f(z).a(z)$. Las aplicaciones de entrelazamiento de (f, τ) y (g, γ) se relacionan por*

$$C_g(z) = C_f(z).L'(a(z))$$

En particular si L' es la identidad, todos los morfismos entre λ y λ' inducen la misma aplicación de entrelazamiento.

Demostración: Por definición $\{e'_i(g(z))\} = \{e_i(z)\}.C_g(z)$. Por otro lado, $\{e'_i(g(z))\} = \{e'_i(f(z).a(z))\} = \{e'_i(f(z))\}.L'(a(z)) = \{e_i(z)\}.C_f(z).L'(a(z))$. Como esto vale para todo $z \in N$, obtenemos lo que queríamos probar.

□

Observación 2.58 *En particular, si $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda$ y C es el morfismo de entrelazamiento, tenemos que $C(z) = L(a)$ para todo $a \in O$ que cumpla que $f(z) = z.a$.*

Observación 2.59 *De la Proposición 2.55 se ve inmediatamente que $\frac{\det C(z.a)}{\det C(z)} = \frac{\det(L'(\tau(a)))}{\det(L(a))}$ para todo z en N y todo a en O.*

Proposición 2.60 *Sean λ y λ' dos super espacios sobre M y $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ un morfismo. Si ${}^{\lambda'}T$ es la aplicacion matricial inducida por un tensor T con respecto a λ', entonces ${}^{\lambda'}T \circ f : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ corresponde a un tensor sobre M si y sólo si*

$$(L(a))^t.({}^{\lambda'}T \circ f)(z).L(a) = (L'(\tau(a)))^t.({}^{\lambda'}T \circ f)(z).L'(\tau(a))$$

para todo $a \in O$ y para todo $z \in N$.

Demostración: Si ${}^{\lambda'}T \circ f$ proviene de un tensor, entonces cumple la propiedad de invarianza, esto es $({}^{\lambda'}T \circ f)(z.a) = (L(a))^t.{}^{\lambda'}(T \circ f)(z).L(a)$. Por otro lado, sabemos que ${}^{\lambda'}T \circ f(z.a) = {}^{\lambda'} T(f(a).\tau(a)) = (L'(\tau(a)))^t.{}^{\lambda'}T(f(z)).L'(\tau(a))$, con lo cual se prueba la primera implicación. Para ver la vuelta, despejamos y tenemos que $({}^{\lambda'}T \circ f)(z) = (L'(\tau(a))^t)^{-1}.(L(a))^t.({}^{\lambda'}T \circ f)(z).L(a).(L'(\tau(a)))^{-1}$, luego reemplazando $({}^{\lambda'}T \circ f)(z)$ en $({}^{\lambda'}T \circ f)(z.a) = (L'(\tau(a)))^t.{}^{\lambda'}T(f(z)).L'(\tau(a))$ se ve que ${}^{\lambda'}T \circ f$ cumple la propiedad de invarianza y por lo tanto proviene de un tensor.

□

Más allá de que ${}^{\lambda'}T \circ f$ corresponda o no a un tensor sobre M, para cada punto $z \in N$, ${}^{\lambda'}T(z)$ y $({}^{\lambda'}T \circ f)(z)$ son matrices de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Veamos como se relacionan:

Proposición 2.61 *Si T es un tensor sobre M entonces y C es la aplicación de entrelazamiento de (f, τ), tenemos que*

$$({}^{\lambda'}T \circ f)(z) = (C(z))^t.{}^{\lambda}T(z).C(z)$$

Demostración: $[({}^{\lambda'}T \circ f)(z)]_{ij} = T(\psi'((f(z))))(e'_i(f(z)), e'_j(f(z))) =$
$= T(\psi(z))(\sum_{r=1}^{m}(C(z))_i^r e_r(z), \sum_{s=1}^{m}(C(z))_j^s e_s(z)) = \sum_{r,s=1}^{m}(C(z))_i^r[{}^{\lambda}T(z)]_{rs}(C(z))_j^s$. De aquí se ve claramente que $[({}^{\lambda'}T \circ f)(z)]_{ij} = [(C(z))^t.{}^{\lambda}T(z).C(z)]_{ij}$ que es lo que queríamos probar.

□

Observación 2.62 *Sea (f, τ) y (g, γ) dos morfismos entre los super espacios λ y λ'. De la Proposición 2.57, se deduce fácilmente que la relación entre las aplicaciones matriciales es ${}^{\lambda'}T(g(z)) = (L'(a(z)))^t.{}^{\lambda'}T(f(z)).L'(a(z))$, donde L' es el morfismo de cambio de base de λ' y $a : N \longrightarrow O'$ es la aplicación que satisface que $g(z) = f(z).a(z)$.*

Proposición 2.63 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) Para todo tensor T sobre M ${}^{\lambda'}T \circ f$ corresponde a un tensor de M.

ii) $L' \circ \tau(a) = \pm L(a)$ para todo a en O.

Demostración: Por la Proposición 2.60 se ve claramente que $ii)$ implica $i)$. Veamos que $i)$ implica $ii)$. Supongamos que para cualquier tensor T sobre M, ${}^{\lambda'}T \circ f$ corresponde a un tensor. De 2.60 tenemos, que para todo T tensor sobre M y para todo $z \in N$ y $a \in O$, $({}^{\lambda'}T \circ f)(z) = (L'(\tau(a)).(L(a))^{-1})^t.({}^{\lambda'}T \circ f)(z).L'(\tau(a))(L(a))^{-1}$. Luego necesariamente debe ser $L'(\tau(a)).(L(a))^{-1} = \pm Id_{n\times n}$ si $a \in O$, con lo cual $L'(\tau(a)) = \pm L(a)$.

$\square$

Observación 2.64 *El morfismo $(f,\tau) : \lambda \longrightarrow \alpha$ del Ejemplo 2.49 cumple que $L' \circ \tau = L$, pues L', que es el morfismo de cambio de base de $\alpha = (LM, \pi, GL(n), \cdot, \{\pi_i\})$, es igual a $Id_{GL(n)}$ y $\tau = L$.*

Nota: Cuando ${}^{\lambda}T \circ f$ corresponde a un tensor sobre M, no necesariamente corresponde al tensor T:

$$\begin{tikzcd}
 & {}^{\lambda}\bar{T} = {}^{\lambda'}T \circ f \arrow[ddd] & \\
{}^{\lambda}T & & {}^{\lambda'}T \arrow[ul, squiggly] \\
 & & T \arrow[ull] \arrow[u] \\
 & \bar{T} &
\end{tikzcd}$$

Cuando ${}^{\lambda'}T \circ f$ corresponde al tensor T, es decir ${}^{\lambda}T = {}^{\lambda'}T \circ f$, por la Proposición

$$\begin{tikzcd}
{}^{\lambda}T = {}^{\lambda'}T \circ f & & {}^{\lambda'}T \arrow[ll, squiggly] \\
 & T \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

2.61, se dede cumplir que ${}^{\lambda}T(z) = (C(z))^t.{}^{\lambda}T(z).C(z)$ para todo $z \in N$.

Definición 2.65 *Si $(f,\tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ es un morfismo de super espacios y T un tensor sobre M, decimos que T es invariante por (f,τ) si ${}^{\lambda'}T \circ f = {}^{\lambda}T$. Notaremos con $I_{(f,\tau)}$ al subconjunto de tensores invariantes por (f,τ).*

Observación 2.66 *Sea $\lambda = (N, \psi, R, O, \{e_i\})$ un super espacio sobre M y $\alpha = (LM, \pi, GL(n), \cdot, \{\pi_i\})$ el super espacio inducido por LM. Si (f, τ) es el morfismo del Ejemplo 2.49 resulta que*

$$[({}^{\alpha}T \circ f)(z)]_{ij} = [{}^{\alpha}T(f(z))]_{ij} =$$

$$= T(\pi(f(z)))(\pi_i(f(z)), \pi_j(f(z))) = T(\psi(z))(e_i(z), e_j(z)) = [{}^{\lambda}T(z)]_{ij}$$

Por lo tanto, ${}^{\alpha}T \circ f ={}^{\lambda} T$ para todo tensor sobre M, con lo cual todos los tensores sobre M son invariantes, es decir $I_{(f,\tau)} = \chi^0_2(M)$.

Observación 2.67 *Sea λ un super espacio sobre M tal que $\{e_i(z.a)\} = \{e_i(z)\}$. Para todo $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda$ morfismo de super espacios, se tiene que la aplicación de entrelazamiento es constantemente igual la matriz $Id_{n\times n}$. Luego, $I_{(f,\tau)} = \chi^0_2(M)$.*

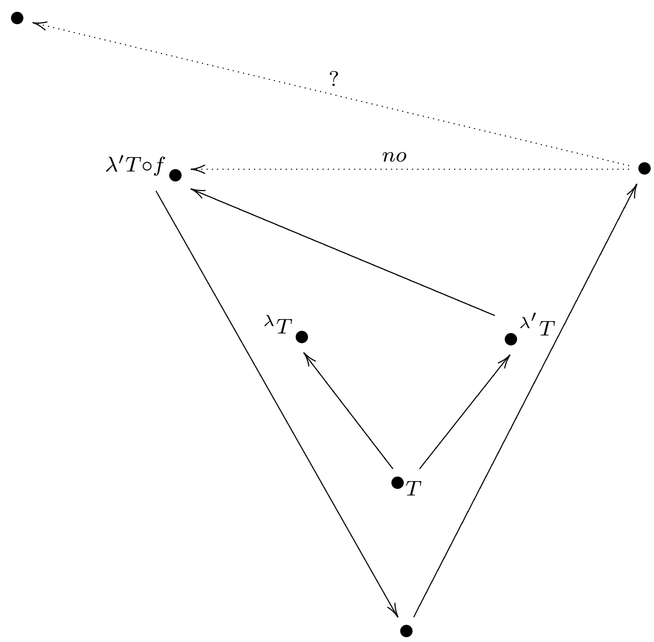
Observación 2.68 *El conjunto $I_{(f,\tau)} \subseteq \chi^0_2(M)$ es un subespacio lineal.*

Nota: Dado $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ algunos puntos a ver serían :

- Determinar el subconjunto de tensores invariantes $I_{(f,\tau)}$.

- Dado M y A un subconjunto de tensores sobre M, ver que propiedades debe tener λ, λ' y (f, τ) para que A este incluído en $I_{(f,\tau)}$.

- Si ${}^{\lambda'}T \circ f$ corresponde a un tensor, osea si existe $\bar{T}$ tensor sobre M tal que ${}^{\lambda}\bar{T} ={}^{\lambda'} T \circ f$, llamamos a ${}^{\lambda'}T \circ f$ la primera iteración por (f, τ) de T. En esta situación: ¿La segunda iteración, ${}^{\lambda'}\bar{T} \circ f$, será un tensor? Y en caso que lo sea y que además las siguientes iteraciones por (f, τ) también lo sean, ¿Cuando queda estable?, es decir si para alguna iteración el tensor resultante pertenece al subconjunto de tensores invariantes. El gráfico dado a continuación es un esquema de la situación planteada en este punto:



Con las mismas hipótesis veamos las siguientes proposiciones dos proposicines que arrojarán luz sobre este último punto:

Proposición 2.69 *Sea T un tensor sobre M. Hasta la k-ésima iteración por el morfismo (f,τ) corresponde a un tensor sobre M si y sólo si*

$$L^t.(C^t)^j.{}^{\lambda}T.C^j.L = (L' \circ \tau)^t.(C^t)^j.{}^{\lambda}T.C^j.(L' \circ \tau)$$

para todo $1 \leq j \leq k$.

Demostración: Se deduce de la Proposición 2.60.

□

Proposición 2.70 *Sea T un tensor tal que existe k de modo que la k-ésima iteración por (f,τ) es un tensor invariante. Luego T es un tensor invariante.*

Demostración: Notemos con ${}^{\lambda}T^j$ y ${}^{\lambda'}T^j$ las aplicaciones matriciales inducidas de la j-ésima iteración de T por los super espacios λ y λ' respectivamente. Como la k-ésima iteración es invariante, utilizando la Proposición 2.61 obtenemos que ${}^{\lambda}T^k = {}^{\lambda'}T^k{\circ}f = C^t.{}^{\lambda}T^k.C$. A su vez, ${}^{\lambda}T^k = ({}^{\lambda'}T^{k-1}{\circ}f) = C^t\,{}^{\lambda}T^{k-1}C = C^t.({}^{\lambda'}T^{k-2}{\circ}f).C = (C^t)^2.{}^{\lambda}T^{k-2}.C^2 = (C^t)^{k-1}.{}^{\lambda}T.C^{k-1}$. Por lo tanto, $(C^t)^{k-1}.{}^{\lambda}T.C^{k-1} = (C^t)^k.{}^{\lambda}T.C^k$, con lo cual ${}^{\lambda}T = C^t.{}^{\lambda}T.C$.

□

2.3.3 Tensores Invariantes.

Sea T un tensor sobre M y $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M. Dado $z \in N$ consideremos el grupo

$$G_T(z) := \{C \in GL(n) : C^t.{}^\lambda T(z).C = {}^\lambda T(z)\}$$

$G_T(z)$ es un subgrupo cerrado de $GL(n)$, pues es la preimagen de la matriz ${}^\lambda T(z)$ por la función $\gamma : GL(n) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ dada por $\gamma(B) = B^t.{}^\lambda T(z).B$. Es conocido el hecho de que que todo subgrupo cerrado de un grupo de Lie tiene estructura de subgrupo de Lie y además esta estructura resulta única (para esto ver [10]). Por lo tanto, $G_T(z)$ es un grupo de Lie para todo $z \in N$.

Definición 2.71 *LLamamos a $G_T(z)$ grupo de invarianza de T en z.*

En la subsección anterior hemos definido el concepto de tensor invariante por un morfismo. En términos del grupo de invarianza G_T se tiene que, si λ y λ' son dos super espacios sobre M y $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ es un morfismo con C la aplicación de entrelazamiento, luego

$$T \in I_{(f,\tau)} \text{ si y sólo si } C(z) \in G_T(z) \text{ para todo } z \in N.$$

Observación 2.72 *Dado $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M y T un tensor sobre M no nulo, entonces existe λ' super espacio sobre M y $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$, de modo que $T \notin I_{(f,\tau)}$ y $T \notin I_{(f',\tau')}$. Como T es no nulo, existe $z \in N$ tal que $G_T(z) \neq GL(n)$ (con respecto de λ). Luego, sea a una matriz inversible que no pertenezca al grupo de invarianza y consideremos el super espacio $\lambda' = (N, \psi, O, R, \{e'_i\})$, donde $\{e'_i(z)\} = \{e_i(z)\}.a$. Tomando $(f, \tau) = (Id_N, Id_O)$ se ve fácilmente lo observado.*

Observación 2.73 *Dado $\{T_1, \ldots, T_k\}$ un conjunto de tensores sobre M. Sean para cada $z \in N$ $\{G_{T_i}(z)\}_{i=1}^k$ los grupos de invarianza correspondientes. Si $\{T_1, \ldots, T_k\} \in I_{(f,\tau)}$, entonces la aplicación de entrelazamiento $C(z) \in \bigcap_{i=1}^{k} G_{T_i}(z)$ para todo z en N, con lo cual hay, si los grupos de invarianza son muy distintos, fuertes restricciones para $I_{(f,\tau)}$.*

El grupo de invarianza de un tensor T sobre la variedad M depende del tensor y del super espacio λ que estemos considerando. Una mejor notación del grupo de invarianza sería $G_T^\lambda(z)$ pero, para no sobrecargarla, a menos que no quede claro por el contexto, lo notaremos como lo hicimos en la definición.

El grupo de invarianza de un tensor es el mismo para todos los puntos de una fibra:

Proposición 2.74 *Si $z, z' \in N$ tal que $\psi(z) = \psi(z')$, entonces*

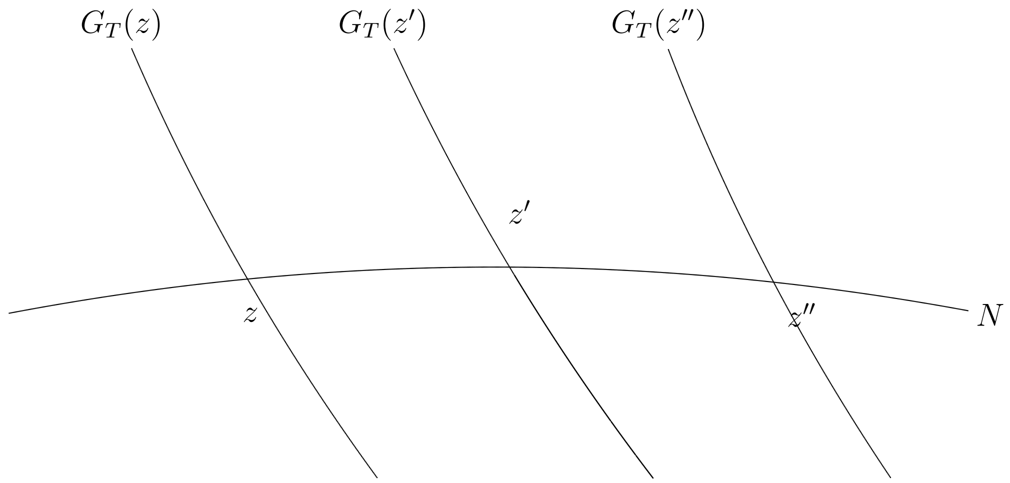
$$G_T(z) \simeq G_T(z').$$

Demostración: Como z y z' están en la misma fibra, existe $a \in O$ tal que $z' = z.a$. Se ve fácilmente que $\varphi_a : G_T(z') \longrightarrow G_T(z)$, dado por $\varphi_a(D) = L(a).D.L(a^{-1})$, es decir $\varphi_a(D) = Ad(L(a))(D)$, es un homeomorfismo de grupos de Lie.

□

Definición 2.75 *LLamaremos espacio de invarianza al subconjunto de $N \times GL(n)$ dado por*

$$F_T : \{(z, g) : z \in N,\ g \in G_T(z)\}.$$



Ejemplo 2.76 *Si existe un tensor T tal que su aplicación matricial inducida es ${}^\lambda T = \alpha.Id_{n\times n}$ con $\alpha \neq 0$, caso que trataremos más adelante, entonces $G_T(z) = O(n)$ para todo $z \in N$, con lo cual $F_T = N \times O(n)$ tiene estructura de fibrado principal trivial.*

Ejemplo 2.77 *Si T es el tensor nulo es $F_T = N \times GL(n)$*

Ejemplo 2.78 *Sea* $\lambda = (LM\times GL(n), \psi, GL(n),\ \cdot\ , \{e_i\})$ *el super espacio sobre* LM *del Ejemplo 2.24. Si* $\dim M = n$ *llamamos, sea* $m = \frac{n+n^2}{2}$*. Sea* T *el tensor cuya aplicación matricial inducida es* ${}^{\lambda}T = \begin{pmatrix} 0 & Id_{m\times m} \\ -Id_{m\times m} & 0 \end{pmatrix}$*, luego* $F_T = LM \times GL(n) \times \mathcal{S}_m$*, donde* $\mathcal{S}_m$ *es el grupo simpléctico de* $\mathbb{R}^{2m\times 2m}$*.*

Observación 2.79 *En estos ejemplos* F_T *tiene estructura de variedad y además es una variedad producto. En general, no es de esperar que pase esto para cualquier tensor. Si* A *es una matriz, el grupo de invarianza es* $G_A = \{C \in GL(n) : C^t.A.C = A\}$*. Si ahora,* $A(t)$ *es una aplicación matricial no constante, los grupos de invarianza* $G_{A(t)}$ *pueden ser muy sensibles a los pequeños cambios. Por ejemplo, si* $A(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*, entonces* $G_{A(0)} = GL(2)$ *y si* $t \neq 0$ *tenemos que* $G_{A(t)} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ *donde* $a, b \in \mathbb{R}$*.*

Observación 2.80 *Sea* $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ *un super espacio sobre una variedad* M *de dimensión* n*. Si* T *es un tensor sobre* M *consideremos la aplicación diferenciable* $h : N \times GL(n) \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$ *dada por*

$$h(z, A) = ({}^{\lambda}T(z),\ A^t.{}^{\lambda}T(z).A)$$

Si Δ *es la subvariedad diagonal de* $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n}$*, es* $F_T = h^{-1}(\Delta)$*. Por lo tanto, si* h *es transversal a* Δ*,* F_T *tendrá estructura de variedad con igual dimensión que* N*. Con lo cual, una condición necesaria para que esto pueda suceder es que los grupos* G_T *sean discretos. Si* $\dim(M) \geq 2$*, la aplicación* h *no es transversal a la variedad diagonal* Δ*, ya que la dimensión de los grupos de Lie* $G_A = \{C \in GL(n) : C^t.A.C = A\}$ *es mayor que cero y por lo tanto, si* F_T *tiene estructura de variedad, tendrá dimensión mayor que la de* N*.*

Nota: Volviendo a los tensores invariantes. Si $C : N \longrightarrow GL(n)$ es la aplicación de entrelazamiento del morfismo (f, τ), consideremos $\tilde{C} : N \longrightarrow N \times GL(n)$ dada por $\tilde{C}(z) = (z, C(z))$. Luego,

$$T \in I_{(f,\tau)} \Longleftrightarrow Img(\tilde{C}) \subseteq F_T\ .$$

Tensores no degenerados.

Sean λ y λ' dos super espacios sobre M y $(f,\tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ un morfismo. Sea T un tensor sobre M no degenerado, por ejemplo una métrica Riemanniana, y supongamos además que $T \in I_{(f,\tau)}$. Como T es no degenerado, ${}^{\lambda}T(z)$ es una matriz inversible para todo $z \in N$. Luego, si $C \in G_T(z)$ se tiene que $C^t.{}^{\lambda}T(z).C =^{\lambda} T(z)$, por lo tanto $\det(C) = \pm 1$. Como $G_T(z) \subseteq \{C \in GL(n) : \det C = \pm 1\}$ y $\tilde{C} : N \longrightarrow F_T$, pues T es invariante por (f,τ), tenemos que $\det(C(z)) = \pm 1$ para todo $z \in N$. Con lo cual si N es conexa se tiene que

$$\det(C(z)) = 1 \text{ ó } -1.$$

También se puede observar por 2.59, que una condición necesaria para que un tensor invariante sea no degenerado es que $\mid \det L(a) \mid = \mid \det(L' \circ \tau)(a) \mid$ para todo $a \in O$. Si además N es conexa resulta que

$$\det(L(a)) = \det((L' \circ \tau)(a)) \quad \text{o} \quad \det(L(a)) = -\det((L' \circ \tau)(a)).$$

Tensores diagonales constantes:

Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre la variedad M, cuya dimensión es n. Decimos que λ admite representaciones tensoriales *diagonales constantes* si

existe T, tensor sobre M, tal que ${}^{\lambda}T(z) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$, con $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}$ para todo $z \in N$.

Sea $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, llamamos I_ν a la matriz diagonal de $\mathbb{R}^{n \times n}$ dada por

$$I_\nu = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \ddots^{\nu} & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots^{n-\nu} & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ si } \nu \geq 1 \ \text{ e } \ I_0 = Id_{n \times n}$$

Decimos que un super espacio λ admite representaciones tensoriales del tipo I_ν si existe T, tensor sobre M, tal que ${}^\lambda T \equiv I_\nu$. Notamos con O_ν al grupo ortogonal de índice ν de $\mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, $O_\nu = \{A \in R^{n\times n} : A^t.I_\nu.A = I_\nu\}$, y con $O(n)$ al grupo ortogonal de índice 0 de $\mathbb{R}^{n\times n}$, es decir, si $\nu = 0$ se tiene que $I_0 = Id_{n\times n}$ y $O_0 = O(n)$ que es el grupo ortonormal de matrices de $\mathbb{R}^{n\times n}$. Si $\nu = 1$, O_ν es el grupo Lorentziano.

El siguiente resultado proporciona varias condiciones para la existencia de tensores con este tipo de representaciones:

Proposición 2.81 *Sea M una variedad de dimensión n y λ un super espacio sobre esta. Si $0 \leq \nu \leq n-1$, son equivalentes:*

i) $L : O \longrightarrow GL(n)$ satisface que $Img(L) \subseteq O_\nu$.

ii) λ admite representaciones tensoriales del tipo I_ν.

iii) Existe g una métrica semi-Riemanniana sobre M de índice ν tal que $\{e_1(z), \ldots, e_n(z)\}$ es base ortonormal de $M_{\psi(z)}$.

iv) Existe g una métrica semi-Riemanniana sobre M, de índice ν, de modo que para algún $p_0 \in M$ se cumple que $\{e_1(z), \ldots, e_n(z)\}$ es base ortonormal si $\psi(z) = p_0$.

v) Existe T tensor sobre M de modo que para algún $p_0 \in M$ resulta que ${}^\lambda T(z) = I_\nu$ si z es tal que $\psi(z) = p_0$.

Demostración :

i) $\Longrightarrow$ *ii)* Sea $F : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ la función diferenciable dada por $F(z) = I_\nu$. Como $Img(L) \subseteq O_\nu$, se tiene que $F(z.a) = I_\nu = (L(a))^t.I_\nu.L(a) = (L(a))^t.F(z).L(a)$. Por la Proposición 2.17, existe un tensor T sobre M tal que ${}^\lambda T = F = I_\nu$.

ii) $\Longrightarrow$ *iii)* Dado que existe un tensor T que satisface que ${}^\lambda T(z) = I_\nu$, consideramos $g(p)(v,w) = T(p)(v,w)$. El tensor g es una métrica semi-Riemanniana de índice ν. Si $z \in N$, $g(\psi(z))(e_i(z), e_j(z)) = ({}^\lambda T(z))_{ij}$, con lo cual $\{e_1(z), \ldots, e_n(z)\}$ es una base ortonormal de $M_{\psi(z)}$.

iii) $\Longrightarrow$ *iv)* Es inmediato.

$iv) \Longrightarrow i)$ Sea z_0 tal que $\psi(z_0) = p_0$. Ahora bien, $\psi(z_0.a) = \psi(z_0)$ si $a \in O$, luego ${}^{\lambda}g(z_0.a) = I_\nu =^{\lambda} g(z_0)$. Entonces, $I_\nu =^{\lambda} g(z_0.a) = (L(a))^t.{}^{\lambda}g(z_0).L(a) = (L(a))^t.I_\nu.L(a)$, con lo cual $L(a) \in O_\nu$ para todo $a \in O$.

$ii) \Longrightarrow v)$ Es inmediato.

$v) \Longrightarrow i)$ Similar a $iv) \Longrightarrow i)$.

□

Observación 2.82 *Que la variedad M admita una métrica de índice ν no implica que un super espacio sobre M admita representaciones tensoriales constantes de tipo I_ν. El super espacio inducido por el fibrado de bases $\lambda = (LM, \pi, GL(n), \cdot, \{\pi_i\})$ no admite representaciones tensoriales constantes no nulas, es decir que si T es un tensor sobre M y ${}^{\lambda}T \equiv A$ constante, entonces A es la matriz nula. Esto se ve fácilmente, ya que si ${}^{\lambda}T \equiv A$ se debe cumplir que $A = a^t.A.a$ para todo a en $GL(n)$. En particular, λ no admite representaciones tensoriales del tipo I_ν.*

Si M no admite métricas de índice ν, entonces cualquier super espacio sobre M no admitirá representaciones tensoriales del tipo I_ν. Variedades de este tipo son, por ejemplo, aquellas que son compactas y que tienen característica de Euler distinta de cero [4], como es el caso de las esferas de dimensión par.

Lema 2.83 *Sea $\nu = 1, \ldots, n-1$. Luego*

$$O(n) \cap O_\nu = \{D \in O(n) : D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ con } A \in O(\nu) \text{ y } B \in O(n-\nu)\}.$$

Demostración :

$(\supseteq)$. Sea $D = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ con $A \in O(\nu)$ y $B \in O(n-\nu)$. Luego,

$$D^t.D = \begin{pmatrix} A^t.A & 0 \\ 0 & B^t.B \end{pmatrix} = Id_{n\times n} \text{ y } D^t.I_\nu.D = \begin{pmatrix} -A^t.A & 0 \\ 0 & B^t.B \end{pmatrix} = I_\nu.$$

$(\subseteq)$. Sea $D \in O(n) \cap O_\nu$, escribimos D como $\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_4 & D_5 \end{pmatrix}$, donde $D_1 \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$, $D_2 \in \mathbb{R}^{\nu\times(n-\nu)}$, $D_3 \in \mathbb{R}^{(n-\nu)\times(n-\nu)}$ y $D_4 \in \mathbb{R}^{(n-\nu)\times\nu}$. Las matrices de la forma $W = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, con $A \in O(\nu)$ y $B \in O(n-\nu)$, son ortonormales, entonces están en $O(n) \cap O_\nu$, Como $O(n) \cap O_\nu$ es un grupo, $D.W \in O(n) \cap O_\nu$ para toda W de este tipo. Se sigue que:

$$(D.W)^t.D.W = Id_{n\times n}$$

$$\begin{pmatrix} A^t.D_1^t.D_1.A + A^t.D_4^t.D_4.A & A^t.D_1^t.D_2.B + A^t.D_4^t.D_3.B \\ B^t.D_2^t.D_1.A + B^t.D_3^t.D_4.A & B^t.D_2^t.D_2.B + B^t.D_3^t.D_3.B \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} Id_{\nu\times\nu} & 0 \\ 0 & Id_{(n-\nu)\times(n-\nu)} \end{pmatrix}$$

y $(D.W)^t.I_\nu.D.W = I_\nu$

$$\begin{pmatrix} -A^t.D_1^t.D_1.A + A^t.D_4^t.D_4.A & -A^t.D_1^t.D_2.B + A^t.D_4^t.D_3.B \\ -B^t.D_2^t.D_1.A + B^t.D_3^t.D_4.A & -B^t.D_2^t.D_2.B + B^t.D_3^t.D_3.B \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -Id_{\nu\times\nu} & 0 \\ 0 & Id_{(n-\nu)\times(n-\nu)} \end{pmatrix}$$

De estas ocho ecuaciones matriciales podemos deducir:

a) $A^t.D_1^t.D_1.A = Id_{\nu\times\nu}$

b) $A^t.D_1^t.D_2.B = 0$

c) $B^t.D_3^t.D_3.B = Id_{(n-\nu)\times(n-\nu)}$

d) $B^t.D_3^t.D_4.A = 0$

De a) y c) tomando $A = Id_{\nu\times\nu}$ y $B = Id_{(n-\nu)\times(n-\nu)}$ tenemos que $D_1 \in O(\nu)$ y $D_3 \in O(n-\nu)$. Luego, suponiendo que $A = D_1^t$ y $B = Id_{(n-\nu)\times(n-\nu)}$, de b) resulta que $D_2 = 0$. Si tomamos $B = D_3^t$ y $A = Id_{\nu\times\nu}$ de d) sale que $D_4 = 0$.

□

Observación 2.84 *Sea* $1 \leq \nu \leq n-1$, *luego*

$$O(n) \cap O_1 \cap \ldots \cap O_\nu := \{ \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \ddots^{\nu} & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & A \end{pmatrix} : A \in O(n-\nu)\}$$

Proposición 2.85 *Sea M un variedad de dimensión n, λ un super espacio sobre M y $1 \leq \nu \leq n-1$. λ admite representaciones tensoriales de tipo I_0 y I_ν si y sólo si existen $L_1 : O \longrightarrow O(\nu)$ y $L_2 : O \longrightarrow O(n-\nu)$ aplicaciones diferenciables tales que el morfismo de cambio de base de λ es de la forma*

$$L(a) = \begin{pmatrix} L_1(a) & 0 \\ 0 & L_2(a) \end{pmatrix}.$$

Demostración :

$\Longleftarrow$) Si el morfismo de cambio de base $L : O \longrightarrow GL(n)$ es de esta forma, entonces las aplicaciones constantes de N en $\mathbb{R}^{n\times n}$ dadas por

$$^{\lambda}T_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \overset{n}{\ddots} & \\ & & 1 \end{pmatrix} = I_0$$

y

$$^{\lambda}T_2 = \begin{pmatrix} -1 & & & & & \\ & \overset{\nu}{\ddots} & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \overset{n-\nu}{\ddots} & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} = I_\nu$$

corresponden a tensores, pues satisfacen la propiedad que caracteriza a los tensores sobre M.

$\Longrightarrow$) Si exiten dos tensores T_1 y T_2 sobre M que satisfacen que $^{\lambda}T_1 = I_\nu$ y $^{\lambda}T_2 = I_\nu$, luego, por la propiedad de invarianza, $Img\ L \subseteq O(n) \cap O_\nu$. Del Lema 2.83 se sigue lo que queríamos probar.

$\square$

Proposición 2.86 *Sea $\lambda = (N, R, O, \psi, \{e_i\})$ un super espacio sobre M cuyo grupo O es conexo. λ admite representaciones tensoriales del tipo I_0, I_1, $\ldots, I_\nu$ con $1 \leq \nu \leq n-1$ si y sólo si*

$$L(a) = \begin{pmatrix} Id_{\nu\times\nu} & 0 \\ 0 & f(a) \end{pmatrix}$$

con $f : O \longrightarrow O(n-\nu)$ diferenciable.

Demostración: Como λ admite representaciones de tipo $I_0,\ I_1,\ \ldots, I_{\nu-1}$ y I_ν, $L(a) \in O(n) \cap O_1 \cap \ldots \cap O_\nu$ para todo $a \in O$. Por la Observación 2.84 sabemos que $L(a) = \begin{pmatrix} \pm 1 & & & \\ & \ddots^{\nu} & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & B \end{pmatrix}$ con $B \in O(n-\nu)$. Como $L : O \longrightarrow GL(n)$ es diferenciable y O es conexo, el menor principal de $\nu \times \nu$ debe ser constante. Por otro lado, se debe cumplir que $L(a.b) = L(a).L(b)$. Con lo cual si A, de la forma $\{\begin{pmatrix} \pm 1 & & \\ & \ddots^{\nu} & \\ & & \pm 1 \end{pmatrix}\}$, es la matriz constante que satisface que $L(a) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & f(a) \end{pmatrix}$ para todo $a \in O$, se tiene que $A = A^2$. Por lo tanto, $A = Id_{\nu\times\nu}$.

La recíproca se obtiene verificando que $Id_{n\times n}, I_1, \ldots, I_\nu$ corresponden a tensores sobre M.

$\square$

Observación 2.87 *Un super espacio λ con grupo conexo admite todas las representaciones tensoriales constantes de tipo I_ν con $\nu = 0, 1, \ldots, n-1$ si sólo si $L : O \longrightarrow GL(n)$ es constantemente la matriz identidad.*

Observación 2.88 *Hasta aquí hemos considerado representaciones constantes del tipo I_ν. Vale lo mismo para representaciones del tipo ${}^{\lambda}T(z) = f(z).I_\nu$, donde $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable , constante en las fibras y no siempre nula .*

Tensores diagonales constantes y morfismos.

Sean $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ y $\lambda' = (N', \psi', O', R', \{e_i'\})$ dos super espacios sobre una variedad M y $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ un morfismo. Supongamos que λ admite representaciones tensoriales de tipo I_ν. Esto, como vimos, impone ciertas restricciones a λ. Debido a como se comportan las aplicaciones matriciales inducidas por los tensores con respecto a la acción del grupo O sobre N, de la Proposición 2.81, sabemos que $L(O) \subseteq O_\nu$.

Sea T un tensor sobre M tal que ${}^{\lambda}T = I_\nu$, entonces $G_T(z) = O_\nu$ para todo $z \in N$. En este caso el conjunto de invarianza de T tiene estructura de variedad. Precisamente, F_T es $N \times O_\nu$. Podemos descomponer F_T en :

$$F_T = N \times O_\nu = F_T^+ \cup F_T^-$$

donde $F_T^+ = N \times \{D \in O_\nu : \det D = 1\}$ y $F_T^- = N \times \{D \in O_\nu : \det D = -1\}$. En el caso que $\nu = 0$ $F_T^+ = N \times SL(n)$. Si pedimos que T sea invariante por (f, τ), tenemos que $C(z) \in G_T(z) = O_\nu$ para todo z en N. Al agregar la hipótesis de que N sea conexa, vemos que $\tilde{C}(z) = (z, C(z)) \in F_T^+$ ó $\tilde{C}(z) \in F_T^-$ para todo $z \in N$.

Otra cosa para agregar, es que si un tensor cuya representación matricial ${}^\lambda T = I_\nu$ es invariante por (f, τ), entonces $L'|_{Img(\tau)}(O') \subseteq O_\nu$. Pues, $I_\nu ={}^{\lambda'} T(f(z.a)) = (L'(\tau(a)))^t.{}^{\lambda'}T(f(z)).L'(\tau(a))$ y como T es invariante, $I_\nu = (L'(\tau(a)))^t.{}^{\lambda}T(z).L'(\tau(a))$ $= (L'(\tau(a)))^t.I_\nu.L'(\tau(a))$, con lo cual $L'(\tau(a)) \in O_\nu$.

Observación 2.89 *Si algún tensor diagonal de tipo $f.I_\nu$, para f no nula y constantes en las fibras, es invariante, entonces todos los tensores diagonales del tipo I_ν lo son.*

Proposición 2.90 *Sea λ un super espacio que admite tensores del tipo I_ν y $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ un morfismo. Sea T un tensor sobre M invariante por (f, τ) y cuya representación con respecto a λ es ${}^\lambda T = I_\nu$. Luego, se cumple:*

- ${}^{\lambda'}T|_{Img(f)} = I_\nu$.
- *Si $\tau : O \longrightarrow O'$ es suryectiva, entonces ${}^{\lambda'}T = I_\nu$.*

Demostración: Como $T \in I_{(f,\tau)}$ se tiene que ${}^{\lambda'}T(f(z)) ={}^{\lambda} T(z) = I_\nu$ para todo $z \in N$. Que τ sea suryectiva implica que f es suryectiva, por lo tanto ${}^{\lambda'}T = I_\nu$.

□

2.4 Conexiones y Formas en Super Espacios.

Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre la variedad M de dimensión n. Sea $\dim O = k$ y s la dimensión de los grupos estabilizadores S_z si $z \in N$. De la Proposición 2.43, sabemos que la $\dim N = n + k - s$. Notamos con $\mathfrak{o}$ el algebra de Lie de O, con e la unidad de O y con $L : O \longrightarrow Gl(n)$ el morfismo de cambio de base de λ. Notamos con $L(a)^i_j$ la entrada (i, j) de la matriz $L(a)$.

2.4.1 Distribución Vertical.

Como ψ es una submersión, naturalmente tenemos definida la distribución vertical. Es decir, sea $z \in N$ llamamos *subespacio vertical* de λ en z a $V_z = \ker \psi_{*_z}$. El subespacio vertical es el espacio tangente en z de la fibra $\psi^{-1}(\psi(z))$ considerada como subvariedad de N. La dimensión de V_z es $k - s$. Para cada $z \in N$, se tiene una función diferenciable $\sigma_z : O \longrightarrow N$ dada por $\sigma_z(a) = z.a$. Si $X \in \mathfrak{o}$, definiendo

$$V(X)(z) = (\sigma_z)_{*_e}(X)$$

se ve que $V(X)$ es un campo tangente sobre N, que en cada punto vive en la distribución vertical, o sea $V(X)(z) \in V_z$ para todo z en N. Si exp es la aplicación exponencial inducida por alguna conexión del grupo O, $V(X) = D|_{t=0}(z. \exp(tX))$. Se puede ver sin dificultad que si el grupo O actua efectivamente (i.e. si $R_a \equiv Id_N$ implica necesariamente que $a = e$) y si $X \neq 0$, $V(X)$ no es el campo nulo. Pues, si $V(X)(z) \equiv 0$, su flujo es $z. \exp(tX) = z$ y por lo tanto, $\exp(tX) = e$ para todo t y esto pasa solamente si $X = 0$.

Si O actua sin punto fijo sobre N y para algún z_0 se cumple que $V(X)(z_0) = 0$, entonces el flujo en z_0 está dado por $z_0. \exp(tX) = z_0$ para todo t, con lo cual $\exp(tX) = e$ y esto pasa si y sólo si $X = 0$. El campo $V(X)$ nunca se anula si $X \neq 0$, y $(\sigma_z)_{*_e} : \mathfrak{o} \longrightarrow V_z$ resulta un isomorfismo lineal.

De todos modos, sin importar como actue el grupo O, si $\{X_1, \ldots, X_k\}$ es una base de $\mathfrak{o}$ y $V_i = V(X_i)$ se tiene que

$$< V_1(z), \ldots, V_k(z) >= V_z \text{ para todo z} \in N.$$

O sea, que $(\sigma_z)_{*_z}(\mathfrak{o}) = V_z$. Como ya mencionamos, los grupos estabilizadores S_z son subgrupos de Lie de O de dimensión s. $T_eS_z \subseteq T_eO = \mathfrak{o}$. Si $\alpha(t)$ es una curva en S_z, que en 0 pasa por e, considerandola como una curva de O, tenemos que $(\sigma_z)_{*_e}(\dot{\alpha}(0)) = D|_{t=0}(z.\alpha(t)) = 0$. Por cuestión de dimensión se obtiene la igualdad

$$\ker(\sigma_z)_{*_e} = T_eS_z$$

Si para todo punto z de N el espacio tangente en la identidad de su estabilizador S_z es el mismo subespacio vectorial de $\mathfrak{o}$, entonces la distribución vertical es trivial. Ya que, si $\{X_{k-s+1}, \ldots, X_k\}$ es una base de T_eS_z y la completamos a una base de $\mathfrak{o}$, por ejemplo $\{X_1, \ldots, X_{k-s}, X_{k-s+1}, \ldots, X_k\}$, resulta que para todo z en N

$$\{V_1(z), \ldots, V_{k-s}(z)\} \text{ es una base de } V_z.$$

Formas θ^i:

Las siguientes 1-formas sobre N son inducidas naturalmente por las aplicaciones de referencia $\{e_i\}$ de λ. Sea $b \in N_z$, a $\psi_{*_z}(b) \in M_{\psi(z)}$ lo podemos escribir como

$$\psi_{*_z}(b) = \sum_{i=1}^{n} \theta^i(z)(b)e_i(z)$$

donde $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ son 1-formas sobre N linealmente independientes. Pues si suponemos lo contrario, es decir que para algún $z_0 \in N$ se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i\theta^i(z_0) \equiv 0$, como ψ es una submersión, existen $\{b_j\}_{j=1}^n \in N_{z_0}$ tales que $\psi_{*_{z_0}}(b_j) = e_j(z_0)$, y por lo tanto $0 = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\theta^i(z_0)(b_j) = \gamma_j$ para $1 \leq j \leq n$.
Si $b \in V_z$, entonces $\theta^i(z)(b) = 0$. Si $b \in N_z$ y se anulan $\theta^i(z)(b) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces $\psi_{*_z}(b) = 0$, con lo cual $b \in V_z$. O sea $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ es una base del anulador del subespacio vertical.
Veamos como se comportan con respecto a la acción del grupo O:

Proposición 2.91 *Para todo $z \in N$, $b \in N_z$ y $a \in O$ tenemos que*

$$L(a).\begin{pmatrix} \theta^1(z.a)((R_a)_{*_z}(b)) \\ \vdots \\ \theta^n(z.a)((R_a)_{*_z}(b)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta^1(z)(b) \\ \vdots \\ \theta^n(z)(b) \end{pmatrix}$$

Demostración: Como $\psi \circ R_a = \psi$, $\psi_{*_{z.a}}((R_a)_{*_z}(b)) = \psi_{*_z}(b)$, de lo cual se sigue la igualdad $\sum_{l=1}^{n} \theta^l(z.a)((R_a)_{*_z}(b))e_l(z.a) = \sum_{s=1}^{n} \theta^s(z)(b)e_s(z)$. Luego,

$$\sum_{l=1}^{n} \theta^l(z.a)((R_a)_{*_z}(b)).(\sum_{r=1}^{n} L(a)_l^r e_r(z)) = \sum_{s=1}^{n} \theta^s(z)(b)e_s(z)$$

y por lo tanto,

$$\sum_{r=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \theta^l(z.a)\,((R_a)_{*_z}(b))\, L(a)_l^r \right) e_r(z) = \sum_{s=1}^{n} \theta^s(z)(b)e_s(z)$$

Como $\{e_i(z)\}_{i=1}^n$ es base de $M_{\psi(z)}$, para todo $r = 1, \ldots, n$ tenemos que

$$\sum_{l=1}^{n} L(a)_l^r.\theta^l(z.a)((R_a)_{*_z}(b)) = \theta^r(z)(b)$$

□

Observación 2.92 *En particular, si $b_j \in N_z$ es tal que $\psi_{*_z}(b_j) = e_j(z)$, al trasladar el vector b_j, mediante la acción del grupo, a los espacios tangentes de la fibra tenemos que*

$$\theta^i(z.a)((R_a)_{*_z}(b_j)) = L(a^{-1})^i_j$$

Observación 2.93 *Si el morfismo de cambio de base $L = Id_{n\times n}$, como en los Ejemplos 2.24 y 2.25, las 1-formas θ^i son invariantes por la acción de grupo, es decir*

$$\theta^i(z.a)((R_a)_{*_z}(b)) = \theta^i(z)(b)$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. En este caso, si b es tal que $\psi_{*_z}(b) = e_i(z)$, resulta que $\psi_{*_{z.a}}((R_a)_{*_z}(b)) = e_i(z)$.

Formas ω^i_j:

Consideremos un poco más de estructura sobre M. Dotemos a M con una conexión afín ∇. Sea $K : TTM \longrightarrow TM$ la función de conexión inducida por ∇. Para cada $j = 1, \ldots, n$ las aplicaciones $e_j : N \longrightarrow TM$ son campos a lo largo de la función ψ.

$$\begin{tikzcd}
TN \arrow[d, "\pi"] & TM \arrow[d, "\pi"] \\
N \arrow[ur, "e_j"] \arrow[r, "\psi"] & M
\end{tikzcd}$$

Luego, para $b \in N_z$ es $(e_j)_{*_z}(b) \in (TM)_{e_j(z)}$ y por lo tanto, podemos calcular la derivada covariante de e_j a lo largo de ψ con respecto a b, es decir aplicarle la función de conexión, $\nabla_b e_j = K((e_j)_{*_z}(b)) \in M_\psi(z)$. Sean ω^i_j las 1-formas de N definidas por

$$K\left((e_j)_{*_z}(b)\right) = \sum_{i=1}^{n} \omega^i_j(b)(z) e_i(z)$$

Proposición 2.94 *Si ∇ es la conexión de Levi-Civita de una métrica g sobre M y $\{e_i\}_{i=1}^n$ es una base ortogonal constante (i.e. $g(e_i(z), e_i(z)) = a_{ij}\delta_{ij}$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$) entonces*

$$0 = \omega^i_j(z)(b)\|e_i(z)\|^2 + \omega^j_i(z)(b)\|e_j(z)\|^2$$

Demostración: Dado $b \in N_z$, $0 = b(g \circ \psi(e_i, e_j)) = g(\psi(z))(\nabla_b e_i, e_j(z)) + g(\psi(z))(e_i(z), \nabla_b e_j(z)) = \omega^j_i(z)(b)\|e_j(z)\|^2 + \omega^i_j(z)(b)\|e_i(z)\|^2$

$\square$

Observación 2.95 *No necesariamente estas 1-formas son linealmente independientes. De acuerdo con la proposición anterior, si las aplicaciones de referencia* $\{e_i(z)\}_{i=1}^n$ *son una base ortonormal para todo* z *en* N*, entonces* $\omega_j^i = -\omega_i^j$.

Proposición 2.96 *Sea* $b \in V_z$ *y* $X \in \mathfrak{o}$ *tal que* $b = (\sigma_z)_{*_e}(X)$*, luego*

$$\omega_j^i(z)(b) = (L_j^i)_{*_e}(X)$$

También podemos escribir $\omega_j^i(z)(b) = D|_{t=0}(L_j^i(\exp(tX)))$.

Demostración: Sea (U, x) una carta de M tal que $\psi(z) \in U$ y sea $(TU, \bar{x})$ la carta de TM inducida por ella. Veamos que coordenadas tiene $(e_j)_{*_z}(b)$, que es un elemento de $(TM)_{e_j(z)}$, con respecto a la base $\{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^r}\}_{r=1}^{2n}$. Si $1 \leq l \leq n$,

$$(e_j)_{*_z}(b)(\bar{x}^l) = b(x^l \circ \pi \circ e_j) = b(x^l \circ \psi) = \psi_{*_z}(b)(x^l) = 0$$

pues b es vertical. Con respecto a los siguientes n elementos de esta base, como $b = (\sigma_z)_{*_e}(X)$, $(e_j)_{*_z}(b)(\bar{x}^{n+l}) = (e_j \circ \sigma_z)_{*_e}(X)(\bar{x}^{n+l}) = D|_{t=0}\left(\bar{x}^{n+l} \circ e_j \circ \sigma_z \circ \exp(tX)\right)$, con lo cual

$$(e_j)_{*_z}(b)(\bar{x}^{n+l}) = D|_{t=0}(e_j(z.\exp(tX))(x^l)) = D|_{t=0}(\sum_{s=1}^n e_s(z)(x^l) L_j^s(\exp(tX)))$$

$$(e_j)_{*_z}(b)(\bar{x}^{n+l}) = \sum_{s=1}^n e_s(z)(x^l) D|_{t=0}\left(L_j^s(\exp(tX))\right)$$

entonces,

$$K((e_j)_{*_z}(b)) = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{s=1}^n e_s(z)(x^l) D|_{t=0}(L_j^s(\exp(tX)))\right) . \frac{\partial}{\partial x^l}|_{\psi(z)} =$$

$$= \sum_{s=1}^n \left(\sum_{l=1}^n e_s(z)(x^l) . \frac{\partial}{\partial x^l}|_{\psi(z)}\right) . D|_{t=0}(L_j^s(\exp(tX))) = \sum_{s=1}^n D|_{t=0}(L_j^s(\exp(tX))).e_s(z)$$

Por lo tanto $\omega_j^s(z)(b) = D|_{t=0}(L_j^s(\exp(tX))$.

□

Observación 2.97 *Sea* X_1 *y* X_2 *dos vectores de* $\mathfrak{o}$*. Si* $(\sigma_z)_{*_e}(X_1) = (\sigma_z)_{*_e}(X_2)$ *se tiene que*

$$L_{*_e}(X_1) = L_{*_e}(X_2)$$

Esta observación se sigue inmediatamente de que $(L^i_j)_{*_e}(X_1) = \omega^i_j(z)((\sigma_z)_{*_e}(X_1)) = \omega^i_j(z)((\sigma_z)_{*_e}(X_2)) = (L^i_j)_{*_e}(X_2)$. *Esto nos dice algo más importante: la indepencia en el subespacio vertical de las formas* ω^i_j *con respecto a la conexión de* M . *Pues, supongamos que tenemos en* M *dos conexiones* ∇_1 *y* ∇_2 *y sean* K_1 *y* K_2 *las funciones de conexión respectivas. Para* $b \in N_z$

$$K_1((e_j)_{*_z}(b)) = \sum_{i=1}^{n} \omega^i_{1j}(z)(b)e_i(z)$$

$$K_2((e_j)_{*_z}(b)) = \sum_{i=1}^{n} \omega^i_{2j}(z)(b)e_i(z)$$

donde ω^i_{1j} *y* ω^i_{2j} *son las 1-formas inducidas. Si* $b = (\sigma_z)_{*_e}(X)$, *por la proposición anterior* $\omega^i_{1j}(z)(b) = (L^i_j)_{*_e}(X)$ *y* $\omega^i_{2j}(z)(b) = (L^i_j)_{*_e}(X)$, *por lo tanto* $\omega^i_{1j}(z)(b) = \omega^i_{2j}(z)(b)$, *con lo cual tenemos la siguiente proposición:*

Proposición 2.98 *Sean* ∇_1 *y* ∇_2 *dos conexiones sobre* M. *Consideremos* $\{\omega^i_{1j}\}$ *y* $\{\omega^i_{2j}\}$ *las 1-formas inducidas por estas, entonces si* $b \in V_z$

$$\omega^i_{1j}(z)(b) = \omega^i_{2j}(z)(b)$$

para todo $1 \le i, j \le n$ *y para todo* $z \in N$.

Observación 2.99 *Podemos decir algo un poco más general en la dirección de la Observación 2.97. Esto es que*

$$\ker(\sigma_z)_{*_e} \subseteq \ker(L_{*_e})$$

Si $(\sigma_z)_{*_e}(X) = 0$, *entonces para cada* $1 \le i \le n$ *se cumple que* $0 = (e_i)_{*_z}((\sigma_z)_{*_e}(X))$ $= D|_{t=0}(\sum_{r=1}^{n} e_r(z).L^r_i(\exp(tX))) = \sum_{r=1}^{n} e_r(z)D|_{t=0}(L^r_i(\exp(tX)))$, *y como* $\{e_r(z)\}_{r=1}^n$ *es una base de* $M_{\psi(z)}$, *entonces* $(L^r_i)_{*_e}(X) = D|_{t=0}(L^r_i(\exp(tX))) = 0$ *para todo* $r = 1, \ldots n$.

La otra inclusión no necesariamente tiene lugar. También podemos observar que

$$X \in \ker(L_{*_e}) \text{ si y sólo si } (e_i)_{*_z}((\sigma_z)_{*_e}(X)) = 0 \text{ para todo } 1 \le i \le n \text{ y } z \in N.$$

Si $X \in \ker(L_{*_e})$, $(e_i)_{*_z}((\sigma_z)_{*_e}(X)) = \sum_{r=1}^{n} e_r(z)D|_{t=0}(L^r_i(\exp(tX))) = 0$. *Por otro lado, si* $(e_i)_{*_z}((\sigma_z)_{*_e}(X)) = 0$, *se cumple que* $0 = (e_i \circ \sigma_z)_{*_e}(X) =$

$\sum_{l=1}^{n} e_l(z)D|_{t=0}(L_i^l(\exp(tX)))$, *como* $\{e_l(z)\}_{l=1}^{n}$ *es base de* $M_{\psi(z)}$, *se tiene* $(L_i^l)_{*_e}(X) = 0$ *para todo* $l = 1, \ldots, n$, *y finalmente al estar en el núcleo de cada* $(e_i)_{*_z}$ *resulta que* $L_{*_e}(X) = 0$.

Observación 2.100 *Sea* $b \in V_z$, *entonces*

$$\omega_j^i(z.a)((R_a)_{*_z}(b)) = \omega_j^i(z)(b)$$

Esto es porque $\omega_j^i(z.a)((R_a)_{*_z}(b)) = \omega_j^i(z.a)((R_a \circ \sigma_z)_{*_e}(X)) = \omega_j^i(z.a)((\sigma_{z.a})_{*_e}(X)) = (L_j^i)_{*_e}(X) = \omega_j^i(z)(b)$.

2.4.2 Conexiones en Super Espacios.

Los super espacios pueden ser vistos como una generalización del fibrado de bases LM, pero como ya vimos no necesariamente son fibrados principales ni fibraciones. Para cada super espacio tenemos naturalmente definida una distribución vertical. Puede ser muy útil considerar una distribución transversal o complementaria a esta. En esta situación aparece el concepto de conexión. A continuación, vamos a definir lo que es una conexión para el caso de super espacios. Para esto nos basamos en la definición de conexión para fibrados principales y en la definición de conexión para fibraciones dada en [32], ya que cuando el super espacio sea un fibrado principal queremos que la noción coincida.

Definición 2.101 *Una conexión sobre un super espacio* $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ *sobre* M *es un tensor* ϕ *sobre* N *de tipo* $(1, 1)$ *que satisface:*

1. $\phi(z) : N_z \longrightarrow V_z$ *es una aplicación lineal.*
2. $\phi^2 = \phi$, *es decir* ϕ *es una proyeción al subespacio vertical.*
3. $\phi(z.a)((R_a)_{*_z}(b)) = (R_a)_{*_z}(\phi(b))$.

A veces notaremos a $\phi(z)$ *como* ϕ_z.

Observemos que para que el punto 3. tenga sentido se debe cumplir que el subespacio vertical sea invariante por la acción del grupo, es decir

$$(R_a)_{*_z}(V_z) = V_{z.a}$$

Esto se ve fácilmente. Sea $b \in V_z$ y (U, x) una carta de M talque $\psi(z) \in U$. Luego, $\psi_{*_{z.a}}((R_a)_{*_z}(b)) \in M_{\psi(z)}$ y sus coordenadas con respecto a la base de vectores tangentes inducida por la carta (U, x) son $\psi_{*_{z.a}}((R_a)_{*_z}(b))(x^i) = (R_a)_{*_z}(b)(x^i \circ \psi) = b(x^i \circ \psi \circ R_a) = b(x^i \circ \psi) = \psi_{*_z}(b) = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Con lo cual, tenemos la inclusión. Con esto bastaría para que tenga sentido pedir el punto 3 en la definición. De todos modos, tenemos la igualdad y esta se da por una cuestión de dimensión.

Definición 2.102 *Sea ϕ una conexión sobre λ. LLamamos subespacio horizontal en z a $H_z = \ker \phi(z)$.*

Observación 2.103 *Claramente se ve que para todo $z \in N$*

$$N_z = H_z \oplus V_z$$

Observación 2.104 *Sea $b \in H_z$. Como $\phi(z)(b) = 0$, por el punto 3. de la definición de conexión, vemos que $\phi_{za}((R_a)_{*_z}(\phi(z)(b))) = (R_a)_{*_z}(\phi(z)(b)) = (R_a)_{*_z}(0) = 0$. Por cuestión de dimensión se obtiene la igualdad:*

$$(R_a)_{*_z}(H_z) = H_{z.a}$$

Con lo cual hemos visto que si tenemos una conexión en el super espacio tenemos definida una distribución C^∞ en N $(z \longrightarrow H_z)$ que llamamos *distribución horizontal*, que está en suma directa con la distribución vertical y que es invariante por la acción del grupo O. La recíproca también es cierta:

Proposición 2.105 *Es equivalente tener una conexión ϕ en λ y una distribución de N $(z \longrightarrow H_z)$ que cumple:*

1. *H_z es una distribución C^∞.*
2. *$N_z = H_z \oplus V_z$.*
3. *$H_{z.a} = (R_a)_{*_z}(H_z)$*

Demostración: Sólo hace falta ver que una distribución de este tipo induce una conexión en λ. Cada vector $b \in N_z$ puede ser escrito de forma única como $b = b^h + b^v$, donde $b^h \in H_z$ y $b^v \in V_z$. Definimos $\phi(z)(b) = \phi(z)(b^h + b^v) = b^v$, que es una aplicación C^∞ y cumple los puntos 1. y 2. de la definición de conexión. Veamos que cumple el tercer punto: $\phi(z)((R_a)_{*_z}(b)) = \phi(z)((R_a)_{*_z}(b^h) + (R_a)_{*_z}(b^v))$, como la distribución vertical y la distribución H son invariantes por la acción del grupo se sigue que $\phi(z)((R_a)_{*_z}(b)) = \phi(z)((R_a)_{*_z}(b^v)) = (R_a)_{*_z}(b^v) = (R_a)_{*_z}(\phi(z)(b))$. □

Observación 2.106 *Si λ además es un fibrado principal, entonces el concepto de conexión coincide con el de conexión de fibrados principales.*

¿Cuando un super espacio admite una conexión? Es sabido que todo fibrado principal de grupo estructural O admite una distribución suave, transversal a la distribución vertical e invariante por acción de su grupo estructural, esto puede verse por ejemplo en [13]. Con lo cual, si λ es un super espacio sobre M que también es un fibrado principal, λ admite una conexión.

Una forma de construir conexiones en un super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ es a través de cierta clase de métricas. Si G es una métrica sobre N de modo que las aplicaciones $R_a : N \longrightarrow N$ inducidas por la acción del grupo O sobre N son isometrías, entonces podemos construir una distribución que tiene las mismas propiedades que las enunciadas en la Proposición 2.105. Es decir, dado $z \in N$, sea H_z el subsespacio ortogonal por G al subespacio vertical V_z. Con lo cual, si N admite una métrica de ese tipo, λ admite una conexión. Una condición para que N admita una métrica de este tipo es cuando O es finito y N es una variedad compacta. Cuando el grupo O es compacto y conexo y N es una variedad cerrada, también tenemos una métrica en N que vuelve a las aplicaciones R_a isometrías, (ver [13]).

En la Sección 4.2 del Capítulo 4 veremos una forma de construir una conexión sobre un super espacio utilizando la función de conexión inducida por una conexión afín de la variedad base.

2.4.3 Levantamiento Horizontal.

Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M dotado de una conexión ϕ . Notamos con π y π_M las proyecciones canónicas de los fibrados tangentes TN y TM respectivamente. Sea $TM \times_M N$ el pullback de M por π_M y ψ , o sea la variedad de dimensión $2n + k - s$ formada por los puntos $TM \times_M N = \{(v, z) \in TM \times N : \pi_M(v) = \psi(z)\}$. Definamos la aplicación diferenciable:

$$\psi_* \times \pi : TN \longrightarrow TM \times_M N$$

dada por

$$(\psi_* \times \pi)(z, b) = (\psi_{*_z}(b), \pi(b)) = (\psi_{*_z}(b), z)$$

Observación 2.107 *Por la definición de la aplicación y de los subespacios verticales y horizontales tenemos que $(\psi_* \times \pi)(V_z) = (0, z)$ y $(\psi_* \times \pi)(H_z) = (M_{\psi(z)}, z)$.*

Si restringimos esta aplicación al subespacio horizontal, tenemos para cada z un isomorfismo lineal al que llamamos h_z^{-1}:

$$h_z^{-1} = (\psi_* \times \pi)|_{H_z} : H_z \longrightarrow M_{\psi(z)} \times \{z\}$$

la inversa $h : TM \times_M N \longrightarrow \bigcup_{z\in N} H_z$, que notamos con $h(v,z) = v_z^h \in H_z$, cumple que es el único vector horizontal de TN tal que $\psi_{*_z}(v_z^h) = v$ y $\pi(v_z^h) = z$.

Definición 2.108 *Sea $v \in M_p$, si $z \in \psi^{-1}(p)$ llamamos levantamiento horizontal de v en z al vector $h(v,z) = v_z^h$.*

Observación 2.109 *Aplicarle la conexión a un vector es sacarle la parte horizontal:*

$$\phi = Id - h(\psi_*, \pi)$$

dado $b \in N_z$, $b - \phi(b) \in H_z$ y además $\psi_{*_z}(b - \phi(b)) = \psi_{*_z}(b)$ y $\pi(b - \phi(b)) = z$, por lo tanto, $b - \phi(b) = h(\psi_{*_z}(b), \pi(b))$ para todo b.

Definición 2.110 *Sean $H : \chi(N) \longrightarrow \chi(N)$ y $V : \chi(N) \longrightarrow \chi(N)$ las aplicaciones entre campos tangentes de N definidas por lo siguiente: $H(X)$ y $V(X)$ son los campos que satisfacen que $H(V)(z) \in H_z$ y $V(X)(z) \in V_z$ para todo $z \in N$ y además $X = H(X) + V(X)$. Lamamos a H y V las proyecciones horizontal y vertical de campos respectivamente.*

Observación 2.111 *Se desprende de la observación anterior que $V(X) = \phi(X)$ y que $H(X) = X - \phi(X)$, por lo tanto $H(X)$ y $V(X)$ son campos diferenciables si X es un campo diferenciable.*

Proposición 2.112 *Dado un campo X sobre M existe un único campo X^h sobre N que satisface que $X^h(z) \in H_z$ y $\psi_{*_z}(X^h(z)) = X(\psi(z))$ para todo $z \in N$.*

Demostración: Sea $p_0 \in M$ y $z_0 \in N$ tal que $\psi(z_0) = p_0$. Como ψ es una submersión, existen cartas (U,x) y (V,y) centradas en z_0 y p_0 respectivamente, que cumplen que $\psi(U) \subseteq V$ y $y \circ \psi \circ x^{-1}(a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m) = (a_1, \ldots, a_n)$ para $(a_1, \ldots, a_m) \in x(U)$. Luego, si la representación local de X en la carta (V,y) es $X(p) = \sum_{i=1}^{n} \rho^i(p) \frac{\partial}{\partial y_i} \ |_p$, sea $\tilde{X}_U(z) = \sum_{i=1}^{n} (\rho^i \circ \psi)(z) \frac{\partial}{\partial x_i} \ |_z$. Se ve sin dificultad que $\tilde{X}_U \in \chi(U)$ y que $\psi_*(\tilde{X}) = X \circ \psi$. Por esto, podemos tomar un cubrimiento por abiertos $\{U_i\}_{i\in I}$ de N, de modo que para cada abierto U_i tenemos un campo $\tilde{X}_i \in \chi(U_i)$ que cumple la propiedad anterior. Si $\{\zeta_i\}_{i\in I}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_i\}_{i\in I}$, sea $\tilde{X} \in \chi(N)$ dado por $\tilde{X} = \sum_{i\in I} \zeta_i.\tilde{X}_i$. Este campo satisface que $\psi_{*_z}(\tilde{X}(z)) = X(\psi(z))$ para todo $z \in N$. Por lo tanto, si le aplicamos la proyección horizontal, $X^h(z) = H(\tilde{X})$, obtenemos el campo que buscabamos. La unicidad se obtiene recordando que $\psi_{*_z}|_{H_z} : H_z \longrightarrow M_{\psi(z)}$ es un isomorfismo lineal para todo z en N.

□

Observación 2.113 *La distribución horizontal es trivial es C^∞ trivial (i.e. existen $\{X_i\}_{i=1}^n$ campos diferenciables sobre N de modo que $\{X_i(z)\}_{i=1}^n$ es una base de H_z para todo $z \in N$). Para ver esto tomemos los levantamientos horizontales de las aplicaciones de referencia de λ $e_i : N \longrightarrow TM$, o sea $e_i^h(z) = h(e_i(z), z)$. Tenemos que $\{e_1^h(z), \ldots, e_n^h(z)\}$ es una base de H_z para todo $z \in N$ y los campos e_i^h son diferenciables. Por ejemplo, si dotamos al super espacio $\lambda = (LM, \pi, GL(n), \cdot, \{\pi_i\})$ de una conexión, es conocido que $\{\pi_i^h\}_{i=1}^n$ son campos diferenciables de LM que trivializan la distribución horizontal (ver [42]).*

Formas W_j^i:

Sea λ un super espacio sobre M dotado de una conexión ϕ . Vamos a considerar las siguientes 1-formas sobre N:

$$W_j^i(z)(b) = \omega_j^i(z)(\phi(b)) \tag{2.6}$$

donde ω_j^i son las formas inducidas por alguna conexión ∇ de M. La buena definición resulta de las Proposiciones 2.96 y 2.98 y de la Observación 2.97. También de la Proposición 2.96 tenemos una expresión para los vectores verticales $W_j^i(z)((\sigma_z)_{*_e}(X))$ $= (L_j^i)_{*_e}(X)$.

Observación 2.114 *Las formas $\{W_j^i\}$ son independientes con respecto a las formas $\{\theta^i\}$, pues si $\sum_i \xi_i\theta^i(z) + \sum_{ij} \gamma_j^i W_j^i(z) \equiv 0$, para algún $z \in N$ y $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ y $\{\gamma_j^i\}_{1\leq i,j\leq n}$ $\in \mathbb{R}$, evaluamos en $e_l^h(z)$ y obtenemos que $\xi_l = 0$ para $1 \leq l \leq n$. Las $\{W_j^i\}$ no necesariamente son independientes.*

Observación 2.115 *Si bien $W^i_j(z)(H_z) = 0$, las formas $\{W^i_j\}$ no suelen generar el anulador de la distribución horizontal, anulan más cosas. Si $X \in \ker L_{*_e}$ y $X \notin \ker(\sigma_z)_{*_e}$, $V(z) = (\sigma_z)_{*_e}(X)$ es un vector vertical no nulo y $W^i_j(z)(V(z)) = (L^i_j)_{*_e}(X) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.*

Proposición 2.116 *Sea $z \in N$, luego $W^i_j(z)(b) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ si y sólo si*

$$b = b^h + (\sigma_z)_{*_e}(X)$$

donde $b^h \in H_z$ y $X \in \ker L_{*_e}$.

Demostración: Sea $b \in N_z$ tal que $\{W^i_j(b) = 0\}_{1 \leq i,j \leq n}$. Al vector b lo podemos escribir como $b = (b - \phi(b)) + \phi(b)$, luego $(b - \phi(b)) \in H_z$ y $\phi(z)(b) = (\sigma_z)_{*_e}(X)$ para algún $X \in \mathfrak{o}$. Veamos que necesariamente $X \in \ker L_{*_e}$. Como $W^i_j(b) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$, tenemos que $0 = W^i_j(z)(b) = \omega^i_j(z)(\phi(b)) = \omega^i_j(z)((\sigma_z)_{*_e}(X)) = (L^i_j)_{*_e}(X)$, con lo cual $L_{*_e}(X) = 0$.

□

Observación 2.117 *Si notamos con $\tilde{V}_z = (\sigma_z)_{*_e}(\ker L_{*_e}) \subseteq V_z$, entonces el espacio generado por $< \{W^i_j(z)\}_{(i,j)} >$ es el anulador de $H_z + \tilde{V}_z$. Por ejemplo, si λ es inducido por un fibrado principal sobre una variedad paralizable, L es constantemente igual a la identidad y por lo tanto $\ker L_{*_e} = \mathfrak{o}$. En este caso, $\tilde{V}_z = V_z$ para todo $z \in N$. Si λ es el super espacio inducido por el fibrado de bases, entonces $\tilde{V}_z = 0$. O sea, si $\ker L_{*_e} = T_eS_z$, entonces $\tilde{V}_z = 0$.*

$$< \theta^i > \xrightarrow{\text{anulador de}} V_z$$

$$< W^i_j > \xrightarrow{\text{anulador de}} \tilde{V}_z + H_z$$

2.4.4 Super Espacios Paralelizables.

Es conocido que el fibrado principal LM es paralelizable si y sólo si admite una conexión de fibrados principales. Esto es, porque al tratarse de un fibrado principal, el grupo $GL(n)$ actua sin punto fijo y por lo tanto la distribución vertical resulta trivial, y además, como ya mencionamos, $\{\pi^h_i\}^n_{i=1}$ son campos tangentes sobre LM que trivializan la distribución horizontal. ¿Será cierto para super espacios? Es decir, valdrá que si λ es un super espacio dotado con una conexión y cuyo grupo actua sin punto fijo, entonces, su variedad espacio N es paralelizable?

La respuesta es que sí. LLamamos H_i a los levantamientos horizontales de las aplicaciones $\{e_i\}$, es decir $H_i = e_i^h$ para $1 \leq i \leq n$. Sea $V_j = (\sigma_z)_{*_e}(X_j)$, donde $\{X_1, \ldots X_k\}$ es una base de $\mathfrak{o}$. Luego, tenemos que $\{H_i(z), V_j(z)\}$ es una base de N_z para todo z en N, y por lo tanto, N es paralelizable.

Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M dotado de una conexión ϕ. Sea $\dim S_z = s$ si $z \in N$. Supongamos que existe un subespacio de $\mathfrak{o}$ generado por $\{X_1, \cdots, X_{k-s}\}$ de modo que

$$< X_1, \ldots, X_{k-s} > \cap\, T_e S_z = \{0\} \text{ para todo } z \text{ en } N.$$

Por ejemplo, esto incluye el caso cuando el grupo del super espacio actua sin punto fijo o cuando $T_e S_z$ es el mismo subespacio de $\mathfrak{o}$ para todo $z \in N$. Conviene notar, que si los espacios tangentes a la identidad de los estabilizadores son el mismo subespacio de $\mathfrak{o}$, entonces podemos tomar $X \in T_e S_z$ de modo que $(\sigma_z)_{*_e}(X) = 0$ para todo $z \in N$. En esta situación, si O actua efectivamente sobre N, necesariamente debe ser $X = 0$. Entonces, o bien O no actua efectivamente sobre N o bien $T_e S_z = \{0\}$ para todo z en N, lo cual es bastante restrictivo. La condición que pedimos es más débil.

En esta situación, para $i = 1, \cdots k-s$, sean los campos verticales $V_i(z) = (\sigma_z)_{*_e}(X_i)$, qué por como los construímos, en cada punto z de N son base de V_z. Luego si $H_i = e_i^h$, tenemos que $\{H_1(z), \cdot, H_n(z), V_1(z), \cdots, V_k(z)\}$ es una base de N_z para todo $z \in N$. Pero veamos que naturalmente podemos trivializar el fibrado cotangente de N. Sean W^i las $k-s$ 1-formas sobre N definidas por:

$$\phi_z(b) = \sum_{i=1}^{k-s} W^i(z)(b) V_i(z) \tag{2.7}$$

En este caso, $< \{W^i\}_{i=1}^{k-s} >$ es el anulador del subespacio horizontal. Además, $\{\theta^1(z), \ldots, \theta^n(z), W^1(z), \ldots, W^{k-s}(z)\}$ es una base para N_z^*. Esto se ve fácilmente si suponemos que existe $z_0 \in N$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{R}$ y $\{\beta_j\}_{j=1}^{k-s} \in \mathbb{R}$ de modo que $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i \theta^i(z_0) +$

$\sum_{j=1}^{k-s} \beta_j W^j(z_0) \equiv 0$. Evaluando en $e_i^h(z_0)$ y en $V_j(z_0)$, obtenemos que $\gamma_i = \beta_j = 0$ para todo i, j. Finalmente, podemos afirmar que N es paralelizable tomado su base dual $\{H_1, \ldots, H_n, V_1, \ldots, V_{k-s}\}$. Hemos probado la siguiente proposición:

Proposición 2.118 *Sea λ un super espacio sobre M tal que existe un subespacio $\tilde{V}$ de $\mathfrak{o}$ de dimensión $k - s$, con $s = \dim(S_z)$, de modo que $\tilde{V} \cap T_e S_z = \{0\}$ para todo z en N. Luego, si λ admite una conexión entonces N es paralelizable.*

En esta situación, sea Y un campo sobre N, se ve que la proyección horizontal y vertical de campos son

$$H(Y)(z) = Y(z) - \sum_{i=1}^{k-s} W^i(Y(z))V_i(z)$$

$$V(Y)(z) = \sum_{i=1}^{k-s} W^i(Y(z))V_i(z)$$

2.5 Naturalidad de Tensores.

En esta sección estudiaremos cierto tipo de tensores sobre una variedad o una fibración. ¿Qué queremos decir cuando hablamos de un tensor sobre una fibración? Nos referimos a un tensor de tipo $(0, 2)$ sobre la variedad espacio de la fibración. En este caso, al estudiar los tensores sobre una fibración no trataremos a la variedad espacio como una variedad aislada, sino que consideraremos la estructura de la fibración. El objetivo será, como ya mencionamos en la Introducción, generalizar la noción de tensor natural dada en [6] y [22] para el fibrado de bases, el fibrado tangente y cotangente de una variedad.

2.5.1 Definición de Tensor Natural.

Procederemos de los casos más particulares al más general. Daremos una definición de los tensores naturales para los fibrados principales, fibrados vectoriales y luego para una fibración en general. También definiremos el concepto de tensor natural con respecto a un super espacio, es decir sin tener encuenta ninguna estructura extra en la variedad base. La noción de naturalidad no dependerá sólo del tensor, sino que también dependerá fuertemente del super espacio que estemos considerando sobre la variedad o la fibración.

Definición 2.119 *Sea $\alpha = (P, \pi, \mathbb{F})$ una fibración sobre M. Decimos que un super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ es un super espacio trivial sobre α si λ es un super espacio sobre la variedad espacio P y N es de la forma $N = N' \times \mathbb{F}$.*

Si $\alpha = (P, \pi, G, \cdot)$ es un fibrado principal sobre M y $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio trivial sobre α, entonces se tiene que $\psi : N = N' \times G \longrightarrow P$. Del mismo modo, si $\alpha = (P, \pi, \mathbb{V})$ es un fibrado vectorial sobre M y λ es un super espacio trivial sobre α, entonces $N = N' \times \mathbb{V}$.

Ejemplo 2.120 *Sea $(LM, \pi, GL(n), \;\cdot\;)$ el fibrado de bases sobre la variedad M de dimensión n. El super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ sobre LM del Ejemplo 2.24, donde $N = LM \times GL(n)$, $\psi(p, u, \xi) = (p, u.\xi)$, $O = GL(n)$ y $R_a(p, u, \xi) = (p, ua, a^{-1}\xi)$, es un super espacio trivial sobre el fibrado de bases de una variedad dotada de una conexión. Si M está dotada de una métrica Riemanniana, entonces el super espacio sobre LM del Ejemplo 2.25, cuya variedad espacio es $O(M) \times GL(n)$, es otro super espacio trivial sobre $(LM, \pi, GL(n), \;\cdot\;)$.*

Comencemos con los fibrados principales. Sea $\alpha = (P, \pi, G, \cdot)$ un fibrado principal sobre M y $\lambda = (N \times G, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio trivial sobre α.

Definición 2.121 *Diremos que un tensor T sobre P es λ-natural con respecto a α si ${}^{\lambda}T(z, g)$ depende sólo del parámetro del grupo G.*

Observación 2.122 *Sea $(LM, \pi, GL(n), \;\cdot\;)$ el fibrado principal de bases de una variedad M de dimensión n. Como ya mencionamos los super espacios de los Ejemplos 2.24 y 2.25 son triviales sobre el fibrado de bases. En [22] se define el concepto de tensor natural del fibrado de bases LM con respecto a la conexión de M. Se dice que un tensor T sobre LM es natural con respecto a la conexión si ${}^{\nabla}T$, la aplicación matricial inducida por T y por el super espacio descripta en el Ejemplo 2.24, depende sólo del parámetro de $GL(n)$, es decir que ${}^{\nabla}T(p, u, \xi) = {}^{\nabla}T(\xi)$. Fácilmente se puede ver que*

T es natural con respecto a la conexión si y sólo si ${}^{\nabla}T$ es constante.

Consideramos una variedad Riemanniana (M, g) y el super espacio sobre LM dado en el Ejemplo 2.25. Sea T un tensor sobre M y ${}^gT$ su aplicación matricial. En [22] se dice que un tensor T es natural con respecto a la métrica si su aplicación matricial satisface que ${}^gT(p, e, \xi) = {}^g T(\xi)$, o sea que sólo depende del parámetro de $GL(n)$, y se prueba que son equivalentes:

- *T es natural con respecto a métrica.*
- *Existen funciones $f_{\beta,\gamma} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que ${}^\nabla T(p, e, Id) = f_{\beta,\gamma}([g(e_i, e_j)]_{ij})$, donde $\mathcal{S}$ es la variedad de las matrices simétricas definidas positivas de $\mathbb{R}^{n\times n}$ y $[g(e_i, e_j)]_{ij}$ es la matriz cuya entrada (i, j) es $g(e_i, e_j)$.*

Los super espacios de los Ejemplos 2.24 y 2.25 son triviales sobre $(LM, \pi, GL(n), \cdot\ )$ y nuestra definición de tensor natural coincide en ambos casos.

Sea $\alpha = (E, \pi, \mathbb{V})$ un fibrado vectorial sobre M y $\lambda = (N \times \mathbb{V}, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio trivial sobre α.

Definición 2.123 *Decimos que un tensor T sobre E es λ-natural con respecto a α si ${}^\lambda T(z, \xi)$ depende sólo del parámetro del espacio vectorial, es decir de la variable ξ.*

Observación 2.124 *Consideremos el super espacio $\lambda = (O(M) \times \mathbb{R}^n, \psi, O(n), R, \{e_i\})$ sobre el fibrado tangente de una variedad Riemanniana (M, g) descripto en el Ejemplo 2.26. λ es un super espacio trivial sobre (TM, π, R^n). En [6] se dice que un tensor T sobre TM es natural si la aplicación matricial inducida ${}^\lambda T(z, \xi)$ depende sólo de ξ. Claramente coincide con nuestra definición.*

Ahora definamos el concepto de tensor natural en el caso general. Sea $\alpha = (E, \pi, \mathbb{F})$ un fibración sobre M y $\lambda = (N \times \mathbb{F}, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio trivial sobre α.

Definición 2.125 *Diremos que un tensor T sobre E es λ-natural con respecto a α si la aplicación matricial ${}^\lambda T(z, w)$ depende sólo del parámetro de la fibra $\mathbb{F}$.*

Un super espacio es una estructura que está dada sobre una variedad. Cuando nos referimos a un super espacio, decimos que lo es sobre una determinada variedad. Luego, dado un tensor T sobre una variedad M y un super espacio λ sobre M, nos podríamos preguntar: ¿Qué querrá decir que T sea $\lambda - natural$?

Una variedad M la podemos identificar con un fibrado principal trivial de grupo estructural trivial. Es decir, dada una variedad M consideremos el fibrado principal $\alpha_M = (M \times \{1\}, pr_1, \{1\}, \cdot)$ sobre M, donde el grupo estructural es el grupo trivial, pr_1 es la proyección en la primera coordenada y la acción es la identidad. Hay una relación biunívoca entre los super espacios sobre M y los super espacios triviales sobre α_M. Un super espacio trivial sobre α_M es de la forma $\lambda' = (N \times \{1\}, \psi, O, R, \{e_i\})$. Podemos notar que λ' induce naturalmente el super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ sobre la variedad M. De la misma manera, si tenemos un super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ sobre M, luego $\lambda' = (N \times \{1\}, \psi, O, R, \{e_i\})$ será un super espacio trivial sobre α_M. Un tensor T sobre M, lo podemos ver como un tensor sobre la variedad espacio $M \times \{1\}$ de α_M. Según definimos antes, T es $\lambda' - natural$ con respecto a α_M si ${}^{\lambda'}T(z,1) ={}^{\lambda'} T(1)$ para todo $z \in N$, o sea si ${}^{\lambda'}T$ es una aplicación constante. Se observa que ${}^{\lambda'}T$ es constante si y sólo si ${}^{\lambda}T$ es constante. Es decir

$$T \text{ es } \lambda' \text{-natural con respecto a } \alpha_M \text{ si y sólo si } {}^{\lambda}T \text{ es constante .}$$

De forma similar podríamos haber identificado la variedad M con el fibrado vectorial trivial de fibra $\mathbb{V} = \{0\}$ ó con la fibración trivial cuya fibra es una variedad puntual. Los super espacios sobre M y los super espacios triviales sobre este fibrado vectorial trivial ó sobre esta fibración están en relación uno a uno y los podemos identificar. Del mismo modo que antes, si λ es un super espacio sobre M y λ' es el super espacio trivial inducido sobre el fibrado vectorial o sobre la fibración y T es un tensor sobre M, entonces T es $\lambda' - natural$ con respecto a la fibración si y sólo si ${}^{\lambda}T$ es constante. Esto nos lleva a definir:

Definición 2.126 *Sea λ un super espacio sobre M. Decimos que un tensor T sobre M es $\lambda - natural$ si ${}^{\lambda}T$ es constante.*

Observación 2.127 *Sea E la variedad espacio de una fibración α. Un super espacio trivial sobre α es al mismo tiempo un super espacio sobre la variedad E. ¿Coincide la noción $\lambda - natural$ con respecto a α y $\lambda - natural$? No necesariamente. Veamos el siguiente ejemplo: Sea $\alpha = (LM, \pi, GL(n), \cdot\ )$ el fibrado principal de* *bases de una variedad Riemanniana* (M, g). *Si* $\lambda = (O(M)\times GL(n), \psi, O(n), R, \{e_i\})$ *es el super espacio trivial sobre* α *del Ejemplo 2.25, un tensor* T *es* $\lambda - natural$ *si su aplicación matricial inducida* ${}^{\lambda}T$ *es constante. Pero como mencionamos en la Observación 2.122, los tensores* $\lambda - naturales$ *con respecto a* α *es un conjunto más grande que los* $\lambda - naturales$.

Sin embargo, si sobre el fibrado principal α *consideramos el super espacio trivial* $\lambda = (LM \times GL(n), \psi, GL(n), R, \{e_i\})$ *del Ejemplo 2.24, el concepto de* $\lambda - natural$ *con respecto a* α *coincide con el de* $\lambda - natural$.

En general si tenemos una fibración $\alpha = (E, \pi, \mathbb{F})$ *y un super espacio trivial sobre* α*, entonces los tensores sobre* E *que son* $\lambda - naturales$ *son también* $\lambda - naturales$ *con respecto a* α.

Sea un super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ sobre una variedad M de dimensión n. Como vimos, los tensores sobre M están en relación biunívoca con las aplicaciones diferenciables $A : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ que satisfacen que $A(z.a) = (L(a))^t.A(z).L(a)$ para todo $a \in O$. Si $A : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ es constante, entonces A corresponde a un tensor sobre M si y sólo si $(L(a))^t.A.L(a) = A$ para todo $a \in O$, o sea si la imagen del morfismo de cambio de base está incluída en el grupo G_A. De esto se deduce que los tensores $\lambda - naturales$ dependerán de la imagen del morfismo de cambio de base. En los siguientes ejemplos consideraremos distintos super espacios sobre una variedad M y observaremos como varía el conjunto de tensores naturales.

Ejemplo 2.128 *Sea* M *una variedad diferenciable de dimensión* n. *Consideremos el super espacio más simple de todos, el inducido por el fibrado de bases* $\lambda = (LM, \pi, GL(n), \ \cdot\ , \{\pi_i\})$. *Como vimos, el morfismo de cambio de base* $L : GL(n) \longrightarrow GL(n)$ *está dado por* $L(a) = a$ *para todo* a *en* $GL(n)$ *y, por lo tanto, el único tensor* $\lambda - natural$ *es el tensor nulo.*

Ejemplo 2.129 *Consideremos una métrica* g *sobre* M. *Sea* $(O(M), \pi, O(n), \ \cdot\ )$ *el fibrado principal de bases ortonormales de* (M, g) *y* $\beta = (O(M), \pi, O(n), \ \cdot\ , \{\pi_i\})$ *el super espacio sobre* M *inducido por este. El morfismo de cambio de base* $L : O(n) \longrightarrow GL(n)$ *está dado por* $L(a) = a$ *para todo* $a \in O(n)$. *Las aplicaciones constantes de* $O(M)$ *en* $R^{n\times n}$ *que representan tensores, son las que cumplen que* $A = a^t.A.a$ *para todo* $a \in O(n)$*, es decir los tensores* $\beta - naturales$ *son aquellos que tienen representanción matricial de la forma* ${}^{\lambda}T = k.Id_{n\times n}$ *con* $k \in \mathbb{R}$.

En Ejemplo 2.129 se ve que hay tensores sobre M que son $\beta - naturales$ y que no son el tensor nulo, que es el único $\lambda - natural$. En estos ejemplos pudimos ver que el conjunto de tensores naturales depende del super espacio considerado sobre la variedad.

Observación 2.130 *Sea M una variedad diferenciable y T un tensor sobre M. Luego, T es $\lambda - natural$ para todo super espacio λ sobre M si y sólo si T es el tensor nulo.*

En la Definición 2.75, dado $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M, introducimos el espacio de invarianza F_T de un tensor T sobre M. No necesariamente F_T tiene estructura de variedad pero para los tensores $\lambda - naturales$ la tendrá. Si N es conexa, sea L es el morfismo de cambio de base de λ, tenemos la siguiente caracterización de los tensores $\lambda - naturales$:

Proposición 2.131 *Si T es $\lambda - natural$ entonces $N \times Im(L) \subseteq F_T$.*

Demostración: Si T es $\lambda-natural$, entonces ${}^{\lambda}T$ es constante, con lo cual ${}^{\lambda}T(z) ={}^{\lambda} T(z.a) = (L(a))^t.{}^{\lambda}T(z).L(a)$ para todo $a \in O$ y $z \in N$, es decir, $L(a) \in G_T(z)$ para todo $a \in O$ y $z \in N$.

□

Si T es $\lambda - natural$ la aplicación matricial inducida es constante, es decir ${}^{\lambda}T = A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Para todo $z \in N$, $G_T(z) = G$, donde G es el grupo de invarianza de A. Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.132 *Si T es $\lambda - natural$ entonces $F_T = N \times G$, donde G es un subgrupo de $GL(n)$.*

Observación 2.133 *Las recíprocas de las últimas dos proposiciones no son ciertas. Sea (M, g) una variedad Riemanniana y $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Consideremos el super espacio $\lambda = (O(M), \pi, O(n), R, \{\pi_i\})$ sobre M inducido por el fibrado ortonormal de bases. Sea T el tensor sobre M tal que ${}^{\lambda}T(p, e) = f(p).Id_{n \times n}$. Luego $F_T = O(M) \times O(n)$ pero T no es $\lambda - natural$.*

Por otro lado, de la proposición anterior tenemos que si F_T no tiene estructura de variedad para ningún tensor T no nulo, entonces el único tensor $\lambda - natural$ es el tensor nulo.

Proposición 2.134 *Sean λ y λ' dos super espacios sobre M y $(f,\tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ un morfismo de super espacios con aplicación de entrelazamiento C. Sea T un tensor sobre M $\lambda' - natural$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que ${}^{\lambda'}T = A$. Luego, T será $\lambda - natural$ si y sólo si $[(C(z))^{-1}]^t.A.(C(z))^{-1}$ es constante.*

Demostración: Se deduce de la Proposición 2.61. □

Proposición 2.135 *Sean $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ y $\lambda' = (N', \psi', O', R', \{e'_i\})$ dos super espacios sobre una variedad M y T un tensor sobre M que es λ y λ'-natural. Sean A y $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ tales que ${}^{\lambda}T = A$ y ${}^{\lambda'}T = B$. Si $(f,\tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ es un morfismo de super espacios y C es su aplicación de entrelazamiento, entonces se cumple que*

$$C(z)^t.A.C(z) = B$$

para todo $z \in N$.

Demostración: También se deduce de la Proposición 2.61. □

En particular, si $\lambda = \lambda'$ y T es un tensor $\lambda - natural$, T resulta invariante por (f,τ). Si ${}^{\lambda}T = A$, se tiene que $A = C(z)^t.A.C(z)$ para todo $z \in N$, es decir que para cualquier cualquier automorfismo la aplicación de entrelazamiento tiene su imagen en el grupo de invarianza de T. Si consideramos el super espacio $\lambda = (LM \times GL(n), \psi, GL(n), R, \{e_i\})$ del Ejemplo 2.24, sabemos que cualquier aplicación constante $A : LM \times GL(n) \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+n^2)\times(n+n^2)}$ viene inducida por un tensor de LM. Luego, si $(f,\tau) : \lambda \longrightarrow \lambda$ es un morfismo de super espacios, su aplicación de entrelazamiento $C : LM \times GL(n) \longrightarrow GL(n+n^2)$ es constantemente igual a la matriz identidad de $\mathbb{R}^{(n+n^2)\times(n+n^2)}$.

Proposición 2.136 *Sean λ y λ' dos super espacios sobre M. Sea $(f,\tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ un morfismo de super espacios y ${}^{\lambda'}T = A$ un tensor $\lambda' - natural$. Luego, ${}^{\lambda'}T \circ f$ corresponde a un tensor sobre M si y sólo si*

$$(L(a))^t.A.L(a) = A$$

para todo $a \in O$. En ese caso, existe H tensor sobre M tal que ${}^{\lambda}H = A$, o sea H es $\lambda - natural$.

Demostración: Como T es $\lambda' - natural$ y ${}^{\lambda'}T = A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, se tiene que $(L'(a'))^t.A.L'(a') = A$ para todo $a' \in O'$. De la Proposición 2.60, se sigue que ${}^{\lambda'}T \circ f$ corresponde a un tensor sobre M si y sólo si $L(a)^t.A.L(a) = A$ para todo $a \in O$, que es lo que queríamos ver.

□

2.5.2 Subsuper Espacios.

Definición 2.137 *Sean* $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ *y* $\lambda' = (N', \psi', O', R', \{e'_i\})$ *dos super espacios sobre* M. *Decimos que* λ' *es un subsuper espacio de* λ *si :*

1. $N' \subseteq N$ *es una subvariedad inmersa.*
2. $\psi' = \psi|_{N'}$, *es decir* $N'_p = N_p \cap N'$.
3. $O' \subseteq O$ *es un subgrupo de Lie y* $R'_a(z) = R_a(z)$ *si* $a \in O'$ *y* $z \in N'$.
4. *Existe* $A \in GL(n)$, *tal que* $\{e'_i(z)\} = \{e_i(z)\}.A$ *para todo* $z \in N'$.

Observación 2.138 *En esta situación, llamamos* $i_{N',N}$ *a la inclusión de la variedad* N' *en* N *y a la inclusión del subgrupo* O' *en* O *la notamos con* $i_{O',O}$. *Luego,* λ' *es un subsuper espacio de* λ *si y sólo si la aplicación* $i_{N',N}$ *es una inmersión,* $(i_{N',N}, i_{O',O}) : \lambda' \longrightarrow \lambda$ *es un morfismo de super espacios y la aplicación de entrelazamiento asociada a* $(i_{N',N}, i_{O',O})$ *es constante.*

Ejemplo 2.139 *Sea* (M, g) *una variedad semi-Riemanniana de dimensión* n *y orientable. Sea* $\nu \geq 0$ *el índice de la métrica y* O_ν *el grupo ortogonal del mismo índice. Con* $GL^+(n)$ *notamos al grupo de matrices inversibles de determinante positivo y* $SL(n)$ *el grupo de matrices con determinante igual a uno. Sean*

- $\lambda_0 = (LM,\ \pi, GL(n),\ \cdot\ , \{\pi_i\})$
- $\lambda_1 = (L^\nu(M),\ \pi, O_\nu,\ R_1\ , \{\pi_i\})$, *donde* $L^\nu(M)$ *es el conjunto de bases ortonormales de* (M, g).
- $\lambda_2 = (L^+(M),\ \pi, GL^+(n),\ R_2\ , \{\pi_i\})$, *donde* L^+ *es el conjunto de bases positivamente orientadas.*
- *Si* g *es una métrica Riemanniana, sea* $\lambda_3 = (SL(M),\ \pi, SL(n),\ R_3\ , \{\pi_i\})$, *donde* $SL(M)$ *es el conjunto de bases ortonormales y positivamente orientadas.*

  Recordemos que la acción canónica de $GL(n)$ *sobre* LM *esta dada por* $(p, u) \cdot a = (p, \sum_{i=1}^n u_i a_1^i, \ldots, \sum_{i=1}^n u_i a_n^i)$ *para* (p, u) *en* LM *y* a *en* $GL(n)$. *Las acciones* $\{R_i\}$ *para* $i = 1, 2, 3$, *son la restricción de acción canónica de* $GL(n)$ *sobre* LM *a los grupos y espacios respectivos.*

λ_1, λ_2, λ_3 son subsuper espacios de λ_0, y λ_3 es a su vez subsuper espacio de λ_1 y de λ_2.

Ejemplo 2.140 *Sea M una variedad paralelizable de dimensión n, V un espacio vectorial y V' un subespacio de este. Sea $GL(V)$ los automorfismos lineales de V y $GL(V, V')$ los automorfismos que dejan invariante a V'. Consideremos el super espacio $\lambda = (M \times V, pr_1, GL(V), R_f, \{e_i\})$ sobre M, donde la acción es $R_f(p, z) = (p, f(z))$ para todo (p, z) en $M \times V$ y f en $GL(V)$, y $e_i = \bar{e}_i \circ pr_1$ para $1 \leq i \leq n$, donde $\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_n\}$ son campos sobre M que trivializan su fibrado tangente. Si $\lambda' = (M \times V', pr_1, GL(V, V'), R_f, \{e_i\})$, tenemos que λ' es un subsuper espacio de λ.*

Proposición 2.141 *Sea λ' y λ dos super espacios sobre M, de modo que λ' sea subsuper espacio de λ. Si T tensor sobre M es $\lambda-$natural entonces T es $\lambda'-$natural.*

Demostración :
$[^{\lambda'}T(z)]_{ij} = T(\psi'(z))(e'_i(z), e'_j(z)) = T(\psi(z))(\sum_{l=1}^n e_l(z)A_i^l, \sum_{s=1}^n e_s(z)A_j^s) =$
$= \sum_{ls}^n A_i^l.A_j^s[^{\lambda}T]_{ij}$, luego $^{\lambda'}T$ es una aplicación constante.

□

Observación 2.142 *El recíproco no es cierto. Pues el super espacio λ' inducido por el fibrado ortonormal de bases de un variedad Riemnaniana (M, g) es un subsuper espacio de aquel inducido por el fibrado de bases de M, sin embargo, sabemos que hay sobre M tensores $\lambda' -$ naturales que no son el tensor nulo.*

La siguiente definición generaliza el concepto de morfismo de super espacios. Sean $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ y $\lambda' = (N', \psi', O', R', \{e'_i\})$ dos super espacios sobre M y M' respectivamente y $h : M \longrightarrow M'$ una función diferenciable. Sea $f : N \longrightarrow N'$ diferenciable y $\tau : O \longrightarrow O'$ un morfismo de grupos:

Definición 2.143 *Decimos que (f, τ) es un morfismo de super espacios a lo largo de h si $f(z.a) = f(z).\tau(a)$ para todo $z \in N$ y todo $a \in O$ y el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\psi"'] & N' \arrow[d, "\psi'"] \\ M \arrow[r, "h"] & M' \end{tikzcd}$$

Observación 2.144 *Si $M = M'$ y $h = Id_M$, un morfismo de super espacios a lo largo de la identidad es un morfismo de super espacios a secas.*

Ejemplo 2.145 *Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M y W un abierto de M. Consideremos $N' = \psi^{-1}(W)$, que es una subvariedad de N, $\psi' = \psi|_{N'}$, $O' = O$, $R' = R$ y $e'_i = e_i|_{N'}$. Luego podemos ver que $\lambda' = (N', \psi', O', R', \{e'_i\})$ es un super espacio sobre la variedad W y la aplicación inducida por la inclusión de N' en N y por el morfismo identidad de O $(i, id) : \lambda' \longrightarrow \lambda$ es un morfismo de super espacios a lo largo de la inclusión de W en M.*

Ejemplo 2.146 *Si M está dotada de una métrica Riemanniana, sea $\lambda = (O(M) \times R^n, \psi, O(n), R, \{e_i\})$ el super espacio sobre TM del Ejemplo 2.26. Recordamos que la proyección es $\psi(p, u, \xi) = (p, \sum_{i=1}^{n} u_i \xi^i)$, la acción del grupo ortonormal está definida por $R_a(p, u) = (p, u.a, \xi.a)$ y las aplicaciones de referencia son $e_i(p, u, \xi) = (\pi_{*_{\psi(p,u,\xi)}} \times K_{\psi(p,u,\xi)})^{-1}(u_i, 0)$ y $e_{n+i}(p, u, \xi) = (\pi_{*_{\psi(p,u,\xi)}} \times K_{\psi(p,u,\xi)})^{-1}(0, u_i)$ si $1 \leq i \leq n$. También consideremos el super espacio sobre el fibrado unitario tangente T_1M, que vimos en Ejemplo 2.27, $\lambda' = (O(M), \psi', O(n-1), R', \{e'_i\})$, donde la proyección es $\psi'(p, u) = (p, u_n)$, la acción del grupo $O(n-1)$ sobre la variedad espacio $O(M)$ está dada por $R'_a(p, u) = (p, \sum_{i=1}^{n-1} u_i a_1^i, \ldots, \sum_{i=1}^{n-1} u_i a_{n-1}^i, u_n)$ y las apliaciones de referencia son $e'_i(p, u) = (\pi_{*_{\psi(p,u)}} \times K_{\psi(p,u)})^{-1}(u_i, 0)$ si $1 \leq i \leq n$ y $e'_{n+i}(p, u) = (\pi_{*_{\psi(p,u)}} \times K_{\psi(p,u)})^{-1}(0, u_i)$ si $1 \leq i \leq n-1$. Luego, sea $f : O(M) \longrightarrow O(M) \times \mathbb{R}^n$ y $\tau : O(n-1) \longrightarrow O(n)$ definidas por $f(p, u) = (p, u, e_n)$ y $\tau(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde e_n es el n-ésimo vector de la base canónica de R^n. Claramente $(f, \tau) : \lambda' \longrightarrow \lambda$ es un morfismo de super espacios a lo largo de la inclusión de T_1M en TM.*

Ahora, que tenemos definido el concepto de morfismo de super espacio a lo largo de una aplicación, podemos ampliar el concepto de subsuper espacio. Sea M un variedad de dimensión n y M' una subvariedad inmersa de dimensión n'. Con $h : M' \longrightarrow M$ notamos a la inmersión referida. Sea $\lambda' = (N', \psi', O', R', \{e'_i\})$ y $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ dos super espacios sobre M' y M respectivamente y consideremos $(f, \tau) : \lambda' \longrightarrow \lambda$ un morfismo de super espacios sobre h. Para todo $z' \in N'$ $h_{*_{\psi'(z')}}(M'_{\psi'(z')})$ es un subespacio de dimensión n' de $M_{\psi(f(z'))}$ y está generado por $\{h_{*_{\psi'(z')}}(e'_1(z')), \ldots, h_{*_{\psi'(z')}}(e'_{n'}(z'))\}$. Como $\{e_i(f(z'))\}$ es una base de $M_{\psi(f(z'))}$, para cada $z' \in N'$ existe una matriz $A(z') \in R^{n\times n}$, de rango n', de modo que la aplicación $A : N' \longrightarrow R^{n\times n}$ satisface que

$$\{h_{*_{\psi'(z')}}(e'_1(z')), \ldots, h_{*_{\psi'(z')}}(e'_{n'}(z')), \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-n'}\} = \{e_1(f(z')), \ldots, e_n(f(z'))\}.A(z')$$

En el ejemplo anterior, $A(p,u) = \begin{pmatrix} Id_{(2n-1)\times(2n-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde la fila y la columna n-ésima son nulas.

En esta situación, es decir, sea λ' y λ super espacios sobre M' y M respectivamente y $h : M' \longrightarrow M$ una inmersión, generalizemos la noción de subsuper espacio:

Definición 2.147 ***(Generalizada de subsuper espacio)*** *Decimos que λ' es un subsuper espacio de λ si existe (f,τ) un morfismo de super espacios a lo largo de la inmersión h, de modo que f es una inmersión y la aplicación A inducida por (f,τ) es constante.*

Sea M una variedad y T un tensor sobre ella. ¿Existe un super espacio λ de modo que T sea $\lambda - natural$? Por ejemplo, si G es una métrica Riemanniana y consideramos el super espacio inducido por el fibrado ortonormal de bases con respecto de G, es decir $\lambda = (O_G(M), \pi, O(n), \cdot, \{\pi_i\})$, luego ${}^{\lambda}G = Id_{n\times n}$. Por lo tanto, para una métrica Riemanniana existe un super espacio de modo que esta es natural. Vale el siguiente resultado:

Proposición 2.148 *Sea T un tensor simétrico sobre M, de índice y rango constante, entonces existe un super espacio λ sobre M tal que T es $\lambda - natural$.*

Demostración: Si T tiene rango cero entonces es el el tensor nulo y es natural en cualquier super espacio. Supongamos que el rango de T sea mayor o igual que 1 y el índice de T sea $r-s$. Para todo $p \in M$, existe una base $\{v_1, \ldots, v_s, v_{s+1}, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ de M_p que satisface que $[T(p)(v_i,v_j)] = \begin{pmatrix} Id_{s\times s} & 0 & 0 \\ 0 & -Id_{(r-s)\times(r-s)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_{sr}$ $(r \geq 1)$. Tomamos $\lambda = (N, \pi, O, \cdot, \{\pi_i\})$, donde $N = \{(q,v) \in LM : [T(q)(v_i,v_j)] =$

$I_{sr}\}$, el grupo es $O = \begin{pmatrix} O(s) & 0 & 0 \\ 0 & O(r-s) & 0 \\ 0 & 0 & GL(n-r) \end{pmatrix}$, la acción, la proyección a M y las aplicaciones de referencia $\{\pi_i\}$ son las inducidas por LM.

□

Si T es un tensor sobre M, sea ${}^{LM}T : LM \longrightarrow R^{n\times n}$ la aplicación matricial de T inducida por el super espacio de LM. Dado λ un super espacio sobre M, tenemos un morfismo entre λ y LM definido por $\Gamma(z) = (\psi(z), e_1(z), \cdots, e_n(z))$, cuya aplicación de entrelazamiento es el morfismo de cambio de base L de λ. Claramente, se tiene la siguiente igualdad:

$$^{\lambda}T =^{LM} T \circ \Gamma$$

por lo tanto, si T es $\lambda - natural$ entonces $Img\Gamma \subseteq ({}^{LM}T)^{-1}(A)$ para alguna matriz $A \in R^{n\times n}$.

Proposición 2.149 *T es natural para algún super espacio λ si y sólo si existe una matriz $A \in R^{n\times n}$ y un subsuper espacio de LM incluído en $({}^{LM}T)^{-1}(A)$.*

Demostración: Supongamos que T es $\lambda - natural$ ($\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$), entonces ${}^{\lambda}T = A$. Consideremos $\lambda' = (\Gamma(N), \pi, L(O), \cdot, \{\pi_i\})$, donde las proyecciones y la acción son las inducidas por el super espacio LM. La aplicación $\pi : \Gamma(N) \longrightarrow M$ es una submersión. Es suryectiva porque $\pi(\Gamma(N)) = \psi(N) = M$. Sea $p \in M$ y $z \in (\psi)^{-1}(p)$, luego $\pi(\Gamma(z)) = p$. Veamos que $\pi_{*_{\Gamma(z)}} : N_{\Gamma(z)} \longrightarrow M_p$ es suryectiva. Dado $v \in M_p$ existe $w \in N_z$ tal que $\psi_{*_z}(w) = v$. Sea α una curva en N de modo que $\alpha(0) = z$ y $\dot{\alpha}(0) = w$. Luego, $\beta(t) = \Gamma(\alpha(t))$ es una curva en $\Gamma(N)$ que satisface que $\beta(0) = \Gamma(z)$. Por lo tanto, $\pi_{*_{\Gamma(z)}}(\dot{\beta}(0)) = D|_0(\pi(\beta(t))) = \psi_{*_z}(w) = v$. La acción y las proyeciones son las heredadas del super espacio inducido por LM. Luego, se cumple que ${}^{\lambda'}T = A$. $L(O)$ actua transitivamente en $\Gamma(N)$, ya que $(\psi(z), e_1(z), \ldots, e_n(z))$ está en la misma fibra que $(\psi(z'), e_1(z'), \ldots, e_n(z'))$ si y sólo si $z' = z.a$, entonces $\{e_i(z')\} = \{e_i(z)\}.L(a)$.

Por otro lado, supongamos que para una matriz $A \in R^{n\times n}$ existe $\lambda = (N, \psi, O, R, , \{e_i\})$ subsuper espacio de LM incluído en $({}^{LM}T)^{-1}(A)$. Sea entonces, $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow LM$ el morfismo de super espacio a lo largo de la identidad de M, tal que f es una inmersión y que $f(N) \subseteq ({}^{LM}T)^{-1}(A)$, y sea $B \in GL(n)$ la matriz que cumple que $\{e_i(z)\} = \{\pi_i(f(z))\}.B$. Entonces, la aplicación matrical de T es $[{}^{\lambda}T(z)] =$

$T(\psi(z))(e_i(z), e_j(z)) = B^t.[T(\psi(z))(\pi_i(f(z)), \pi_j(f(z)))].B = B^t.A.B$, con lo cual se ve que es $\lambda - natural$.

□

Observación 2.150 *Si T es un tensor $\lambda - natural$ entonces, los super espacios incluídos en $({}^{LM}T)^{-1}(A)$ para alguna matriz, son fibrados principales, ya que la acción del grupo es sin punto fijo.*

Observación 2.151 *Conviene observar, que dado una variedad M, hay tensores sobre esta que no son $\lambda - naturales$ para ningún super espacio λ. Veamos un ejemplo: Sea T un tensor no nulo sobre M, es decir que exista $p \in M$ tal que $T(p) : M_p \times M_p \longrightarrow \mathbb{R}$ es no nula. Sea $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable de modo que $f(p) \neq 0$ y $f(q) = 0$ para algún $q \neq p$. Consideremos el tensor sobre M dado por $\widetilde{T}(\xi) = f(\xi).T(\xi)$. Si existe un super espacio λ sobre M tal que ${}^{\lambda}\widetilde{T} = A$ entonces, A debe ser la matriz nula. Pues, si $\psi(z) = q$, tenemos que $A =^{\lambda} \widetilde{T}(z) = [\widetilde{T}(q)(e_i(z), e_j(z))] = 0$. Pero, si $z' \in (\psi)^{-1}(p)$, la aplicación matricial en z' es ${}^{\lambda}\widetilde{T}(z') = [\widetilde{T}(q)(e_i(z'), e_j(z'))] = f(p)[T(p)(e_i(z').e_j(z'))]$ que es distinta de cero. Con lo cual se ve que T no es $\lambda - natural$.*

2.6 Atlas de Super Espacios.

En esta sección indicaremos al super espacio $(LM, \pi, GL(n), \cdot, \{\pi_i\})$, inducido por el fibrado de bases de M directamente con LM y al super espacio inducido por el fibrado de bases ortonormales de (M, g), con $O(M)$.

Definición 2.152 *Sea M una variedad y sea $\mathcal{A} = \{\lambda_i = (N_i, \psi_i, O_i, R_i, \{e_l\})\}_{i \in I}$ un conjunto de super espacios sobre M. Decimos que $\mathcal{A}$ es un atlas de super espacios si para todo $i, j \in I$ existe un morfismo de super espacios $(f_{ij}, \tau_{ij}) : \lambda_i \longrightarrow \lambda_j$ de modo que $f_{ij} : N_i \longrightarrow N_j$ es un difeomorfismo.*

Para abreviar, diremos que dos super espacios λ y β son compatibles si existen dos morfismos de super espacios $(f_{\lambda\beta}, \tau_{\lambda,\beta}) : \lambda \longrightarrow \beta$ y $(f_{\beta\lambda}, \tau_{\beta,\lambda}) : \beta \longrightarrow \lambda$ de modo que $f_{\lambda\beta}$ y $f_{\beta\lambda}$ sean difeomorfismos. Luego, un atlas de super espacios sobre M no es otra cosa que un conjunto de super espacios sobre M compatibles entre sí. A veces vamos a considerar atlas de super espacios con la propiedad de ser maximales, es decir, si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ implica que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ diremos que $\mathcal{A}$ es un atlas maximal. Otra forma equivalente de decir que $\mathcal{A}$ es un atlas maximal es: si λ es un super espacio sobre M y es compatible con los super espacios de $\mathcal{A}$, entonces $\lambda \in \mathcal{A}$.

Observación 2.153 *Notemos que la idea de atlas es una generalización natural de la idea de super espacio. Un super espacio λ es compatible consigo mismo, por lo tanto $\mathcal{A} = \{\lambda\}$ es un atlas de super espacios.*

Observación 2.154 *Los morfismos (f_{ij}, τ_{ij}) no forman parte de la definición del atlas $\mathcal{A}$, pedimos que existan para garantizar que los super espacios λ_i y λ_j sean compatibles. Puede haber otros morfismos con las misma propiedad entre estos super espacios. De todos modos, el morfismo (f_{ij}, τ_{ij}) tiene asociada una aplicación de entrelazamiento C_{ij} de modo que*

$$\{(e^j)_l(f_{ij}(z))\} = \{(e^i)_l(z)\}.C_{ij}(z)$$

Si λ es un super espacio sobre M notamos con $\mathcal{A} =< \lambda >$ al atlas maximal generado por λ. Si $\mathcal{B}$ ya es un atlas, $\bar{\mathcal{B}} =< \mathcal{B} >$ es el atlas maximal que lo incluye. Observamos que si $\mathcal{A}$ es un atlas maximal entonces, $\mathcal{A} =< \lambda >$ para cualquier $\lambda \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 2.155 *Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre una variedad M de dimensión n. Sea $A : N \longrightarrow GL(n)$ una aplicación diferenciable. Consideramos el super espacio $\lambda_A = (N, \psi, O, R, \{e_i^A\})$, donde $e_l^A(z) = \sum_{i=1}^{n} e_i(z)A_l^i(z)$. Si consideramos $\mathcal{F}(N, GL(n))$, es decir todas las aplicaciones diferenciables de N en $GL(n)$, el conjunto $\mathcal{A} = \{\lambda_A\}_{A\in\mathcal{F}(N,GL(n))}$ es un atlas de super espacios. Dados dos super espacios λ_A y λ_B de $\mathcal{A}$, se ve claramente que son compatibles al considerar el morfismo identidad. En este caso, la aplicación de entrelazamiento es $C_{AB}(z) = A^{-1}(z).B(z)$, pues $\{e_i^B(z)\} = \{e_i(z)\}.A(z).A^{-1}(z).B(z) = \{e_i^A(z)\}.A^{-1}(z).B(z)$.*

Observación 2.156 *Dada una variedad M existen distintos atlas de super espacios con la propiedad de ser maximal. Esto se ve inmediatamente con ejemplos triviales. Para esto dotemos a M con una métrica. Sean los super espacios inducidos por el fibrado de bases y el de bases ortonormales LM y $O(M)$ respectivamente. Por cuestión de dimensión, $O(M)$ y LM no son compatibles y por lo tanto, los atlas maximales $< O(M) >$ y $< LM >$ son diferentes. Veamos otro ejemplo:*

Ejemplo 2.157 *Sea M una variedad paralelizable y $\{H\}_{i=1}^{n} \in \chi(M)$ los n campos que trivializan TM. Sea (N, g) una variedad Riemanniana cuyo grupo de isometrías O_N actua sobre N transitivamente. Si N es una variedad de curvatura seccional constante (como las esferas, el hiperplano hiperbólico y R^m) satisface esta propiedad. Consideremos el super espacio $\lambda_{(N,g)} = (M \times N, pr_1, O_N, R_f, \{H_i \circ pr_1\})$, donde la acción de O_N sobre $M \times N$ está dada por $R_f(z, p) = (z, f(p))$. Si (N', g') es una variedad Riemanniana isométrica a (N, g), sea $h : (N, g) \longrightarrow (N', g')$ la isometría en cuestión. Como (N', g') es isométrica a (N, g), también satisface que su grupo de isometrías actua transitivamente sobre N'. Definimos de la misma manera el super espacio $\lambda_{(N',g')} = (M \times N', pr_1, O_{N'}, R'_f, \{H_i \circ pr_1\})$. Sea $(s, \tau) : \lambda_{(N,g)} \longrightarrow \lambda_{(N',g')}$ el morfismo dado por $s(z, p) = (z, h(p))$ y $\tau(f) = h \circ f \circ h^{-1}$. Tomando su inverso, se puede ver que $\lambda_{(N,g)}$ y $\lambda_{(N',g')}$ son compatibles, con lo cual el atlas maximal generados por ambos coincide. Si llamamos a este atlas $\mathcal{A} =< \lambda_{(N,g)} >$, el atlas $\{\lambda_{(N',g')} : (N', g') \text{ es isométrica a } (N, g)\} \subseteq \mathcal{A}$. Sea $(E, \tilde{g})$ una variedad Riemanniana cuyo grupo de isometrías O_E actua transitivamente sobre E, pero que no es difeomorfa a N. Por ejemplo, una variedad de curvatura seccional constante y de diferente dimensión. Luego, $\mathcal{A} =< \lambda_{(N,g)} > \neq < \lambda_{(E,\tilde{g})} >$.*

Como vimos, no se necesita mucho para tener atlas maximales distintos, sólo hace falta tener super espacios cuyas variedades "espacio" no sean difeomorfas. La dimensión es una restrición importante.

Definición 2.158 *Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos atlas de super espacios sobre M. Sea F una colección de morfimos de super espacios cuyo dominios son super espacios de $\mathcal{A}$ y sus codomios son super espacios de β. Decimos que F es un morfismo entre el atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ si para todo $\lambda \in \mathcal{A}$ y $\beta \in \mathcal{B}$ existe $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow \beta$ que pertenece a F.*

Observación 2.159 *Sea $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos atlas y $\lambda_0 \in \mathcal{A}$ y $\beta_0 \in \mathcal{B}$ dos super espacios. Supongamos que existe un morfismo $(f_0, \tau_0) : \lambda_0 \longrightarrow \beta_0$. Consideremos el siguiente conjunto de morfismos:*

$$F = \{f_{\beta_0\beta} \circ f_0 \circ f_{\lambda\lambda_0}, \tau_{\beta_0\beta} \circ \tau_0 \circ \tau_{\lambda\lambda_0},\}_{\lambda\in\mathcal{A},\ \beta\in\mathcal{B}}$$

donde $(f_{\beta_0\beta}, \tau_{\beta_0\beta}) : \beta_0 \longrightarrow \beta$ y $(f_{\lambda\lambda_0}, \tau_{\lambda\lambda_0}) : \lambda \longrightarrow \lambda_0$ son los morfismos que muestran que los super espacios β, β_0 y λ, λ_0 son compatibles respectivamente. Luego, el conjunto F es un morfismo entre el atlas $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$.

Dado un super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ tenemos definido un morfismo (Γ, L) entre λ y el super espacio inducido por el fibrado de bases LM, donde $\Gamma(z) = (e_1(z), \cdots, e_n(z))$ y L es el morfismo de cambio de base de λ. Recordamos que L es satisface que $\{e_i(z.a)\} = \{e_i(z)\}.L(a)$ para todo z en N y a en O. Por lo tanto, (Γ, L) induce un morfismo entre el atlas $\mathcal{A} =< \lambda >$ y el atlas generado por $< LM >$. En conclusión, siempre hay un morfismo entre un atlas $\mathcal{A}$ y $< LM >$. ¿Es esta una propiedad que caracteriza al atlas $< LM >$? Es decir, si tenemos un atlas maximal $\mathcal{B}$ tal que para todo atlas $\mathcal{A}$ sobre M existe un morfismo $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, ¿será $\mathcal{B} =< LM >$? Si $\mathcal{B} =< \beta >$, la propiedad anterior equivale a que para todo super espacio λ sobre M, incluso para LM, exista un morfismo $(f_\lambda, \tau_\lambda) : \lambda \longrightarrow \beta$.

$$\begin{tikzcd}
& \lambda \arrow[dl, "{(\Gamma_\lambda, L_\lambda)}"'] \arrow[dr, "{(f_\lambda, \tau_\lambda)}"] & \\
LM \arrow[rr, bend right, "{(f_{LM}, \tau_{LM})}"'] & & \beta \arrow[ll, bend right, "{(\Gamma_\beta, L_\beta)}"']
\end{tikzcd}$$

La respuesta es que no. Por ejemplo, si tenemos una variedad Riemanniana (M, g) paralelizable y de dimensión n, sean $H_1, \cdots, H_n$ campos ortonormales que trivializan TM. Luego si λ es un super espacio sobre M, sea $(f, \tau) : \lambda \longrightarrow O(M)$ definido por $f(z) = (\psi(z), H_1(\psi(z)), \cdots, H_n(\psi(z)))$ y $\tau(a) = Id_{n \times n}$. Claramente, (f, τ) es un morfismo de super espacios, con lo cual para cualquier atlas $\mathcal{A}$ existe un morfismo F entre $\mathcal{A}$ y $< O(M) >$. $O(M)$ y LM no son variedades difeomorfas, y por lo tanto $< LM > \neq < O(M) >$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A} \arrow[dl, "F_{\mathcal{A},LM}"'] \arrow[dr, "F_{\mathcal{A},O(M)}"] & \\
< LM > \arrow[rr, bend right, "F_{LM,O(M)}"'] & & < O(M) > \arrow[ll, bend right, "F_{O(M),LM}"']
\end{tikzcd}$$

Si mantenemos la condición de que la variedad sea paralelizable, podemos observar otros atlas con esta propiedad: los super espacios inducidos por el fibrado de bases orientadas positivamente L^+M y por el fibrado de bases ortonormales orientadas positivamente $SL(M)$, que son subsuper espacios de LM, también cumplen lo anterior y todos generan distintos atlas. Podemos agregar el atlas generado por $< (M, Id_M, \{1\}, R_1, \{H_i\}) >$, donde R_1 es la acción trivial.

En general la existencia de morfismos entre atlas de super espacios no establece ningún orden entre ellos, pues no se cumple la ley de tricotomía.

Definición 2.160 *Sea $\mathcal{A}$ un atlas de super espacios sobre M y T un tensor sobre M. Decimos que T es $\mathcal{A}-natural$ si T es λ-natural para todo $\lambda \in \mathcal{A}$.*

Observación 2.161 *Como se ve, la definición anterior es la generalización del concepto de $\lambda - naturalidad$. Si consideramos el atlas $\mathcal{A} = \{\lambda\}$, que consta de un solo super espacio, un tensor será $\mathcal{A} - natural$ si y sólo si es $\lambda - natural$.*

Ejemplo 2.162 *Sea λ un super espacio sobre M. Consideremos el atlas $\mathcal{A} = \{\lambda_A\}_{A \in GL(n)}$ como en el Ejemplo 2.155, salvo que aquí las aplicaciones A son matrices inversibles constantes. Si T, tensor sobre M es λ-natural, entonces T es λ_A-natural para todo $A \in GL(n)$. Con lo cual, en este caso, el conjunto de tensores $\mathcal{A} - naturales$ coincide con el conjunto de tensores $\lambda - naturales$ (y con los λ_A-naturales para cualquier A).*
Sea T λ-natural. Recordemos que $G_{\lambda T} = \{A \in GL(n) : A^t.{}^\lambda T.A = {}^\lambda T\}$. Del mismo modo que antes, consideramos el atlas $\mathcal{A} = \{\lambda_A\}_{A \in \mathcal{F}(N, G_{\lambda_T})}$. Un tensor es $\mathcal{A}$-natural si y sólo si es λ_A-natural para todo $A \in G_{\lambda T}$. Este atlas tiene la particularidad de que hay un tensor $\mathcal{A}$-natural que tiene la misma representación matricial constante en cada super espacio del atlas, T es invariante para cada morfismo entre los elementos del atlas.

De la definición de naturalidad con respecto a un atlas, queda claro, que si un tensor es $\mathcal{A} - natural$ también es $\lambda - natural$ para todo λ en $\mathcal{A}$. Si bien, en el ejemplo anterior, vimos dos casos en los que valía la recíproca, en general no se cumple que el conjunto de tensores $\mathcal{A}$-naturales coincida con los λ-naturales para todos los λ de $\mathcal{A}$, ni siquiera para algún super espacio del atlas. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.163 *Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M con N conexa y supongamos que tenemos $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable no constante y que nunca se anula. Supongamos, además que λ admite un tensor T λ-natural no nulo. Sea $\lambda' = (N, \psi, O, R, \{e'_i\})$, con $e'_i(z) = f(z).e_i(z)$. Luego, sabemos que ${}^{\lambda'}T(z) = (f(z))^2.{}^\lambda T$ para todo z en N, por lo tanto, T no es $\lambda' - natural$. De la misma manera, si T' es un tensor sobre M y es $\lambda' - natural$, este no será $\lambda - natural$. Si consideramos el atlas $\mathcal{A} = \{\lambda, \lambda'\}$, luego el único tensor $\mathcal{A} - natural$ es el nulo.*

Aquí vimos un ejemplo de dos super espacios muy parecidos, compatibles, que no comparten tensores naturales más allá del nulo. El concepto de naturalidad es muy sensible a variaciones en la aplicaciones de referencia.

Observación 2.164 *Sea $\mathcal{A}$ un atlas maximal de super espacios sobre M. Luego, el único tensor $\mathcal{A}-natural$ es el tensor nulo. Pues, sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio de $\mathcal{A}$, concideremos $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable nunca nula y construyamos λ' como en el Ejemplo 2.163. Dado que el atlas $\mathcal{A}$ es maximal, $\lambda' \in \mathcal{A}$, y como ya vimos, el único tensor $\lambda - natural$ y $\lambda' - natural$ es el nulo.*

Definición 2.165 *Sea $\mathcal{A}$ un atlas de super espacios sobre M y T un tensor sobre M. Decimos que T es $\mathcal{A}-natural$ débil si existe $\lambda \in \mathcal{A}$ de modo que T sea $\lambda-natural$.*

Observación 2.166 *Si $\mathcal{A} = \{\lambda\}$ o si $\mathcal{A}$ es como en el Ejemplo 2.162, entonces el concepto de $\mathcal{A}$-natural débil coincide con el de $\mathcal{A}$-natural. Por definición se tiene que $\{$ Tensores $\mathcal{A} - naturales$ débiles $\} = \bigcup_{\lambda \in \mathcal{A}} \{$Tensores $\lambda - naturales\}$.*

Cuando está en juego la estructura de una fibración, será útil considerar los siguientes tipos de atlas:

Definición 2.167 *Sea $\alpha = (E, \pi, \mathbb{F})$ una fibración. Decimos que un atlas $\mathcal{A}$ sobre E es un atlas trivial sobre α si todo super espacio de $\mathcal{A}$ es trivial sobre α.*

Tenemos la generalización del concepto de naturalidad con respecto a una fibración:

Definición 2.168 *Sea $\mathcal{A}$ un atlas trivial sobre una fibración $\alpha = (E, \pi, \mathbb{F})$ y T un tensor sobre E. Decimos que T es $\mathcal{A}$-natural con respecto a α si T es λ-natural con respecto a α para todo super espacio de $\mathcal{A}$.*

Ejemplo 2.169 *Para cada W base de $\mathfrak{g}$ sea $\lambda_W = (N, \psi, O, R, \{e_i^W\})$ el super espacio sobre el fibrado principal $\alpha = (E, \pi, G, \cdot)$ dotado con una conexión ω, descripto en el Ejemplo 2.20. Recordamos que $N = N_2 \times G$, la proyección está definida por $\psi(q, u, g) = q.g$, el grupo que actua sobre N es $O = O(n) \times G$ y la acción es $R_{(a,h)}(q, u, g) = (qh, ua, h^{-1}g)$. Las aplicaciones de referencia son $e_i^W(q, u, g) = (\tilde{\pi}_{q.g} \times \tilde{K}_{q.g})^{-1}(u_i, 0)$ y $e_{n+j}^W(q, u, g) = (\tilde{\pi}_{q.g} \times \tilde{K}_{q.g})^{-1}(0, W_j)$. Los super espacios λ_W son triviales sobre α y compatibles entre sí, por lo tanto $\mathcal{A} = \{\lambda_W\}_{W \in L\mathfrak{g}}$ es un atlas trivial sobre α. Si W' y W son bases de $\mathfrak{g}$, sea $A \in GL(k)$ tal que $W' = W.A$. Luego se ve sin dificultad, que la aplicación de entrelazamiento del morfismo identidad $(Id_N, Id_O) : \lambda_W \longrightarrow \lambda'_W$ es la aplicación constante $C(q, u, g) = \begin{pmatrix} Id_{n \times n} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Los tensores sobre E cuya representación matricial, la inducida por λ_W y por λ'_W,* *sólo depende del parámetro del grupo G, coincide en ambos casos. El conjunto de los tensores que son $\mathcal{A}-naturales$ con respecto a α, son aquellos que tienen para algún super espacio λ_W, la siguiente representación*

$$^{\lambda_W}T(q,u,g) = \begin{pmatrix} f(g).Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

donde $f : G \longrightarrow \mathbb{R}$ y $B : G \longrightarrow \mathbb{R}^{k\times k}$ son funciones diferenciables.

Como en la naturalidad de tensores sobre variedades, también sucede que si $\mathcal{A}$ es un atlas maximal trivial sobre una fibración $\alpha = (E, \pi, \mathbb{F})$, el único tensor $\mathcal{A}-natural$ con respecto a α es el tensor nulo. Si $\mathcal{A} =< \lambda = (N \times \mathbb{F}, \psi, O, R, \{e_i\}) >$, consideremos el super espacio de $\mathcal{A}$ $\lambda' = (N \times \mathbb{F}, \psi, O, R, \{f(z)e_i(z,\xi)\})$, donde $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable y no nula. Un tensor sobre E es λ y λ' natural con respecto a α solamente si se trata del tensor nulo.
Daremos una versión débil de la $\mathcal{A}$-naturalidad con respecto a la fibración:

Definición 2.170 *Sea $\mathcal{A}$ un atlas trivial sobre una fibración $\alpha = (E, \pi, \mathbb{F})$ y T un tensor sobre E. Decimos que T es $\mathcal{A}$-natural débil con respecto a α si T es λ-natural con respecto a α para algún super espacio de $\mathcal{A}$.*

2.7 Super Espacios y Grupos de Lie.

Sea G un grupo de Lie de dimensión n. Notamos con e al elemento neutro de G. Si $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $\mathfrak{g}$ y $g \in G$, sea

$$H_i^v(g) = (L_g)_{*_e}(v_i) \in G_g$$

el único campo invariante a izquierda de G tal que $H_i^v(e) = v_i$. Luego, $\{H_1^v(g), \ldots, H_n^v(g)\}$ es una base del espacio tangente a G en g. Veamos algunos ejemplos de super espacios sobre G.

$\Diamond$ $G \times G$:

Como G es un grupo de Lie, consideramos el fibrado principal trivial canónico sobre G de espacio $G \times G$. Dado que G es paralelizable, recordemos la Observación 2.23, este induce un super espacio sobre G. Si fijamos una base v de $\mathfrak{g}$, sea $\lambda^v = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ el super espacio sobre G dado por:

- $N = G \times G$
- $\psi : N \longrightarrow G$ dada por $\psi(g,h) = g.h$
- $O = G$ y la acción $R_a(g,h) = (g.a, a^{-1}.h)$
- $e_i^v(g,h) = H_i^v(g.h)$ para $1 \leq i \leq n$.

Tenemos que las aplicaciones de referencia e_i^v se comportan con respecto a la acción R del siguiente modo:

$$e_i^v \circ R_a(g,h) = e_i^v(g.a, a^{-1}.h) = H_i^v(gaa^{-1}h) = e_i^v(g,h) \ ,$$

luego, el morfismo de cambio de base $L : G \longrightarrow GL(n)$ es constantemente igual a la matriz $Id_{n\times n}$. Para cada tensor T sobre G, la aplicación matricial inducida ${}^{\lambda^v}T : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}$ está dada por

$$[{}^{\lambda^v}T(g,h)]_{ij} = T(gh)(H_i^v(gh), H_j^v(gh))$$

y cumple que

$${}^{\lambda^v}T \circ R_a = {}^{\lambda^v} T.$$

Observación 2.171 *Como el morfismo de cambio de base es constantemente igual a la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$, toda aplicación matricial constante correponde a un tensor sobre G. Los tensores sobre G $\lambda^v-naturales$ están en relación biunívoca con las matrices de $R^{n\times n}$.*

Observación 2.172 *Sea T un tensor sobre G, luego su aplicación matricial ${}^{\lambda^v}T(g,h)$ depende sólo de un parámetro si y sólo si T es $\lambda^v-natural$. Pues, supongamos que sólo depende del segundo parámetro, entonces $[{}^{\lambda^v}T(g',h')]_{ij} = [{}^{\lambda^v}T(g'hh'^{-1},h')]_{ij} = T(g'h)(H_i^v(g'h), H_j^v(g'h)) = [{}^{\lambda^v}T(g',h)]_{ij} = [{}^{\lambda^v}T(g,h)]_{ij}$, es constante. Si la aplicación matricial depende de sólo del primer parámetro verificamos en forma análoga la observación. Las métricas invariantes a izquierda sobre G son tensores de este tipo.*

Si elegimos otra base v', tenemos definido otro super espacio $\lambda^{v'}$ sobre G del mismo tipo. Veamos como se relacionan λ^v y $\lambda^{v'}$. Como v' y v son bases de $\mathfrak{g}$, existe $a_{vv'} \in GL(n)$ tal que $v' = v.a_{vv'}$. Luego

$e_i^{v'}(g,h) = H_i^{v'}(gh) = H_i^{v.a_{vv'}}(gh) = \sum_{l=1}^{n}(a_{vv'})_i^l H_l^v(gh) = \sum_{l=1}^{n}(a_{vv'})_i^l e_l^v(g,h)$, con lo cual tenemos que

$$e_i^{v'}(g,h) = e_i^v(g,h).a_{vv'}$$

Las matrices de ${}^{\lambda^v}T$ y ${}^{\lambda^{v'}}T$ se relacionan por:

$${}^{\lambda^{v'}}T = (a_{vv'})^t.{}^{\lambda^v}T.a_{vv'}$$

pues

$$[{}^{\lambda^{v'}}T(g,h)]_{ij} = T(gh)(H_i^{v'}(gh), H_j^{v'}(gh))$$
$$= \sum_{rs}(a_{vv'})_i^r.[T(gh)(H_r^v(gh), H_s^v(gh))].(a_{vv'})_j^s$$

Para no sobrecargar la notación, notemos con λ y λ' a λ^v y $\lambda^{v'}$ respectivamente . Sea $(f,\tau) : \lambda \longrightarrow \lambda'$ el morfismo definido por $f(g,h) = (g,h)$ y $\tau(a) = a$. Resulta que el morfismo de entrelazamiento $C : G \longrightarrow GL(n)$ de (f,τ) es constante, es $C(g,h) = a_{vv'}$ para todo $(g,h) \in G \times G$. Por lo tanto, un tensor T sobre G es (f,τ) invariante si y sólo si $a_{vv'} \in G_T(g,h)$.

Algunas observaciones:

- Para todo T tensor sobre G, ${}^{\lambda'}T \circ f$ corresponde a un tensor sobre G, pues $L' \circ \tau = L$.
- Si ${}^{\lambda}T$ es de tipo I_ν, T es invariante si y sólo si $a_{vv'} \in O_\nu$.
- Si $v = v'$, todos los tensores de tipo $(0,2)$ sobre G son invariante ($I_{(f,\tau)} = \chi_2^0(G)$).
- Si T es no degenerado para algún punto de G y $T \in I_{(f,\tau)}$, entonces $\det a_{vv'} = \pm 1$.
- Si tenemos un tensor T sobre G tal que para una base v de $\mathfrak{g}$ T resulta $\lambda^v - natural$, entonces T será $\lambda^{v'} - natural$ para toda v' base de $\mathfrak{g}$. El conjunto de tensores $\lambda^v - natural$ es independiente de la base elegida.

$\Diamond$ $G \times L\mathfrak{g}$*:*

Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ el super espacio sobre G definido por:

- $N = G \times L\mathfrak{g}$.
- $\psi : N \longrightarrow G$ donde $\psi(g, v_1, \ldots, v_n) = g$.
- $O = GL(n)$ y $R_a(g, v) = (g, v.a)$
- Las aplicaciones de referencia están dadas por $e_i(g, v) = H_i^v(g)$.

Si componemos las aplicaciones de referencia e_i con la acción tenemos que:

$$e_i((g, v).\xi) = e_i(g, v.\xi) = H_i^{v.\xi}(g) = (L_g)_{*_e}((v.\xi)_i)$$
$$= \sum_{r=1}^{n} \xi_i^r (L_g)_{*_e}(v_r) = \sum_{r=1}^{n} e_r(g, v).\xi_i^r,$$

por lo tanto,

$$\{e_i\} \circ R_\xi = \{e_i\}.\xi$$

Sea T un tensor de G, luego su aplicación matricial inducida ${}^\lambda T : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ satisface que

$${}^\lambda T \circ R_\xi = \xi^t.{}^\lambda T.\xi$$

para toda $\xi \in GL(n)$, pues el morfismo de cambio de base para este super espacio es $L(\xi) = \xi$.

Observación 2.173 *Se puede ver fácilmente que el único tensor $\lambda - natural$ es el nulo.*

En este super espacio las métricas sobre G invariantes a izquierda no son naturales. Si consideramos aquellos tensores sobre G tales que su representación matricial sólo depende de la base del algebra de Lie, es decir ${}^\lambda T(g, v) =^\lambda T(v)$, entonces cualesquiera sean g y g' resulta que ${}^\lambda T(g, v) =^\lambda T(g', v)$, en particular, $[{}^\lambda T(g, v)]_{ij} = [{}^\lambda T(e, v)]_{ij} = T(e)(v_i, v_j)$. Tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.174 *Sea T una métrica sobre G. T es invariante a izquierda si y sólo si ${}^\lambda T(g, v) =^\lambda T(v)$.*

Demostración :

$\Longrightarrow$) Supongamos que T es invariante por izquierda,

$$[{}^{\lambda}T(g,v)]_{ij} = T(g)\Big((L_g)_{*_e}(v_i),(L_g)_{*_e}(v_j)\Big) =$$

$$T(e)((L_{g^{-1}})_{*_g}\Big((L_g)_{*_e}(v_i)),(L_{g^{-1}})_{*_g}((L_g)_{*_e}(v_i))\Big) = T(e)(v_i,v_j) = [{}^{\lambda}T(e,v)]_{ij}.$$

Por lo tanto, ${}^{\lambda}T$ sólo depende del parámetro correspondiente a la base del algebra de Lie.

$\Longleftarrow$) Sean $g,h \in G$ y $w,v \in T_gG$. Queremos ver que T es invariante a izquierda $T(g)(v,w) = T(hg)\Big((L_h)_{*_g}(v),\, (L_h)_{*_g}(w)\Big)$. Sea $\{u_1,\ldots,u_n\}$ base de $\mathfrak{g}$. Luego, $v = \sum_{i=1}^{n} v_i(L_g)_{*_e}(u_i)$ y $w = \sum_{i=1}^{n} w_i(L_g)_{*_e}(u_i)$, con lo cual, $(L_h)_{*_g}(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i(L_{hg})_{*_e}(u_i)$ y $(L_h)_{*_g}(w) = \sum_{i=1}^{n} w_i(L_{hg})_{*_e}(u_i)$, por lo tanto,

$$T(hg)((L_h)_{*_g}(v),(L_h)_{*_g}(w)) = \begin{pmatrix} v_1 & ,\ldots, & v_n \end{pmatrix}.{}^{\lambda}T(hg,u).\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} v_1 & ,\ldots, & v_n \end{pmatrix}.{}^{\lambda}T(g,u).\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = T(g)(v,w).$$

□

Sea T un tensor cuya aplicación matricial inducida sólo depende de la base del algebra de Lie, o sea ${}^{\lambda}T(g,v) ={}^{\lambda} T(v)$. Sabemos que para $\xi \in GL(n)$, ${}^{\lambda}T(g,v.\xi) = (\xi)^t.{}^{\lambda}T(e,v).\xi$. Fijemos una base de v_0 de $\mathfrak{g}$. Si v es otra base de $\mathfrak{g}$, entonces existe $\xi \in GL(n)$ tal que $v = v_0.\xi$. Podemos definir $F : L\mathfrak{g} \longrightarrow GL(n)$ de modo que $v = v_0.F(v)$. En ese caso, podemos escribir la aplicación matricial inducida por el tensor T como

$${}^{\lambda}T(g,v) = (F(v))^t.{}^{\lambda}T(e,v_0).F(v)$$

Se obtiene la siguiente proposición:

Proposición 2.175 ${}^{\lambda}T$ *depende solamente de* v *si y sólo si existe* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *y* $F : L\mathfrak{g} \longrightarrow GL(n)$ *diferenciable tal que* $F(w.\xi) = F(w).\xi$*, de modo que*

$${}^{\lambda}T(g,w) = (F(w))^t.A.F(w)$$

$\Diamond\ G \times GL(n)$:

Fijemos una base v de $\mathfrak{g}$. Sea $\lambda = (N, O, R, \psi, \{e_i\})$ el siguiente super espacio:

- $N = G \times GL(n)$
- $\psi : N \longrightarrow G$ dada por $\psi(g, \xi) = g$
- $O = GL(n)$ y $R_a(g, \xi) = (g, \xi a)$
- $e_i : N \longrightarrow TG$, donde $e_i(g, \xi) = H_i^{v.\xi}(g)$.

La aplicaciones e_i se comportan con respecto a la acción:

$$\{e_i\} \circ R_a = \{e_i\}.a$$

además, se puede ver que $e_i \circ R_a(g, \xi) = e_i(g, Id).(\xi a)$.

Los tensores sobre G están biunívocamente relacionados con las aplicaciones matriciales diferenciables de N en $\mathbb{R}^{n\times n}$ que satisfacen que

$${}^{\lambda}T \circ R_a = a^t.{}^{\lambda}T.a$$

Se cumple que ${}^{\lambda}T(g, \xi) = \xi^t.{}^{\lambda}T(g, Id).\xi$. De lo cual se deduce que el único tensor $\lambda - natural$ es el tensor nulo.

Si ${}^{\lambda}T(g, \xi) =^{\lambda} T(\xi)$, tenemos que ${}^{\lambda}T(g, \xi) =^{\lambda} T(g, Id.\xi) = \xi^t.{}^{\lambda}T(g, Id).\xi$ $= \xi^t.{}^{\lambda}T(Id).\xi$. Luego ${}^{\lambda}T$ depende solamente de ξ si y sólo si es de la forma

$${}^{\lambda}T(g, \xi) = \xi^t.A.\xi \text{ con } A \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Si tomamos otra base v' de $\mathfrak{g}$, tenemos que la relación entre las aplicaciones matriciales es

$${}^{\lambda^{v'}}T(g, Id) = (a_{vv'})^t.{}^{\lambda^{v}}T(g, Id).(a_{vv'})$$

donde $a_{vv'}$ es la matriz que cumple que $v' = v.a_{vv'}$. Se puede ver sin dificultad que:

- T es $\lambda^{v'} - natural$ si y sólo si T es $\lambda^{v} - natural$.
- ${}^{\lambda^{v'}}T$ depende solamente de ξ si y sólo si ${}^{\lambda^{v}}T$ depende sólo de ξ.

$\Diamond$ $G \times O(n)$:

Fijemos una base v de $\mathfrak{g}$. Sea el super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ sobre G dado por:

- $N = G \times O(n)$.
- $\psi(g, \xi) = g$.
- $O = O(n)$ y $R_a(g, \xi) = (g, \xi a)$
- $e_i : N \longrightarrow TG$ dadas por $e_i(g, \xi) = H_i^{v.\xi}(g)$.

Tenemos lo siguiente:

- Las funciones e_i y la acción satisfacen que:
  - $\{e_i\} \circ R_a = \{e_i\}.a$
  - $\{e_i\}((g, \xi).a) = \{e_i(g, Id)\}.(\xi a)$
- Los tensores de tipo (0,2) sobre G están biunívocamente relacionados con las aplicaciones diferenciables ${}^{\lambda}T : N \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ que cumplen

  $${}^{\lambda}T \circ R_a = a^t.{}^{\lambda}T.a$$

  También se puede ver sin dificultad que ${}^{\lambda}T((g, \xi).a) = (\xi a)^t.{}^{\lambda}T(g, Id).(\xi a)$.
- Un tensor T es $\lambda - natural$ si y sólo si ${}^{\lambda}T(g, \xi) = k.Id_{n \times n}$, $k \in \mathbb{R}$.
- Si v' es otra base de $\mathfrak{g}$ sea λ' el super espacio inducido por esta sobre G. Sea $a \in GL(n)$ tal que $v' = v.a$. Si T es un tensor $\lambda - natural$, se puede ver sin dificultad que $[{}^{\lambda'}T(g, \xi)]_{ij} = f(g)[\xi^t.a^t.a.\xi]_{ij}$. Por lo tanto, si $v' = v.a$ con $a \in O(n)$, el conjunto de tensores $\lambda - naturales$ coincide con el de los tensores $\lambda' - naturales$.
- ${}^{\lambda}T$ depende solamente del parámetro de $O(n)$ si y sólo si es de la forma

  $${}^{\lambda}T(g, \xi) = \xi^t.A.\xi \quad \text{con } A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

2.8 Bundle Metrics.

Sea $(P, \pi, G, \cdot)$ un fibrado principal dotado de una conexión ω sobre una variedad semi-Riemanniana (M, r). Sea k la dimensión del grupo estructural G y n la dimensión de M. Notamos con $\mathcal{M}_{\mathbf{ad}}(\mathfrak{g})$ al conjunto de las métricas sobre $\mathfrak{g}$ invariantes por la aplicación adjunta. Definimos en P la siguiente métrica:

$$h(p)(X,Y) = r(\pi(p))\Big(\pi_{*_p}(X), \pi_{*_p}(Y)\Big) + (l \circ \pi)(p)\Big(\omega(X), \omega(Y)\Big)$$

donde $X, Y \in P_p$ y $l : M \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{ad}}(\mathfrak{g})$, (ver [18] y [16]).

Definición 2.176 *Si $l : M \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{ad}}(\mathfrak{g})$ es constante, decimos que h es una bundle metric.*

Observación 2.177 *Si el grupo de Lie es compacto, entonces el conjunto $\mathcal{M}_{\mathbf{ad}}$ es distinto de vacío, esto puede consultarte en [20]. Si además el algebra del grupo de Lie es simple entonces sólo admite una métrica definida positiva* **ad**-*invariante (salvo multiplicación escalar), esto se puede ver en [33].*

En lo que sigue vamos a considerar las métricas h que construímos con $l(p) = \epsilon.f(p).l_0$, donde $\varepsilon = \pm 1$, $f : M \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ diferenciable y $l_0 \in \mathcal{M}_{\mathbf{ad}}(\mathfrak{g})$ fija. Estas métricas tienen mucho interés pues son las que se utilizan en los modelos de Kaluzza-Klein.

Definición 2.178 *Si $\rho : (N, J) \longrightarrow (M, r)$ es una submersión entre variedades Riemanniannas (semi-Riemannianas), y notamos con H_u (que llamamos subespacio horizontal con respecto a la métrica) al complemento ortogonal de V_u (subespacio vertical) para $u \in N$, entonces se dice que ρ es una submersión Riemannianna (semi-Riemanniana) si*

$$r(\rho(u))\Big(\rho_{*_u}(X), \rho_{*_u}(Y)\Big) = J(u)(X,Y)$$

para todo $u \in N$ y todo $X,\ Y\ \in\ H_u$.

Observación 2.179 *En nuestro caso sabemos que $\pi : P \longrightarrow M$ es una submersión y es fácil ver que el subespacio horizontal que induce la conexión coincide con el complemento ortogonal por h del subespacio vertical, es decir $\ker(\omega(p)) = (V_p)^{\perp_h}$. Luego, de la definición de h se desprende que $h(p)(X,Y) = r(\pi(p))(\pi_{*_p}(X), \pi_{*_p}(Y))$ si $X, Y \in H_p$, y por lo tanto, $\pi : (P, h) \longrightarrow (M, r)$ resulta una submersión Riemanniana.*

Para $(P, \pi, G, \ \cdot\ )$ dotado de la conexión ω consideremos el super espacio $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ sobre P dado en el Ejemplo 2.8. Recordemos que $N = N_2 \times O(\mathfrak{g}) \times G$, la submersión es $\psi(q, u, v, g) = q.g$, el grupo de Lie es $O = O(n) \times O(k) \times G$ que actua sobre N por $R_{(a,b,h)}(q, u, v, g) = (qh, ua, vb, h^{-1}g)$ y las aplicaciones de referencia están dadas por $e_i(p, u, v, g) = (\tilde{\pi}_{p.g} \times \tilde{K}_{p.g})^{-1}(u_i, 0)$ y $e_{n+j}(p, u, v, g) = (\tilde{\pi}_{p.g} \times \tilde{K}_{p.g})^{-1}(0, v_j)$. λ es un super espacio trivial sobre el fibrado principal. Observamos que $O(\mathfrak{g})$ es el conjunto de bases ortonormales de $\mathfrak{g}$ con respecto a l_0, que es la métrica **ad**-invariante que utilizamos en la construcción de h.

Proposición 2.180 *La métrica h es un tensor λ-natural con respecto a $(P, \pi, G, \ \cdot\ )$ si y sólo si h es una bundle metric.*

Demostración: Sea ${}^{\lambda}h : N \longrightarrow \mathbb{R}^{(n+k)\times(n+k)}$ la aplicación matricial inducida por h. Por definición ${}^{\lambda}h(p, u, v, g)$ es la matriz de $h(p.g)$ en la base $\{e_i(p, u, v, g)$ $, e_{n+i}(p, u, v, g)\}$. Más prescisamente para $1 \le i, j \le n$ tenemos que:

$$h(p.g)\Big(e_i(p, u, v, g), e_j(p, u, v, g)\Big) = r(\pi_{*_{pg}}\Big(e_i(p, u, v, g)), \pi_{*_{pg}}(e_j(p, u, v, g))\Big) +$$

$$+ l \circ \pi(pg)\Big(\omega(pg)(e_i(p, u, v, g)), \omega(pg)(e_j(p, u, v, g))\Big)$$

$$= g(u_i, u_j) + 0 = \delta_{ij}$$

Para $1 \le i \le n$ y $1 \le j \le k$:

$$h(p.g)(e_i(p, u, v, g), e_{n+j}(p, u, v, g)) = 0 = h(p.g)(e_{n+j}(p, u, v, g), e_i(p, u, v, g))$$

Para $1 \le i, j \le k$:

$$h(p.g)(e_{n+i}(p, u, v, g), e_{n+j}(p, u, v, g))$$

$$= 0 + l \circ \pi(pg)(\omega(pg)(e_{n+i}(p, u, v, g)), \omega(pg)(e_{n+j}(p, u, v, g)))$$

$$= l \circ \pi(pg)(v_i, v_j) = \varepsilon.f(\pi(p)).\delta_{ij}$$

Luego,

$${}^{\lambda}h(p, u, v, g) = \begin{pmatrix} Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & \varepsilon.f(\pi(p)).Id_{k\times k} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, ${}^{\lambda}h(p, u, v, g)$ depende sólo del parámetro del grupo de Lie G si y sólo si f es constante.

$\square$

Observación 2.181 *La proposición anterior sigue valiendo, de alguna manera, si no imponemos condiciones sobre la función* $l : M \longrightarrow \mathcal{M}_{ad}$*. Si consideramos un super espacio similar a* λ*, con la diferencia que lo construímos utilizando otra métrica* **ad***-invariante sobre* $\mathfrak{g}$*, pongamos que la llamamos* l_1*, la representación matricial inducida por* h *es* ${}^{\lambda}h(p,u,v,g) = \begin{pmatrix} Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & [l(\pi(p))(v_i,v_j)] \end{pmatrix}$*. Fijemos* x *en* M *y sea* $p \in P_{x=\pi(p)}$*. Si* ${}^{\lambda}h$ *sólo depende del parámetro del grupo* G*, entonces* $[l(x)(v_i,v_j)]_{ij} = [l(x)(v'_i,v'_j)]_{ij}$ *si* v *y* v' *son dos bases ortogonales con respecto a* l_1*. Si fijamos una base* v_1*, consideremos la matriz dada por* $A_{ij} = l(x)((v_0)_i,(v_0)_j)$*. Cualquier otra base ortogonal con respecto a* l_1 *se escribe como* $v' = v_1.B$ *con* $B \in O(k)$*. Luego, tenemos que* $B^t.A.B = A$ *para todo* $B \in O(k)$*, con lo cual* $A = \delta.Id_{k\times k}$*. Por lo tanto,* $l(x) = \delta(x).l_1$*, pero como no puede depender de la fibra, la función* l *debe ser constantemente un multiplo escalar de* l_1*. Finalmente,* ${}^{\lambda}h(p,u,v,g)$ *dependerá sólo del parámetro* g *si y sólo si* $l = \delta.l_1$ *con* δ *constante. En este caso no obtenemos que la condición suficiente sea ser una bundle metric, sino las bundle metrics que construímos a partir de la métrica* l_0*. En la proposición anterior pasa lo mismo. Recordemos que teníamos restringido el conjunto de las métricas* h *a las que* $l(x) = \varepsilon.f(x).l_0$ *y por lo tanto también el conjunto de las bundle metric. Es conveniente observar que si cambiamos la métrica con la que construímos el super espacio* λ*, pongamos* l_0*, las métricas* λ*-naturales con respecto al fibrado serán las bundle metric contruídas a partir de* l_0*.*

La métrica h con respecto a otra conexión:

Para construir λ utilizamos la conexión ω. Consideremos ω' una nueva conexión sobre $(P,\pi,G,\ \cdot\ )$ y sea $\lambda^{\omega'}$ el super espacio inducido por esta.

En lo que se diferencian λ^{ω} y $\lambda^{\omega'}$ es en las aplicaciones de referencia $\{e_i\}$ y $\{e'_i\}$ y en lo que se diferencian ω y ω' es en el subespacio horizontal que determinan. Como $\{e_i(p,u,v,g), e_{n+j}(p,u,v,g)\}$ y $\{e'_i(p,u,v,g), e'_{n+j}(p,u,v,g)\}$ son bases de $P_{p.g}$, existe $A(p,u,v,g) \in GL(n+k)$ tal que

$$\{e'_i, e'_{n+j}\} = \{e_i, e_{n+j}\}.A$$

Podemos escribir a A como

$$A(p,u,v,g) = \begin{pmatrix} a_1(p,u,v,g) & a_2(p,u,v,g) \\ a_4(p,u,v,g) & a_3(p,u,v,g) \end{pmatrix}$$

donde $a_1(p,u,v,g) \in R^{n\times n}$, $a_2(p,u,v,g) \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $a_3(p,u,v,g) \in \mathbb{R}^{k\times k}$ y $a_4(p,u,v,g) \in \mathbb{R}^{k\times n}$.

Observación 2.182 *Para el morfismo de super espacios* $(Id_N, Id_O) : \lambda^\omega \longrightarrow \lambda^{\omega'}$, $A(p,u,v,g)$ *es la aplicación de entrelazamiento.*

Observación 2.183 *Como* $\omega(\sigma(V)) = \omega'(\sigma(V)) = V$ *para* $V \in \mathfrak{g}$, *tenemos que* $e_{n+j}(p,u,v,g) = e'_{n+j}(p,u,v,g) = \sigma(v_j)$, *luego* $a_2(p,u,v,g) = 0$ *y* $a_3(p,u,v,g) = Id_{k\times k}$. *Con lo cual,*

$$A = \begin{pmatrix} a_1(p,u,v,g) & 0 \\ a_4(p,u,v,g) & Id_{k\times k} \end{pmatrix}$$

La métrica h tiene una representación matricial global con respecto a λ^ω dada por ${}^{\lambda^\omega}h = \begin{pmatrix} Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & \varepsilon.f(\pi(p)).Id_{k\times k} \end{pmatrix}$. Si ${}^{\lambda^{\omega'}}h$ es la aplicación matricial inducida por h en $\lambda^{\omega'}$ tenemos que la relación entre ambas es

$${}^{\lambda^{\omega'}}h(p,u,v,g) = \begin{pmatrix} a_1^t(p,u,v,g) & a_4^t(p,u,v,g) \\ 0 & Id \end{pmatrix} .{}^{\lambda^\omega}h(p,u,v,g). \begin{pmatrix} a_1(p,u,v,g) & 0 \\ a_4(p,u,v,g) & Id \end{pmatrix}$$

y haciendo el producto de las matrices,

$${}^{\lambda^{\omega'}}h(p,u,v,g) =$$

$$\begin{pmatrix} a_1^t(p,u,v,g)a_1(p,u,v,g) + \varepsilon.f(\pi(p))a_4^t(p,u,v,g).a_4(p,u,v,g) & \varepsilon.f(\pi(p)).a_4^t(p,u,v,g) \\ \varepsilon.f(\pi(p))a_4(p,u,v,g) & \varepsilon.f(\pi(p)).Id_{k\times k} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, si las conexiones se relacionan entre sí de tal modo que la submatriz a_1 es constante ó $a_1 \in O(n)$ y a_4 es constante, se sigue que si h es λ^ω-natural con respecto a $(P,\pi,G,\ \cdot\ )$, entonces h también es $\lambda^{\omega'}$-natural con respecto a $(P,\pi,G,\ \cdot\ )$.

Observación 2.184 *Veamos que se puede decir de la relación entre las submatrices* a_1 *y* a_4. *Una conexión* ω' *induce las siguientes* k*-formas: fijada un base* v *de* $\mathfrak{g}$, *sean* $\omega'^l : TP \longrightarrow \mathbb{R}$, *dadas por* $\omega'(W) = \displaystyle\sum_{l=1}^{k} \omega'_l(W)v_l$. *Si* $B_s^r(p,u,v,g)$ *es la aplicación matricial que cumple que* $\omega'(p.g)(e_r(p,u,v,g)) = \displaystyle\sum_{s=1}^{k} B_s^r(p,u,v,g)v_s$, *es decir* $B_s^r(p,u,v,g) = \omega'_s(e_r(p,u,v,g))$, *luego tenemos que las submatrices satisfacen que* $a_4(p,u,v,g) = -B^t(p,u,v,g).a_1(p,u,v,g)$.

Capítulo 3

Métricas Naturales sobre el Fibrado Tangente

En este capítulo vamos a estudiar lo que se conoce en la literatura como *métricas naturales* sobre el fibrado tangente de una variedad Riemanniana. Estas son las métricas G sobre TM tales que la proyección canónica sobre la variedad base (M, g) resulta una submersión Riemanniana, el subespacio horizontal inducido por la conexión de Levi-Civita de (M, g) es ortogonal al subespacio vertical y además G es un tensor natural en el sentido clásico, es decir, que proviene por medio de un operador natural de segundo orden de la métrica g. Ejemplos de estas son las conocidas métricas de Sasaki y de Cheeger-Gromoll, que fueron estudiadas por Kowalski, Sekizawa, Aso, Musso, Tricerri, Gudmundsson y Kappos entre otros.
El objetivo de este capítulo es calcular el tensor de curvatura de (TM, G). Valiéndonos de un super espacio adecuado y de la fórmula para submersiones Riemannianas de O'Neill [38], encontraremos las expresiones del tensor de curvatura con respecto a una base. Como consecuencia de las ecuaciones de curvatura, en las que se ve la relación entre la curvatura del fibrado y la curvatura de la variedad base, se obtendrán expresiones para la curvatura seccional de (TM, G), generalizando los resultados conocidos para la métrica de Sasaki y de Cheeger-Gromoll. Es sabido que si (TM, G), con G métrica natural, es plano entonces, necesariamente (M, g) es plana. La recíproca, si bien se cumple para la métrica de Sasaki (esto fue probado por Aso en [3] y Kowalski en [24]), en general no es cierta. Por ejemplo, no vale para la métrica de Chegeer-Gromoll. En este capítulo, entre otras cosas, vamos a ver que condición debe satisfacer la métrica natural para que valga: (TM, G) plana si y sólo si (M, g) plana.

En su trabajo de 2005 Abbassi y Sarih [1] consideran las métricas del fibrado tangente de una variedad Riemanniana que son tensores naturales en el sentido clásico y logran dar una expresión para el tensor de curvatura del fibrado tangente dotado de unas de esas métricas. Valiéndose de esas ecuaciones ellos estudian diversas relaciones entre las geometrías del fibrado tangente y la variedad base. Algunos resultados de este capítulo, si bien son independientes, coinciden con los obtenidos por Abbassi y Sarih, pero el punto de vista y la técnica utilizada es diferente.

3.1 Métricas Naturales.

Definición 3.1 *Sea G una métrica Riemanniana sobre el fibrado tangente TM de una variedad Riemanniana (M, g) tal que G es la imagen por un operador natural de segundo orden (ver Apéndice) de la métrica g. Si $\pi : (TM, G) \longrightarrow (M, g)$ es una submersión Riemanniana y el subespacio horizontal inducido por la conexión de Levi-Civita en cada punto es ortogonal al vertical, entonces decimos que G es una métrica natural sobre TM.*

Recordemos el super espacio del Ejemplo 2.26. Sea (M, g) una variedad Riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita. Sea $\lambda = (O(M) \times \mathbb{R}^n, \psi, O(n), \tilde{R}, \{e_i\})$ el super espacio sobre TM, donde la proyección está dada por $\psi(p, u, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i.u_i$, la acción del grupo $O(n)$ sobre $O(M) \times \mathbb{R}^n$ es $\tilde{R}_a(p, u, \xi) = (p, \sum_{i=1}^{n} a_1^i u_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_n^i u_i, , \sum_{i=1}^{n} a_1^i \xi_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} a_n^i \xi_i)$ y las aplicaciónes de referencia están dadas por $e_i(p, u, \xi) = (\pi_{*_v} \times K_v)^{-1}(u_i, 0_p)$ y $e_{n+i}(p, u, \xi) = (\pi_{*_v} \times K_v)^{-1}(0_p, u_i)$ donde $v = \psi(p, u, \xi)$ y $1 \leq i \leq n$. Sabemos por la Proposición 2.17 que los tensores de tipo (0,2) sobre TM están en relación uno a uno con las aplicaciones diferenciables ${}^\lambda T : O(M) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, de la forma ${}^\lambda T(p, u, \xi) = \begin{pmatrix} A_1(p, u, \xi) & A_2(p, u, \xi) \\ A_4(p, u, \xi) & A_3(p, u, \xi) \end{pmatrix}$, donde $A_i : O(M) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ con $i = 1, \cdots, 4$ satisfacen que $A_i(R_a(p, u, \xi)) = a^t.A_i(p, u, \xi).a$ para todo $a \in O(n)$. En [6], Calvo y Keilhauer probaron que las métricas sobre el fibrado tangente que provienen de la métrica de la variedad base mediante un operador natural de segundo orden, son aquellas métricas cuya representación matricial inducida por el super espacio λ sólo depende del parámetro ξ. En [6], también se caracterizaron las aplicaciones matriciales diferenciables de este tipo. Es decir, ${}^{\lambda}T(p,u,\xi) ={}^{\lambda} T(\xi)$ depende sólo del parámetro ξ si y sólo si existen $\alpha_i, \beta_i : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones diferenciables, para $(i = 1,2,3,4)$, tal que ${}^{\lambda}T = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix}$ donde

$$A_i(p,u,\xi) = \alpha_i(\|\xi\|^2).Id + \beta_i(\|\xi\|^2).(\xi)^t.\xi$$

En este capítulo, a menos que se diga lo contrario, λ denotará al super espacio sobre TM dado por $\lambda = (O(M) \times \mathbb{R}^n, \psi, O(n), \tilde{R}, \{e_i\})$ y llamaremos N a la variedad $O(M) \times \mathbb{R}^n$. Conviene aclarar que algunas veces u y v denotarán una base de alguna fibra tangente y otras un punto de TM, esto quedará claro por el contexto. Usualmente, con $z = (q,u,\xi)$ denotaremos un punto de N y a la acción como $\tilde{R}_a(z) = z.a$.

Proposición 3.2 *Sea G una métrica sobre TM. G es una métrica natural si y sólo si*

$${}^{\lambda}G(p,u,\xi) = \begin{pmatrix} Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & \alpha(\|\xi\|^2).Id_{n\times n} + \beta(\|\xi\|^2)(\xi)^t.\xi \end{pmatrix}$$

donde $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $\alpha, \beta : [0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables que cumplen que $\alpha(t) > 0$ y $\alpha(t) + \beta(t)t > 0$ para todo $t \geq 0$.

Demostración: Sea la representación matricial de G inducida por λ, ${}^{\lambda}G = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix}$. Como el subespacio horizontal inducido por la conexión de Levi-Civita de (M,g) es ortogonal al vertical las submatrices A_2 yA_4 son $[A_2(p,u,\xi)]_{ij} = G(\psi(p,u,\xi))(e_i(p,u,\xi), e_{n+j}(p,u,\xi)) = [A_4(p,u,\xi)]_{ji} = 0$ con $1 \leq i,j, \leq n$, es decir $A_2 = A_4 = 0 \in R^{n\times n}$. Si $1 \leq i,j \leq n$, por ser $\pi : (TM,G) \longrightarrow (M,g)$ una submersión Riemanniana tenemos que $[A_1(p,u,\xi)]_{ij} = G(\psi(p,u,\xi))(e_i(p,u,\xi), e_j(p,u,\xi))$ $= g(\psi(p,u,\xi))(\pi_{*_{\psi(p,u,\xi)}}(e_i(p,u,\xi)), \ , \pi_{*_{\psi(p,u,\xi)}}(e_j(p,u,\xi))) = g(\psi(p,u,\xi))(u_i,u_j) = \delta_{ij}$, con lo cual $A_1 = Id_{n\times n}$. Como G proviene mediante un operador natural de segundo orden de la métrica g, sabemos que la submatriz A_3 de su reprecentación matricial inducida por λ no puede ser de cualquier forma, sino que debe ser $A_3(p,u,\xi) = \alpha(\|\xi\|^2).Id_{n\times n} + \beta(\|\xi\|^2).\xi^t\xi$ para α y β funciones diferenciables con dominio en $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Al ser G una métrica Riemanniana, debe ser $\alpha(t) > 0$ y $\alpha(t) + \beta(t)t > 0$ si $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Para la recíproca sólo hace falta ver que la métrica definida de esta manera es definida positiva. Luego, si $v \neq 0_p \in M_p$, completamos $\frac{v}{\|v\|}$ a una base ortonormal de M_p, pongamos $u = \{\frac{v}{\|v\|}, u_2, \ldots, u_n\}$ y consideremos $\xi = (\|v\|, 0, \cdots, 0)$. Tenemos que $\psi(p, u, \xi) = v$ y que $\{e_1(p, u, \xi), \ldots, e_n(p, u, \xi), e_{n+1}(p, u, \xi), \ldots, e_{2n}(p, u, \xi)\}$ es una base de $(TM)_v$. Luego, $G(v)(e_i(p, u, \xi), e_j(p, u, \xi)) = \delta_{ij}$, $G(v)(e_i(p, u, \xi), e_{n+j}(p, u, \xi)) = 0$ y $G(v)(e_{n+i}(p, u, \xi), e_{n+j}(p, u, \xi)) = \delta_{ij}\alpha(\|v\|^2) + \delta_{ij1}\beta(\|v\|^2)\|v\|^2 > 0$. Por otro lado, si $v = 0_p$ tomamos u cualquier base ortonormal de M_p y $\xi = 0$. En este caso, tenemos para los vectores verticales, ya que los horizontales se comportan igual que en el caso anterior, que $G(v)(e_{n+i}(p, u, \xi), e_{n+j}(p, u, \xi)) = \delta_{ij}\alpha(0) > 0$. Esto nos dice que G es definida positiva.

□

3.1.1 Ejemplos: Métrica de Sasaki y Métrica de Cheeger-Gromoll.

Sea (M, g) una variedad Riemanniana y K la función de conexión asociada a la conexión de Levi-Civita de g. La *métrica de Sasaki*, que notamos con G_s, es la métrica sobre TM dada por

$$G_s(v)(X, Y) = g(\pi(v))(\pi_{*_v}(X), \pi_{*_v}(Y)) + g(\pi(v))(K_v(X), K_v(Y)))$$

para todo $X, Y \in (TM)_u$. Claramente G_s resulta una métrica natural. En su representación matricial asociada la función α es constantemente 1 y la función β es constantemente igual a 0. Es decir,

$$^{\lambda}G_s = \begin{pmatrix} Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & Id_{n\times n} \end{pmatrix}$$

La métrica de Sasaki aparece naturalmente en el fibrado tangente. Sea $c : I \longrightarrow M$ una geodésica de (M, g). Es sabido que, si S es el campo de TM dado por $S(u) = (\pi_{*_u} \times K_u)^{-1}(u, 0_{\pi(u)})$, $\dot{c}$ es una curva integral de S. Por otro lado, si $\alpha : J \longrightarrow TM$ es curva integral de S, entonces $\pi \circ \alpha$ es una geodésica de TM. El campo S recibe el nombre de *spray geodésico* o simplemente *campo geodésico*. Si dotamos a TM con la métrica de Sasaki y consideramos su conexión de Levi-Civita, entonces las curvas integrales de S serán geodésicas del fibrado tangente.

La relación entre las geometrías del fibrado tangente dotado con la métrica de Sasaki y la variedad base es muy estrecha. Por ejemplo, Aso en [3], probó que (TM, G_s) es plano si y sólo si (M, g) es plana, veremos una demostración de este hecho más adelante. También Aso vió que (TM, G_s) tiene curvatura seccional acotada si y sólo si (TM, G_s) es plana, o sea si y sólo si (M, g) es plana. Musso y Tricerri probaron en [36], entre otras cosas, que (TM, G_s) tiene curvatura escalar constante si y sólo si (M, g) es plana. Todo esto nos dice que la métrica de Sasaki es bastante rígida. Veamos a continuación una métrica natural no tan rígida en este sentido.

Otra métrica de este tipo que ha sido objeto de interés es la de *métrica de Cheeger-Gromoll*. Esta queda definida como aquella que satisface que:

1) $G_{cg}(u)(X^h, Y^h) = g(\pi(u))(\pi_{*_u}(X^h), \pi_{*_u}(Y^h))$

2) $G_{cg}(u)(X^h, Z^v) = 0$

3) $G_{cg}(u)(W^v, Z^v) = \frac{1}{1+|u|^2}.\Big[g(\pi(u))(K_u(W^v), K_u(Z^v))$

$$+g(\pi(u))(K_u(W^v), u).g(\pi(u))(K_u(Z^v), u)\Big]$$

donde $u \in TM$, $X^h, Y^h \in (TM)^h_u$ y $W^v, Z^v \in (TM)^v_u$.

La aplicación matricial inducida por el super espacio λ evaluada en (p, u, ξ) es la matriz de $G_{cg}(v)$, si $v = \psi(p, u, \xi)$, en la base $\{e_i(p, u, \xi), e_{n+i}(p, u, \xi)\}_{i=1}^n$. De 1) y 2) se deduce que $A_1 = Id_{n\times n}$ y $A_2 = A_4 = 0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Como

$$(A_3(p, u, \xi))^i_j = G_{cg}(v)(e_{n+i}(p, u, \xi), e_{n+j}(p, u, \xi))$$

tenemos que la entrada (i, j) de la submatriz A_3 es

$$(A_3(p, u, \xi))^i_j = \frac{1}{1 + |\xi|^2}.(\delta_{ij} + \xi_i.\xi_j)$$

con lo cual, $\alpha(t) = \beta(t) = \frac{1}{1+t}$, y por lo tanto,

$${}^{\lambda}G_{cg}(p, u, \xi) = \begin{pmatrix} Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+|\xi|^2}(Id_{n\times n} + (\xi)^t.\xi) \end{pmatrix}.$$

Una muestra de que la métrica de Cheeger-Gromoll es menos rígida que la métrica de Sasaki es el hecho de que si la variedad base (M, g) es plana esto no implica que (TM, G_{cg}) lo sea, sino como mostró Sekisawa en [41], si (M, g) tiene tensor de curvatura nulo, entonces (TM, G_{cg}) tiene curvatura seccional no-negativa. Además, la curvatura seccional de (TM, G_{cg}) nunca es constante.

Gudmundsson y Kappos en [15] muestran que dado (M, g) una variedad de curvatura seccional constante y $\dim(M) = n > 2$, existen ciertas constantes $c_n < 0 < C_n$ (que dependen de la dimensión de (M, g)), de modo que (TM, G_{cg}) tiene curvatura escalar positiva si y sólo si $K_{(M,g)} \in (c_n, C_n)$, donde $K_{(M,g)}$ es la curvatura seccional de (M, g). También probaron que (TM, G_{cg}) tiene curvatura escalar no-negativa si y sólo si $K_{(M,g)} \in [c_n, C_n]$. En el caso de superficies ($\dim(M) = 2$), $c_2 = 0$.

En próximas secciones, veremos más ejemplos de métricas naturales y volveremos sobre algunas de las propiedades de la métrica de Sasaki y de la métrica de Cheeger-Gromoll que mencionamos.

3.2 Ecuaciones de Curvatura.

En esta sección calcularemos el tensor de curvatura de TM dotado con un métrica natural G. Con este objetivo, definiremos una métrica G^* en la variedad espacio N del super espacio λ, de modo que la proyección $\psi : (N, G^*) \longrightarrow (TM, G)$ sea una submersión Riemanniana. Luego, utilizando la fórmula de O'Neill para submersiones, obtendremos el tensor de curvatura de (TM, G).

3.2.1 Métrica G^*.

Sean $P : O(M) \longrightarrow M$ la proyección canónica $P(q, u) = q$ y las proyecciones $\pi_j : O(M) \longrightarrow TM$, donde $j = (1, \ldots, n)$, dadas por $\pi_j(q, u) = u_j$. Consideramos las siguientes $n + n^2$ 1-formas sobre $O(M)$:

$$\theta^i(q, u)(b) = g_q(P_{*_{(q,u)}}(b), u_i)$$

$$\omega^i_j(q, u)(b) = g_q(K((\pi_j)_{*_{(q,u)}}(b)), u_i)$$

Observación 3.3 $\omega^i_j = -\omega^j_i$. *En efecto,* $\pi_j : O(M) \longrightarrow TM$ *es un campo a lo largo de la proyección* P. *Como* ∇ *es la conexión de Levi-Civita de* (M, g), *o sea es compatible con la métrica,* $\omega^i_j(q, u)(b) = g_q(K((\pi_j)_{*_{(q,u)}}(b)), u_i) = g(P(q, u))(\nabla_b \pi_j, \pi_i(q, u))$ $= b(g(P(q, u))(\pi_j, \pi_i)) - g(P(q, u))(\pi_j(q, u), \nabla_b \pi_i)) = -\omega^j_i(q, u)(b)$.

Luego, $\theta^1(q, u), \ldots, \theta^n(q, u), \omega^i_j(q, u)$ con $1 \leq i < j \leq n$ es una base de $T^*_{(q,u)}O(M) = O(M)^*_{(q,u)}$ para todo $(q, u) \in O(M)$. Si $P_1 : N \longrightarrow O(M)$ es la proyección en la primera coordenada y $P_2 : N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la proyección en la segunda coordenada,

haciendo abuso de notación, notamos con $\theta^i = (P_1)^*(\theta^i)$, $\omega^i_j = (P_1)^*(\omega^i_j)$ y $d\xi^i = (P_2)^*(d\xi^i)$, donde $d\xi^i$ son las 1-formas canónicas de $\mathbb{R}^n$.
Tenemos que

$$\theta^1|_{(q,u,\xi)}, \dots, \theta^n|_{(q,u,\xi)}, d\xi^1|_{(q,u,\xi)}, \dots, d\xi^n|_{(q,u,\xi)}, \{\omega^i_j|_{(q,u\xi)}\}_{1\leq i<j\leq n}$$

es base de $N^*_{(q,u,\xi)}$.
Si $z = (q,u,\xi) \in N$, $\sigma_z : O(n) \longrightarrow N$ esta dada por $\sigma_z(a) = z.a$. Sea $\mathfrak{o}(n)$ el algebra de Lie de $O(n)$. Es sabido que $\mathfrak{o}(n)$ son las matrices antisimétricas de $\mathbb{R}^{n\times n}$, y por lo mencionado en la Sección 2.4.1 del Capítulo 2, $V_z = \ker(\psi_{*_z}) = (\sigma_z)_{*_{Id}}(\mathfrak{o}(n))$.

Observación 3.4 *Sea A una matriz antisimétrica de $\mathfrak{o}(n)$. Luego*

$$\omega^i_j|_{(q,u,\xi)}((\sigma_{(q,u,\xi)})_{*_{Id}}(A)) = A^i_j \tag{3.1}$$

Vamos a considerar el siguiente marco para T^*N (que notaremos N^*) , dado $z \in N$ sea la siguiente base de N^*_z:

$$\theta^1|_z, \dots, \theta^n|_z, \theta^{n+1}|_z, \dots, \theta^{2n}|_z, \{\omega^i_j|_z\}_{1\leq i<j\leq n}$$

donde

$$\theta^{n+i} = d\xi^i + \sum_{j=1}^{n} \xi^j.\omega^i_j$$

Proposición 3.5 *El subespacio vertical está determinado por $V_z = \{b \in N_z : \theta^l(b) = 0 \ \ 1 \leq l \leq 2n\}$.*

Demostración: Sea $z = (q,u,\xi)$ y $b \in V_z$, luego existe A matriz antisimétrica tal que $b = (\sigma_z)_{*_{Id}}(A)$. Si c es una curva en $O(n)$ tal que $c(0) = Id_{n\times n}$ y $\dot{c}(0) = A$, entonces

$$\begin{aligned} d\xi^i\Big((\sigma_z)_{*_{Id}}(A)\Big) &= d\xi^i\Big((\sigma_z)_{*_{Id}}(\dot{c}(0))\Big) = D|_{t=0}\Big(\xi^i \circ P_2 \circ \sigma_z \circ c(t)\Big) \\ &= D|_{t=0}\Big(\sum_{l=1}^{n} \xi^l.c^l_i(t)\Big) = \sum_{l=1}^{n} \xi^l A^l_i \end{aligned}$$

luego, por 3.1 se sigue que

$$\theta^{n+i}(b) = d\xi^i\Big((\sigma_z)_{*_{Id}}(A)\Big) + \sum_{l=1}^{n} \xi^l.\omega^i_l\Big((\sigma_z)_{*_{Id}}(A)\Big)$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \xi^l . A_i^l + \sum \xi^l . A_l^i = 0$$

Por otro lado, $\theta^i((\sigma_z)_{*_{Id}}(A)) = g_q(P_{*_{(q,u,\xi)}}((\sigma_{(q,u,\xi)})_{*_{Id}}(A)), u_i) = 0$ para $1 \leq i \leq n$, pues $((P \circ \sigma_{(q,u,\xi)})_{*_{Id}} = 0$. Luego, $V_z \subseteq \{b \in N_z : \theta^l(b) = 0 \text{ para } 1 \leq l \leq 2n\}$ y la igualdad se sigue de que las dimensiones son iguales.

□

Definición 3.6 *Sea $H_z = \{b \in N_z : \omega_j^i(b) = 0 \ 1 \leq i < j \leq n\}$ que denominamos subespacio horizontal en z.*

Veremos que esta distribución suave es una conexión del super espacio λ. De hecho, es claro que para cada $z \in N$ tenemos que $N_z = H_z \oplus V_z$, sólo hace falta verificar la invarianza de la distribución con respecto a la acción del grupo.

Dado que $\psi_{*_z} : N_z \longrightarrow TM_{\psi(z)}$ es una submersión, $\psi_{*_z}(V_z) = 0_{\psi(z)}$ y $\psi_{*_z} : H_z \longrightarrow (TM)_{\psi(z)}$ es un isomorfismo lineal. Si G es una métrica sobre TM, el pullback de esta por ψ, $\psi^*(G)$, resulta un tensor simétrico de tipo $(0,2)$ sobre N que se escribe:

$$\psi^*(G) = \sum_{l,m=1}^{2n} G_{ij}^* \theta^i \otimes \theta^j$$

.

Observación 3.7 *Como $\psi \circ \tilde{R}_a = \psi$ para todo $a \in O(n)$, entonces el tensor $\psi^*(G)$ es invariante por la acción del grupo, es decir*

$$(\tilde{R}_a)^*(\psi^*(G)) = \psi^*(G).$$

Observación 3.8 *El tensor simétrico de tipo $(0,2)$ sobre N definido por*

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega_j^i \otimes \omega_j^i$$

verifica que $(\tilde{R}_a)^*(\omega) = \omega$ para todo $a \in O(n)$.

Con todo esto, podemos definir la métrica G^* en N que mencionamos.

Definición 3.9 *Llamamos G^* a la métrica sobre N inducida por (TM, G) dada por*

$$G^* = \psi^*(G) + \omega \tag{3.2}$$

Por definición resulta que $H_z = (V_z)^{\perp_{G^*}}$ y $\psi_{*_z} : H_z \longrightarrow (TM)_{\psi(z)}$ es una isometría, con lo cual la proyección del super espacio $\psi : (N, G^*) \longrightarrow (TM, G)$ resulta una submersión Riemanniana.

Observación 3.10 *De las Observaciones 3.7 y 3.8 se deduce que los difeomorismos $\tilde{R}_a : (N, G^*) \longrightarrow (N, G^*)$ son isometrías para todo $a \in O(n)$, es decir $R_a^*(G^*) = G^*$. Por lo tanto, la distribución suave $z \longrightarrow H_z$, que es transversal a la distribución vertical, también resulta ser invariante por la acción del grupo $O(n)$. Con esto vemos que H_z induce una conexión sobre el super espacio λ.*

3.2.2 Sección Global de N.

Sean $\{\theta^1, \ldots, \theta^n, \theta^{n+1}, \ldots, \theta^{2n}, \{\omega_j^i\}_{1 \le i < j \le n}\}$ las secciones globales de N^* consideradas anteriormente. LLamamos con $H_1, \ldots, H_n, H_{n+1}, \ldots, H_{2n}, \{V_m^l\}_{1 \le l < m \le n}$ a su base de campos duales. A continuación, daremos una contrucción explícita de estos campos.

$\underline{H_i, \text{ con } 1 \le i \le n \ :}$

Dado $z = (q, u, \xi) \in N$, sea $c_i : I_i \longrightarrow M$ la única geodésica de M que cumple que $c_i(0) = q$ y $\dot{c}_i(0) = u_i$. Si $\{E_l^i\}_{l=1}^n$ son los únicos campos paralelos a lo largo de c_i que satisfacen que $E_l^i(0) = u_l$, sea $\alpha_i : I_i \longrightarrow N$ la curva dada por

$$\alpha_i(t) = (c_i(t), E_1^i(t), \ldots, E_n^i(t), \xi)$$

Luego, $\alpha_i(0) = (q, u, \xi)$ y $H_i(q, u, \xi) = \dot{\alpha}_i(0)$.

$\underline{H_{n+i}, \text{ con } 1 \le i \le n \ :}$

Si $(q, u) \in \ O(M)$, consideramos la inclusión $i_{(q,u)}$ de $\mathbb{R}^n$ en N dada por $i_{(q,u)}(\xi) = (q, u, \xi)$. Definimos el campo H_{n+i} como:

$$H_{n+i}(q, u, \xi) = (i_{(q,u)})_{*_\xi}\left(\frac{\partial}{\partial \xi^i}|_\xi\right) \ \ para \ 1 \le i \le n$$

donde $\frac{\partial}{\partial \xi^i}$ son los vectores tangentes usuales inducidos por la carta canónica de $\mathbb{R}^n$.

V^l_m, con $1 \leq l < m \leq n$:

Definimos

$$V^l_m(q,u,\xi) = (\sigma_{(q,u,\xi)})_{*_{Id}}(e^l_m)$$

donde e^l_m es la matriz antisimétrica que en la entrada (l,m) tiene un 1, -1 en la entrada (m,l) y 0 en las demás.

Es fácil ver que $H_1,\ldots,H_n,H_{n+1},\ldots,H_{2n},\{V^l_m\}_{1\leq l<m\leq n}$ es la base dual de $\theta^1,\ldots,\theta^n,\theta^{n+1},\ldots,\theta^{2n},\{\omega^i_j\}_{1\leq i<j\leq n}$.

Proposición 3.11 *Si $\{e_l\}_{l=1}^{2n}$ son las aplicaciones de referencia del super espacio $\lambda = (N,\psi,O(n),\tilde{R},\{e_i\})$ se tiene que*

$$\psi_{*_{(q,u,\xi)}}(H_l(q,u,\xi)) = e_l(q,u,\xi)$$

$$\psi_{*_{(q,u,\xi)}}(V^i_j(q,u,\xi)) = 0_{\psi(q,u,\xi)}$$

Demostración: Que $V^i_j(q,u,\xi)$ pertenece al subespacio vertical ya es claro. Nos queda verificar la primera igualdad. Si $z=(q,u,\xi)$ y $\psi(z)=v$, para $1\leq l\leq n$ tenemos que

$$\pi_{*_v}(\psi_{*_z}(H_l(z))) = \pi_{*_v}(\psi_{*_z}((\dot{\alpha}_i(0))) = D|_{t=0}(\pi\circ\psi\circ\alpha_i) = D|_{t=0}(c_i(t)) = u_i$$

y

$$K(\psi_{*_z}(H_l(z))) = K(\psi_{*_z}(\dot{\alpha}_i(0))) = K(D|_{t=0}(\sum_{i=1}^n E^l_i(t).\xi^i))$$

$$= \sum_{i=1}^n \xi^i(\bigtriangledown_D E^l_i)|_{t=0} = 0_q$$

pues los E^l_i son campos paralelos a lo largo de c_l. Por lo tanto, $\psi_{*_z}(H_l(z)) = (\pi_{*_z}\times K_v)^{-1}(u_l,0) = e_l(z)$.

Por otro lado, si $\frac{\partial}{\partial\xi^l}|_\xi = \dot{\gamma}^l_\xi(0)$ donde $\gamma^l_\xi(t) = (0,\ldots,t,\ldots,0)+\xi$ con t en el lugar l-ésimo, se sigue que

$$\pi_{*_v}(\psi_{*_z}(H_{n+l}(z))) = \pi_{*_v}(\psi_{*_z}((i_{(q,u)})_{*_\xi}(\frac{\partial}{\partial\xi^l}|_\xi)))$$

$$= \pi_{*_v}(\psi_{*(q,u,\xi)}((i_{(q,u)})_{*_\xi}(\dot{\gamma}^l_\xi(0)))) = D|_{t=0}(\pi\circ\psi\circ\gamma^l_\xi) = D|_{t=0}(q) = 0_q$$

y además

$$K(\psi_{*_z}(H_l(z))) = K(\psi_{*(z)}((i_{(q,u)})_{*_\xi}(\dot{\gamma}^l_\xi(0)))$$
$$= K(D|_{t=0}((\sum_{i\neq l} u_i.\xi^i) + \ u_l.(t+\xi^l))) = K(D|_{t=0}(u_l.(t+\xi^l))) = u_l.$$

con lo cual, $\psi_{*_z}(H_{n+l}(z)) = (\pi_{*_z} \times K_v)^{-1}(0, u_l) = e_{n+l}(z)$.

□

Observación 3.12 *Sea el super espacio $\tilde{\lambda} = (N, id_N, 1, \cdot, \{H_i, V^l_m\})$ sobre N, donde la proyección id_N es la aplicación identidad de la variedad N, el grupo consta sólo del elemento unidad, la acción es la trivial y las aplicaciones de referencia son aquellas que trivializan el tangente de N. De la proposición anterior y de la definición de G^*, $G^*(z)(H_l(z), H_m(z)) = G(\psi(z))(\psi_{*_z}(H_l(z)), \psi_{*_z}(H_m(z))) = G(\psi(z))(e_l(z), e_m(z))$, luego la aplicación matricial de G^* inducida por el super espacio $\tilde{\lambda}$ es*

$$^{\tilde{\lambda}}G^* = \begin{pmatrix} ^{\lambda}G & 0 \\ 0 & Id_{\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{n(n-1)}{2}} \end{pmatrix}$$

donde $0 \in R^{(2n)\times\frac{n(n-1)}{2}}$ *y* $0 \in \mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}\times(2n)}$.

Como ya mencionamos en la Observación 3.10, tenemos una conexión sobre el super espacio λ. De ahora es más, a menos que se diga lo contrario, pensaremos al super espacio λ dotado de esa conexión. Luego, cuando hablemos del espacio horizontal en algún punto z de N, nos estaremos refiriendo al subespacio H_z que determina la distribución que induce la conexión. Ya vimos en la Sección 2.4.3 del Capítulo 2 el levantamiento horizontal de campos. Luego, si $X \in \chi(TM)$, su levantamiento horizontal es el campo $X^h \in \chi(N)$ que satisface que $X^h(z) \in H_z$ y que $\psi_{*_z}(X^h(z)) = X(z)$. El levantamiento horizontal se puede escribir en función de los campos $\{H_i\}$ de esta forma:

$$X^h(z) = \sum_{i=1}^{2n} x^i(z).H_i(z)$$

donde $^{\lambda}X(z) = (x^1(z), \ldots, x^{2n}(z))$ es la aplicación inducida por el campo y λ. Recordamos que las funciones x^i son las que satisfacen que $X(\psi(z)) = \sum_{i=1}^{n} x^i(z)e_i(z)$. Dado que para cada $z \in N$ se tiene que $N_z = H_z \oplus V_z$, si $Z \in \chi(N)$ podemos descomponerlo en su parte horizontal y vertical $Z = Z^h + Z^v$. Para no sobrecargar la notación notamos de la misma manera la proyección de un vector tangente al subespacio horizontal y el levantamiento horizontal, pero quedará claro por el contexto que estamos haciendo en cada caso.

3.2.3 El Corchete de Lie en N.

Para calcular el tensor de curvatura de (TM, G) vamos a necesitar conocer la expresión del corchete de Lie en la variedad N.

Proposición 3.13 *Sean las funciones $R_{ijlm} : N \longrightarrow \mathbb{R}$ con $1 \leq i, j, l, m \leq n$ definidas por $R_{ijlm}(q, u, \xi) = g(R(u_i, u_j)u_l, u_m)$ donde R es el tensor de curvatura de (M, g). Entonces se cumple que:*

a) $$[H_i, H_j] = \sum_{l,m=1}^{n} R_{ijlm}\xi^m H_{n+l} + \frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^{n} R_{ijlm}V_m^l.$$

b) $[H_i, H_{n+j}] = 0.$

c) $[H_i, V_m^l] = \delta_{il}H_m - \delta_{im}H_l.$

d) $[H_{n+i}, H_{n+j}] = 0.$

e) $[H_{n+i}, V_m^l] = \delta_{il}H_{n+m} - \delta_{im}H_{n+l}.$

f) $[V_j^i, V_m^l] = \delta_{il}V_{mj} + \delta_{jl}V_{im} + \delta_{im}V_{jl} + \delta_{jm}V_{li}.$

g) Si $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que depende sólo del parámetro ξ, entonces

$$H_i(f) = 0 \quad y \quad V_j^i(f) = \xi^i.H_{n+j}(f) - \xi^j H_{n+i}(f).$$

h) Si $X, Y \in \chi(TM)$ y $v = \psi(q, u, \xi)$

$$[X^h, Y^h]^v|_{(q,u,\xi)} = \sum_{1\leq l<m=n} g_q(R(\pi_*(X(v)), \pi_*(Y(v)))u_l, u_m)V_m^l(q, u, \xi).$$

Demostración: Sea (U, x) una carta (adecuada) de M cuyas funciones coordenadas son x^i. Para simplificar la notación, con $\{X_i\}_{i=1}^n$ notamos a los vectores tangentes inducidos por esta carta. Si $(TU, \bar{x})$ es la carta inducida por (U, x) en TM notamos con $\{A_i\}_{i=1}^{2n}$ los campos tangentes inducidos por esta.

a) Para ver la primera igualdad, vamos a calcular como se comporta el corchete de Lie de dos campos horizontales con respecto a las formas $\{\theta^i, \omega_j^i\}$. Para empezar, calculemos para $1 \leq r \leq n$, $\theta^r([H_i, H_j](p, u, \xi)) = g(P_*([H_i, H_j](p, u, \xi)), u_r)$. Veamos que coordenadas tiene con respecto a una carta (U, x):

$$P_*([H_i, H_j](p, u, \xi))(x^l) = [H_i, H_j](p, u, \xi)(x^l \circ P)$$

Si $f(q, v, \zeta) = H_j(q, v, \zeta)(x^l \circ P) = D|_0(x^l \circ P \circ \alpha_j(t, q, v, \zeta)) = D|_0(x^l \circ c_j) = v_j(x^l)$, luego,

$$H_i(q, v, \zeta)(f) = D|_0(x^l \circ \alpha_i) = D|_0(E_i^j(x^l)) = \dot{E}_i^j(0)(\bar{x}^{n+l}),$$

como E_i^j es un campo paralelo a lo largo de la curva c_j, se tiene que $\dot{E}_i^j(0)(\bar{x}^{n+l}) = -\sum_{s'm'} u_i(x^{s'})u_j(x^{m'}).\Gamma_{s'm'}^l$. Por lo tanto,

$$P_*([H_i, H_j](p, u, \xi))(x^l) = \sum_{sm} u_j(x^s)u_i(x^m).\Gamma_{sm}^l - \sum_{s'm'} u_i(x^{s'})u_j(x^{m'}).\Gamma_{s'm'}^l$$

$$= \sum_{sm} u_j(x^s)u_i(x^m)(\Gamma_{sm}^l - \Gamma_{ms}^l) = 0$$

O sea $\theta^r([H_i, H_j])) = 0$ si $r = 1, \ldots, n$.

Ahora, calculemos $\theta^{n+l}([H_i, H_j](p, u, \xi)) = (d\xi^l + \sum_{m=1}^{n} \xi^m \omega_m^l)([H_i, H_j](p, u, \xi))$. Por un lado, $d\xi^l([H_i, H_j](p, u, \xi)) = (P_2)_*([H_i, H_j](p, u, \xi))(\xi^l) = [H_i, H_j](p, u, \xi)(\xi^l \circ P_2) = 0$, pues $H_j(q, v, \zeta)(\xi^l \circ P_2) = D|_0(\xi^l \circ P_2 \circ \alpha_j) = 0$. Entonces,

$$\theta^{n+l}([H_i, H_j](p, u, \xi)) = \sum_{m=1}^{n} \xi^m \omega_m^l([H_i, H_j](p, u, \xi))$$

Necesitamos calcular $\omega_m^l([H_i, H_j](p, u, \xi))$:

$$\omega_m^l([H_i, H_j](p, u, \xi)) = g(K((\pi_m)_*([H_i, H_j](p, u, \xi))), u_l)$$

Para $1 \leq \gamma \leq n$ consideramos $f_1(q, v, \zeta) = H_j(q, v, \zeta)(\bar{x}^\gamma \circ \pi_m) = D|_0(x^\gamma \circ \pi \circ E_j^m) = v_j(x^\gamma)$ y $f_2(q, v, \zeta) = H_i(q, v, \zeta)(\bar{x}^\gamma \circ \pi_m)$, entonces

$$[H_i, H_j](p, u, \xi)(\bar{x}^\gamma \circ \pi_m) = H_i(p, u, \xi)(f_1) - H_j(p, u, \xi)(f_2)$$

$$= \dot{E}_i^j(0)(\bar{x}^{n+\gamma}) - \dot{E}_j^i(0)(\bar{x}^{n+\gamma}) = \sum_{rs=1}^{n} u_i(x^r)u_j(x^s)(\Gamma_{rs}^\gamma - \Gamma_{sr}^\gamma) = 0$$

Falta ver que coordenadas tiene con respecto a los vectores tangentes $A_{n+\gamma}$. Si $f_1(q, v, \zeta) = H_j(q, v, \zeta)(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_m) = \dot{E}_j^m(0)(\bar{x}^{n+\gamma})$ y $f_2(q, v, \zeta) = H_i(q, v, \zeta)(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_m) = \dot{E}_i^m(0)(\bar{x}^{n+\gamma})$. Se tiene que

$$(\pi_m)_*([H_i, H_j](p, u, \xi))(\bar{x}^{n+\gamma}) = D|_0\Big(\sum_{rs} E_j^i(x^r)E_j^m(x^s)\Gamma_{rs}^\gamma(c_j(t))$$

$$-\sum_{rs} E_i^j(x^r)E_j^m(x^s)\Gamma_{rs}^{\gamma}(c_i(t))\Big)$$

Ahora,

$$D|_0\Big(\sum_{rs} E_j^i(x^r)E_j^m(x^s)\Gamma_{rs}^{\gamma}(c_j(t))\Big) = -\sum_{rshk} u_j(x^h)u_i(x^k)u_m(x^s)\Gamma_{hk}^r(p)\Gamma_{rs}^{\gamma}(p)$$

$$-\sum_{rshk} u_i(x^r)u_j(x^h)u_m(x^k)\Gamma_{hk}^s(p)\Gamma_{rs}^{\gamma}(p) + \sum_{rs} u_i(x^r)u_m(x^s)u_j(\Gamma_{rs}^{\gamma}),$$

donde en el último término utilizamos que $D|_0(\Gamma_{rs}^{\gamma}(c_j(t))) = u_j(\Gamma_{rs}^{\gamma})$. Similarmente,

$$D|_0\Big(-\sum_{rs} E_i^j(x^r)E_j^m(x^s)\Gamma_{rs}^{\gamma}(c_i(t))\Big) = \sum_{rshk} u_i(x^h)u_j(x^k)u_m(x^s)\Gamma_{hk}^r(p)\Gamma_{rs}^{\gamma}(p)$$

$$+\sum_{rshk} u_j(x^r)u_i(x^h)u_m(x^k)\Gamma_{hk}^s(p)\Gamma_{rs}^{\gamma}(p) - \sum_{rs} u_j(x^r)u_m(x^s)u_i(\Gamma_{rs}^{\gamma})$$

Renombrado los índices adecuadamente (1^{er} término: r por h, s por k, h por s, k por r; 2^{do} término: s por h, h por k y k por s; 3^{er} término: r por h, s por r, h por k y k por s), sumando las dos igualdades anteriores y agrupando término a término tenemos que

$$(\pi_m)_*([H_i, H_j](p,u,\xi))(\bar{x}^{n+\gamma}) = \sum_{rshk} u_i(x^r)u_j(x^s)u_m(x^h)\overbrace{(\Gamma_{rs}^k\Gamma_{kh}^{\gamma} - \Gamma_{sr}^k\Gamma_{kh}^{\gamma})}^{0}$$

$$+\sum_{rshk} u_i(x^r)u_j(x^s)u_m(x^h)(\Gamma_{rh}^k\Gamma_{sk}^{\gamma} - \Gamma_{sh}^k\Gamma_{rk}^{\gamma}) - \sum_{sh} u_j(x^s)u_m(x^h)u_i(\Gamma_{sh}^{\gamma})$$

$$+\sum_{rh} u_i(x^r)u_m(x^h)u_j(\Gamma_{rh}^{\gamma})$$

Por otro lado,

$$R(u_i,u_j)u_m(x^{\gamma}) = \sum_{rsh} u_i(x^r)u_j(x^s)u_m(x^h)R_{rsh}(x^{\gamma})$$

$$= \sum_{rsh} u_i(x^r)u_j(x^s)u_m(x^h)(\sum_k \Gamma_{sh}^k\Gamma_{rk}^{\alpha} - \Gamma_{rh}^k\Gamma_{sk}^{\alpha} + X_r(\Gamma_{sh}^{\alpha} - X_s(\Gamma_{rh}^{\alpha}))$$

$$= \sum_{rshk} u_i(x^r)u_j(x^s)u_m(x^h)(\Gamma_{sh}^k\Gamma_{rk}^{\alpha} - \Gamma_{rh}^k\Gamma_{sk}^{\alpha}) + \sum_{sh} u_j(x^s)u_m(x^h)u_i(\Gamma_{sh}^{\gamma})$$

$$-\sum_{rh} u_i(x^r)u_m(x^h)u_j(\Gamma_{rh}^{\gamma}))$$

Con lo cual vemos que $K((\pi_m)_*([H_i,H_j](p,u,\xi)))=-R_{ijm}$, de donde se sigue que la componente vertical lm de $[H_i,H_j]$ es

$$\omega^l_m([H_i,H_j](p,u,\xi))=-R_{ijml}=R_{ijlm}$$

Finalmente vemos que

$$\theta^{n+l}([H_i,H_j](p,u,\xi))=\sum_{m=1}^{n}\xi^m R_{ijlm}=\sum_{l<m}\xi^m R_{ijlm}-\sum_{m<l}\xi^m R_{ijlm}$$

lo que nos permite escribir

$$[H_i,H_j](p,u,\xi)=\sum_{lm}\xi^m R_{ijlm}H_{n+l}+\sum_{l<m}R_{ijlm}V_{lm}.$$

b) Tenemos que

$$H_{n+j}(q,v,\zeta)(x^\gamma\circ\pi\circ\pi_m)=\frac{\partial}{\partial\xi^j}|_\zeta(x^\gamma\circ\pi\circ\pi_m\circ i_{q,v})=0$$

y

$$H_i(q,v,\zeta)(x^\gamma\circ\pi\circ\pi_m)=v^i(x^\gamma)$$

de lo cual se ve que $(\pi_m)_*([H_i,H_{n+j}](p,u,\xi))(\bar{x}^\alpha)=0$. También se tiene que

$$H_{n+j}(q,v,\zeta)(\bar{x}^{n+\gamma}\circ\pi_m)\ \text{ y que }\ H_i(q,v,\zeta)(\bar{x}^{n+\gamma}\circ\pi_m)=\dot{E}^m_i(0)(\bar{x}^{n+\gamma})$$

por lo tanto, $(\pi_m)_*([H_i,H_{n+j}](p,u,\xi))(\bar{x}^{n+\alpha})=0$ lo que implica que

$$\omega^l_m([H_i,H_{n+j}](p,u,\xi))=g(K((\pi_m)_*([H_i,H_{n+j}](p,u,\xi))),u_l)=0$$

Por lo anterior, tenemos que

$$\theta^{n+l}([H_i,H_{n+j}](p,u,\xi))=d\xi^l([H_i,H_{n+j}](p,u,\xi))=[H_i,H_{n+j}](p,u,\xi)(\xi^l\circ P_2)$$

$$H_{n+j}(q,v,\zeta)(\xi^l\circ P_2)=\frac{\partial}{\partial\xi^j}|_\zeta(\xi^l\circ P_2\circ i_{q,v})=\frac{\partial}{\partial}|_\zeta(\xi^l)=\delta_{jl}$$

entonces $H_i(p,u,\xi)(H_{n+j}(\xi^l\circ P_2))=0$. Teniendo en cuenta que $H_i(q,v,\zeta)(\xi^l\circ P_2)$ $=D|_0(z_l)=0$ se deduce que

$$\theta^{n+l}([H_i,H_{n+j}](p,u,\xi))=0$$

Veamos cuales son las coordenadas de $[H_i, H_{n+j}]$ con respecto a los primeros n vectores horizontales. Dado que

$$H_{n+j}(q,v,\zeta)(x^l \circ P) = \frac{\partial}{\partial \xi^j}|_\zeta (x^l \circ P \circ i_{q,v}) = 0 \quad \text{y} \quad H_i(q,v,\zeta)(x^l \circ P) = v^i(x^l),$$

$P_*([H_i, H_{n+j}](p,u,\xi)) = 0$, con lo cual para $1 \le l \le n$

$$\theta^l([H_i, H_{n+j}](p,u,\xi)) = 0.$$

c) Calculemos $[H_i, V_m^l]$. Con $e_m^l(t)$ denotamos la curva en $O(n)$ cuya derivada en cero sea la matriz e_m^l. Empecemos con las coordenadas verticales: $\omega_s^r([H_i, V_m^l](p,u,\xi)) = g(K((\pi_s)_*([H_i, V_m^l](p,u,\xi))), u_r)$. Fácilmente se ve que

$$V_m^l(q,v,\zeta)(\bar{x}^\gamma \circ \pi_s) = D|_0(x^\alpha \circ \pi \circ \pi_s \circ \sigma_{(q,v,\zeta)} \circ e_m^l(t)) = 0$$

$$H_i(q,v,\zeta)(\bar{x}^\gamma \circ \pi_s) = v_i(x^\gamma)$$

por lo tanto,

$$(\pi_s)_*([H_i, V_m^l](p,u,\xi))(\bar{x}^\gamma) = \delta_{il} u_m(x^\gamma) - \delta_{im} u_l(x^\gamma)$$

Si $f_1(q,v,\zeta) = V_m^l(q,v,\zeta)(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_s)$, tenemos que

$$f_1(q,v,\zeta) = D|_0(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_s \circ \sigma_{(q,v,\zeta)} \circ e_m^l(t)) = -\delta_{sl} v_m(x^\gamma) + \delta_{sm} v_l(x^\gamma)$$

Luego

$$H_i(p,u,\xi)(f_1) = -\delta_{sl} \dot{E}_i^m(0)(\bar{x}^{n+\gamma}) + \delta_{sm} \dot{E}_i^l(0)(\bar{x}^{n+\gamma})$$

Si $f_2(q,v,\zeta) = H_i(q,v,\zeta)(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_s)$, dado que E_s^i son campos paralelos se puede ver que

$$f_2(q,v,\zeta) = \dot{E}_s^i(0)(\bar{x}^{n+\gamma}) = -\sum_{jr} v_i(x^j) v_s(x^r) \Gamma_{jr}^\gamma(q)$$

y por lo tanto

$$V_m^l(p,u,\xi)(f_2) = -\sum_{jr} \Big[\Big(\delta_{im} u_l(x^j) - \delta_{il} u_m(x^j) \Big) u_s(x^r) \Gamma_{jr}^\gamma(p)$$

$$+ \Big(\delta_{sm} u_l(x^r) - \delta_{sl} u_m(x^r) \Big) u_i(x^j) \Gamma_{jr}^\gamma \Big]$$

Como $(\pi_s)_*([H_i, V^l_m](p,u,\xi))(\bar{x}^{n+\gamma}) = H_i(p,u,\xi)(f_1) - V^l_m(p,u,\xi)(f_2)$ se tiene que

$$(\pi_s)_*([H_i, V^l_m](p,u,\xi))(\bar{x}^{n+\gamma}) = \delta_{sl}\sum_{rs} u_i(x^r)u_m(x^s)\Gamma^\gamma_{rs} - \delta_{sm}\sum_{rs} u_i(x^r)u_l(x^s)\Gamma^\gamma_{rs}$$

$$+\sum_{jr}\Big(\delta_{im}u_l(x^j) - \delta_{il}u_m(x^j)\Big)u_s(x^r)\Gamma^\gamma_{jr}(p) + \sum_{jr}\Big(\delta_{sm}u_l(x^r) - \delta_{sl}u_m(x^r)\Big)u_i(x^j)\Gamma^\gamma_{jr}$$

$$= \delta_{sm}\Big(\overbrace{\sum_{jr} u_l(x^r)u_i(x^j)\Gamma^\gamma_{jr}(p) - \sum_{rs} u_i(x^r)u_l(x^s)\Gamma^\gamma_{rs}}^{0}\Big)$$

$$+\delta_{sl}\Big(\overbrace{\sum_{rs} u_i(x^r)u_m(x^s)\Gamma^\gamma_{rs}(p) - \sum_{jr} u_m(x^r)u_i(x^j)\Gamma^\gamma_{jr}}^{0}\Big)$$

$$+\sum_{jr}\Big(\delta_{im}u_l(x^j) - \delta_{il}u_m(x^j)\Big)u_s(x^r)\Gamma^\gamma_{jr}(p)$$

Luego si $i \neq m$ e $i \neq l$ tenemos que para todo γ entre 1 y n

$$(\pi_s)_*([H_i, V^l_m](p,u,\xi))(\bar{x}^{\gamma}) = 0 \text{ y } (\pi_s)_*([H_i, V^l_m](p,u,\xi))(\bar{x}^{n+\gamma}) = 0$$

, entonces $\omega^r_s([H_i, V^l_m](p,u,\xi)) = 0$. Si $i = m$, lo que implica que $i \neq l$,

$$(\pi_s)_*([H_i, V^l_m](p,u,\xi))(\bar{x}^{\gamma}) = -u_l(x^\gamma)$$

y

$$(\pi_s)_*([H_i, V^l_m](p,u,\xi))(\bar{x}^{n+\gamma}) = \sum_{jr} u_l(x^j)u_s(x^r)\Gamma^\gamma_{jr}$$

De aquí se ve sin dificultad que $K((\pi_s)_*([H_i, V^l_m](p,u,\xi))) = 0$ y $\omega^r_s([H_i, V^l_m](p,u,\xi)) = 0$. De forma similar se ve el caso $i = l$.

Vimos que el corchete de Lie $[H_i, V^l_m]$ no tiene componentes verticales, veamos cuales son sus componentes horizontales:

$$\theta^{n+r}([H_i, V^l_m](p,u,\xi)) = d\xi^r([H_i, V^l_m](p,u,\xi)) = [H_i, V^l_m](p,u,\xi)(\xi^r \circ P_2) = 0$$

Si $f_1(q,v,\zeta) = V^l_m(x^\gamma \circ P) = D|_0(x^\gamma(q)) = 0$, entonces $H_i(p,u,\xi)(f_1) = 0$. Si $f_2(q,v,\zeta) = H_i(p,v,\zeta)(x^\gamma \circ P) = v_i(x^\gamma)$, luego $V^l_m(p,u,\xi)(f_2) = D|_0(f_2((p,u,\xi).e^l_m(t)))$

$= -\delta_{ij} u_m(x^\gamma) + \delta_{im} u_l(x^\gamma)$. Tenemos que $P_*([H_i, V^l_m](p,u,\xi)) = \delta_{il} u_m - \delta_{im} u_l$ de donde se sigue que

$$\theta^r([H_i, V^l_m](p,u,\xi)) = \delta_{il}\delta_{mr} - \delta_{im}\delta_{lr}$$

que nos permite afirmar que

$$[H_i, V^l_m](p,u,\xi) = \delta_{il} H_m - \delta_{im} H_l.$$

d) Como $H_{n+j}(q,v,\zeta)(x^\alpha \circ \pi \circ \pi_m) = 0$ y $H_{n+j}(q,v,\zeta)(\bar{x}^{n+l} \circ \pi_m) = 0$ se sigue que

$$(\pi_m)_*([H_{n+i}, H_{n+j}](p,u,\xi))(\bar{x}^\gamma) = 0$$

$$(\pi_m)_*([H_{n+i}, H_{n+j}](p,u,\xi))(\bar{x}^{n+\gamma}) = 0$$

Por lo tanto, $\omega^l_m([H_{n+i}, H_{n+j}](p,u,\xi)) = 0$ para todo $1 \le l < m \le n$.
Con respecto a las primeras n formas horizontales tenemos que

$$\theta^l([H_{n+i}, H_{n+j}](p,u,\xi)) = g(P_*([H_{n+i}, H_{n+j}](p,u,\xi)), u_l) = 0$$

Esto es porque $P_*([H_{n+i}, H_{n+j}](p,u,\xi)) = 0$, lo cual se ve fácilmente del hecho de que $H_{n+j}(q,v,\zeta)(x^\gamma \circ P) = 0$.
Por lo visto con las formas verticales:

$$\theta^{n+l}([H_{n+i}, H_{n+j}](p,u,\xi)) = d\xi^l([H_{n+i}, H_{n+j}](p,u,\xi)) = 0$$

pues $H_{n+j}(q,v,\zeta)(\xi^l \circ P_2) = \frac{\partial}{\partial \xi^j}|_\zeta(\xi^l \circ P_2 \circ i_{(q,v)}) = \delta_{jl}$

e) Dado que $H_{n+i}(q,v,\zeta)(\bar{x}^\gamma \circ \pi_s) = \frac{\partial}{\partial \xi^j}|_\zeta(x^\gamma \circ \pi \circ \pi_s \circ i_{(q,v)}) = 0$ y que en c) vimos que $V^l_m(q,v,\zeta)(\bar{x}^\gamma \circ \pi_s) = 0$, tenemos que

$$(\pi_s)_*([H_{n+i}, V^l_m](p,u,\xi))(\bar{x}^\gamma) = 0$$

Por otro lado,

$$H_{n+i}(q,v,\zeta)(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_s) = \frac{\partial}{\partial \xi^j}|_\zeta(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_s \circ i_{(q,v)}) = 0$$

y

$$V^l_m(q,v,\zeta) = (\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_s) = D|_0(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_s \circ \sigma_{(q,v,\zeta)} \circ e^l_m(t)) = \delta_{sl}(v_l(x^\gamma) - v_m(x^\gamma))$$

con lo cual, $(\pi_s)_*([H_{n+i}, V^l_m](p,u,\xi))(\bar{x}^{n+\gamma}) = 0$. Entonces, las componentes verticales son nulas

$$\omega^r_s([H_{n+i}, V^l_m](p,u,\xi)) = 0.$$

En c) vimos que $V^l_m(q,v,\zeta)(x^\gamma \circ P) = 0$ y en d) que $H_{n+i}(q,v,\zeta)(x^\gamma \circ P) = 0$. Esto nos dice que $P_*([H_{n+i}, V^l_m](p,u,\xi)) = 0$, lo que implica que

$$\theta^r([H_{n+i}, V^l_m](p,u,\xi)) = 0$$

De lo anterior, se tiene que

$$\theta^{n+r}([H_{n+i}, V^l_m](p,u,\xi)) = d\xi^r((P_2)_*([H_{n+i}, V^l_m](p,u,\xi))) = [H_{n+i}, V^l_m](p,u,\xi))(\xi^r \circ P_2).$$

De b) $H_{n+i}(q,v,\xi)(\xi^r \circ P_2) = \delta_{ri}$, con lo cual $V^l_m(H_{n+i}(\xi^r \circ P_2)) = 0$.

$$V^l_m(q,v,\zeta)(\xi^r \circ P_2) = D|_{t=0}(\xi^r \circ P_2 \circ \sigma_{(q,v,\xi)} \circ e^l_m(t)) = \delta_{rm}\zeta_l - \delta_{rl}\zeta_m,$$

luego, $H_{n+i}(p,u,\xi)(V^l_m(\xi^r \circ P_2)) = \delta_{rm}\delta_{il} + \delta_{rl}\delta_{im}$ y por lo tanto

$$\theta^{n+r}([H_{n+i}, V^l_m](p,u,\xi)) = \delta_{rm}\delta_{il} + \delta_{rl}\delta_{im}$$

lo que nos permite concluir que $[H_{n+i}, V^l_m] = \delta_{il}H_{n+m} - \delta_{im}H_{n+l}$.

f) Como $V^l_m(q,v,\zeta)(\bar{x}^\gamma \circ \pi_s) = 0$, entonces $(\pi_s)_*([V^i_j, V^l_m](p,u,\xi))(\bar{x}^\gamma) = 0$. En la demostración de la igualdad c) vimos que $V^l_m(q,v,\zeta)(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_s) = \delta_{sm}v_l(x^\gamma) - \delta_{sl}v_m(x^\gamma)$, luego,

$$V^i_j(p,u,\xi)(V^l_m(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_s)) = (\delta_{sl}\delta_{im} - \delta_{sm}\delta_{il})u_j(x^\gamma) + (\delta_{sm}\delta_{jl} - \delta_{sl}\delta_{jm})u_i(x^\gamma)$$

$$V^l_m(p,u,\xi)(V^i_j(\bar{x}^{n+\gamma} \circ \pi_s)) = (\delta_{si}\delta_{jl} - \delta_{sj}\delta_{il})u_m(x^\gamma) + (\delta_{sj}\delta_{im} - \delta_{si}\delta_{jm})u_l(x^\gamma)$$

y

$$(\pi_s)_*([V^i_j, V^l_m](p,u,\xi)) = \sum_\gamma \Big\{(\delta_{sl}\delta_{im} - \delta_{sm}\delta_{il})u_j(x^\gamma) + (\delta_{sm}\delta_{jl} - \delta_{sl}\delta_{jm})u_i(x^\gamma)$$

$$+(\delta_{sj}\delta_{il} - \delta_{si}\delta_{jl})u_m(x^\gamma) + (\delta_{si}\delta_{jm} - \delta_{sj}\delta_{im})u_l(x^\gamma)\Big\}A_{n+\gamma}$$

entonces

$$K((\pi_s)_*([V^i_j, V^l_m](p,u,\xi))) = (\delta_{sl}\delta_{im} - \delta_{sm}\delta_{il})u_j + (\delta_{sm}\delta_{jl} - \delta_{sl}\delta_{jm})u_i + (\delta_{sj}\delta_{il} - \delta_{si}\delta_{jl})u_m$$

$$+(\delta_{si}\delta_{jm} - \delta_{sj}\delta_{im})u_l$$

$$(\diamondsuit)\ \omega_s^r([V_j^i, V_m^l](p,u,\xi)) = (\delta_{sl}\delta_{im} - \delta_{sm}\delta_{il})\delta_{jr} + (\delta_{sm}\delta_{jl} - \delta_{sl}\delta_{jm})\delta_{ir}$$

$$+(\delta_{sj}\delta_{il} - \delta_{si}\delta_{jl})\delta_{mr} + (\delta_{si}\delta_{jm} - \delta_{sj}\delta_{im})\delta_{lr}.$$

De aquí, siendo cuidadoso con los subíndices y teniendo en cuenta, como veremos, que $[V_j^i, V_m^l]$ no tiene componentes con respecto a $\{H_1, \ldots, H_{2n}\}$, se puede ver que

$$[V_j^i, V_m^l] = \delta_{il}V_j^m + \delta_{jl}V_m^i + \delta_{jm}V_i^l + \delta_{im}V_l^j.$$

$\theta^r([V_j^i, V_m^l](p,u,\xi)) = 0$ se deduce de que $V_m^l(q,v,\zeta)(x^\gamma \circ P) = 0$. Vimos en e) que $V_m^l(q,v,\zeta)(\xi^r \circ P_2) = \delta_{rm}\zeta_l - \delta_{rl}\zeta_m$, luego $V_j^i(V_m^l(\xi^r \circ P_2)) = 0 = V_m^l(V_j^i(\xi^r \circ P_2))$, entonces $d\xi^r([V_j^i, V_m^l](p,u,\xi)) = 0$ y teniendo en cuenta $(\diamondsuit)$ llegamos a que

$$\theta^{n+r}([V_j^i, V_m^l](p,u,\xi)) = \sum_s \xi^s \omega_s^r([V_j^i, V_m^l](p,u,\xi)) = 0$$

g) Sea $f : N \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable que sólo depende del parámetro ξ. Si $1 \leq i \leq n$, $H_i(p,u,\xi)(f) = \dot{\alpha}_i(0)(f) = D|_0(f(\xi)) = 0$. $V_j^i(p,u,\xi)(f) = D|_0(f \circ \sigma_{(p,u,\xi)} \circ e_j^i(t)) = D|_0(f(\xi.e_j^i(t))) = D|_0(\xi.e_j^i(t))(f \circ i_{(p,u)}) = (-\xi^j \frac{\partial}{\partial \xi^i}|_\xi + \xi^i \frac{\partial}{\partial \xi^j}|_\xi)(f \circ i_{(p,u)}) = \xi^i H_{n+j}(p,u,\xi)(f) - \xi^j H_{n+i}(p,u,\xi)(f)$.

h) Si $X, Y \in \chi(TM)$ y ${}^\lambda X = (\rho_1, \ldots, \rho_{2n})$ e ${}^\lambda Y = (\psi_1, \ldots, \psi_{2n})$, entonces $X^h = \sum_{i=1}^{2n} \rho_i H_i$ e $Y^h = \sum_{j=1}^{2n} \psi_j H_j$. Tenemos que

$$[X^h, Y^h] = \sum_{ij}^{2n} \rho_i\psi_j[H_i, H_j] + \rho_i H_i(\psi_j)H_j - \psi_j H_j(\rho_i)H_i$$

por lo tanto,

$$[X^h, Y^h]^v = \sum_{ij}^{2n} \rho_i\psi_j[H_i, H_j]^v$$

Finalmente de a) se sigue h).

$\square$

3.2.4 Criterio.

A partir de ahora con $< \, , \, >$ nos referiremos a g, G y G^* indistintamente, salvo que no quede claro por el contexto. Denotaremos con R, $\bar{R}$, R^* el tensor de curvatura de (M,g), (TM,G) y (N,G^*) respectivamente. Dado que $\psi : (N,G^*) \longrightarrow (TM,G)$ es una submersión Riemanniana, utilizando la fórmula de O'Neill para submersiones [38], se sigue que:

$$\begin{aligned} < \bar{R}(X,Y)Z,W > \circ\, \psi \quad &=< R^*(X^h,Y^h)Z^h,W^h > +\tfrac{1}{4} < [Y^h,Z^h]^v,[X^h,W^h]^v > \\ &-\tfrac{1}{4} < [X^h,Z^h]^v,[Y^h,W^h]^v > -\tfrac{1}{2} < [Z^h,W^h]^v,[X^h,Y^h]^v > \end{aligned} \tag{3.3}$$

si $X,Y,Z,W \in \chi(TM)$.

Observación 3.14 *Sea $v \in TM$, nos interesa calcular $< \bar{R}(X,Y)Z,W > (v)$. Si $v \neq 0$, tomamos $u = \{u_1,\ldots,u_n\}$ base ortonormal de $M_{\pi(v)}$ de modo que $u_1 = \frac{v}{\|v\|}$. Sea $(\|v\|,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$. Luego $\psi(\pi(v),u,|v|,0\ldots,0) = v$. Si $v = 0_{\pi(v)}$, $v = \psi(\pi(v),u,0)$ para cualquier base ortonormal u de $M_{\pi(v)}$. Con esto queda claro que para calcular $< \bar{R}(X(v),Y(v))Z(v),W(v) >$ es suficiente evaluar la parte a la derecha de la igualdad de (3.3) en puntos de N de la forma $(q,u,t,0,\ldots,0)$ con $t \geq 0$.*

Veamos un poco como son los términos del lado derecho de la igualdad (3.3). Si los levantamientos horizontales de los campos X,Y,Z y W de TM se escriben como $X^h(z) = \sum_{i=1}^{2n} x^i(z).H_i(z)$, $Y^h(z) = \sum_{i=1}^{2n} y^j(z).H_i(z)$, $Z^h(z) = \sum_{i=1}^{2n} z^k(z).H_i(z)$ y $W^h(z) = \sum_{i=1}^{2n} w^l(z).H_i(z)$, entonces el primer sumando es

$$< R^*(X^h,Y^h)Z^h,W^h >= \sum_{ijkl=1}^{2n} x^i.y^j.z^k.w^l. < R^*(H_i,H_j)H_k,H_l >$$

Por otro lado, calculemos los términos en los que interviene el corchete de Lie de N, es decir los de la forma $< [X^h,Y^h]^v,[Z^h,W^h]^v >$. Por el punto h) de la Proposición 3.13 tenemos que

$$[X^h,Y^h]^v = \sum_{1\leq r<s\leq n} (\sum_{ij} x^i y^j R_{ijrs}) V_s^r$$

recordemos que $R_{ijrs}(q,u,\xi) =< R(u_i,u_j)u_r,u_s >$. Entonces,

$$< [X^*,Y^*]^v,[Z^*,W^*]^v > = < \sum_{1\leq r<s\leq n}(\sum_{ij} x^i y^j R_{ijrs})V_s^r, \sum_{1\leq r'<s'\leq n}(\sum_{kl} z^k w^l R_{klr's'})V_{s'}^{r'} >$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n}(\sum_{ij} x^i y^j R_{ijrs}).(\sum_{kl} z^k w^l R_{klrs})$$

evaluando en (q,u,ξ) $v=\psi(q,u,\xi)$

$$< [X^*,Y^*]^v,[Z^*,W^*]^v > |_{(q,u,\xi)} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} < R(\pi_*(X(v)),\pi_*(Y(v)))u_r,u_s > . < R(\pi_*(Z(v)),\pi_*(W(v)))u_r,u_s > \tag{3.4}$$

3.2.5 Tensor de Curvatura.

Finalmente en esta sección calcularemos el tensor de curvatura $\bar{R}$ de (TM,G) donde G es una métrica natural. Según el criterio, necesitamos calcular R^* en los campos $\{H_1,\ldots,H_n,H_{n+1},\ldots,H_{2n}\}$ y en los puntos de N de la forma $z=(q,u,t,0,\ldots,0)$ con $t\geq 0$.

En el subespacio horizontal H_z inducido por la conexión de λ, tenemos a su vez dos subespacios caracterizados. El primero, generado por $\{H_1(z),\ldots,H_n(z)\}$, que al aplicarle el diferencial de la proyección tiene como imagen el subespacio horizontal inducido por la conexión de Levi-Civita ∇ en TM, es decir $(TM)^h_{\psi(z)}$. El otro, generado por $\{H_{n+1}(z),\ldots,H_{2n}(z)\}$, tiene como imagen al aplicarle el diferencial de la proyección al subespacio vertical $(TM)^v_{\psi(z)}$. En lo siguiente, nos referiremos al *caso horizontal* de una ecuación de curvatura, que notaremos como $(hhhh)$, y estaremos refiriendo precisamente a $< R^*(H_i,H_j)H_k,H_l >$ donde $1\leq i,j,k,l\leq n$. Así, cuando hablemos del *caso vertical* $(vvvv)$ estaremos refiriendo a $< R^*(H_{n+i},H_{n+j})H_{n+l},H_{n+k}) >$ con $1\leq i,j,k,l\leq n$. O con el caso (h,v,h,v) estaremos hablando de $< R^*(H_i,H_{n+j})H_l,H_{n+k}) >$.

El tensor de curvatura de una variedad cualquiera, en nuestro caso particular particular (N,G^*), satisface las siguientes propiedades:

- $< R^*(L_1, L_2)L_3, L_4 > + < R^*(L_2, L_3)L_1, L_4 > + < R^*(L_3, L_1)L_2, L_4 >= 0$
- $< R^*(L_1, L_2)L_3, L_4 >= - < R^*(L_2, L_1)L_3, L_4 >$
- $< R^*(L_1, L_2)L_3, L_4 >= - < R^*(L_1, L_2)L_4, L_3 >$
- $< R^*(L_1, L_2)L_3, L_4 >=< R^*(L_2, L_4)L_1, L_2 >$

si $\{L_i\}_{i=1}^4$ son campos de N, ver [11]. Teniendo en cuenta estas propiedades podemos agrupar las ecuaciones de curvatura en seis tipos:

- Ecuación tipo A (h, h, h, h)

  1) $< R^*(H_i, H_j)H_k, H_l >$

- Ecuación tipo B (v,v,v,v)

  2) $< R^*(H_{n+i}, H_{n+j})H_{n+k}, H_{n+l} >$

- Ecuación tipo C (h,v,v,v)

  3) $< R^*(H_i, H_{n+j})H_{n+k}, H_{n+l} >$
  4) $< R^*(H_{n+i}, H_j)H_{n+k}, H_{n+l} >$
  5) $< R^*(H_{n+i}, H_{n+j})H_k, H_{n+l} >$
  6) $< R^*(H_{n+i}, H_{n+j})H_{n+k}, H_l >$

- Ecuación tipo D (v,v,h,h)

  7) $< R^*(H_i, H_j)H_{n+k}, H_{n+l} >$
  8) $< R^*(H_{n+i}, H_{n+j})H_k, H_l >$

- Ecuación tipo E (h,v,h,v)

  9) $< R^*(H_i, H_{n+j})H_k, H_{n+l} >$
  10) $< R^*(H_i, H_{n+j})H_{n+k}, H_l >$
  11) $< R^*(H_{n+i}, H_j)H_k, H_{n+l} >$
  12) $< R^*(H_{n+i}, H_j)H_{n+k}, H_l >$

- Ecuación tipo F (h,h,v,h)

13) $< R^*(H_i, H_j)H_k, H_{n+l} >$

14) $< R^*(H_i, H_{n+j})H_k, H_l >$

15) $< R^*(H_i, H_j)H_{n+k}, H_l >$

16) $< R^*(H_{n+i}, H_j)H_k, H_l >$

Teorema 3.15 *Sea G una métrica natural sobre TM, R y R^* los tensores de curvatura de (M, g) y (N, G^*) respectivamente. Si α y β son las funciones que caracterizan a la métrica natural G (ver Proposición 3.2), tenemos el tensor de curvatura R^* en la base $\{H_1, \ldots, H_{2n}\}$ se expresa por:*

- *(Tipo A)*

$< R^*(H_i, H_j)H_k, H_l) > (q, u, t, 0, \ldots, 0) =$

$$t^2\alpha(t^2).\sum_{r=1}^{n}\Big\{\frac{1}{2}R_{ijr1}.R_{klr1}+\frac{1}{4}R_{ilr1}.R_{kjr1}+\frac{1}{4}R_{jlr1}.R_{ikr1}\Big\}$$
$$+\sum_{1\le r<s\le n}\Big\{\frac{1}{2}R_{ijr1}.R_{klrs}+\frac{1}{4}R_{ilr1}.R_{kjrs}+\frac{1}{4}R_{jlr1}.R_{ikrs}\Big\}+R_{ijkl}.$$

- *(Tipo B)*

$< R^*(H_{n+i}, H_{n+j})H_{n+k}, H_{n+l}) > (q, u, t, 0, \ldots, 0) =$

$$\Big(\delta_{jl}.\delta_{ik1}-\delta_{ik}.\delta_{jl1}+\delta_{jk}.\delta_{il1}-\delta_{il}.\delta_{jk1}\Big).[\ddot\alpha(t^2)-\frac{1}{2}\dot\beta(t^2)].t^2$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\delta_{jl}.\delta_{ik1}+\delta_{ik}.\delta_{jl1}-\delta_{jk}.\delta_{il1}-\delta_{il}.\delta_{jk1}\Big).\frac{\dot\alpha(t^2).\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)}$$
$$+(\delta_{jk}.\delta_{il1}-\delta_{ik}.\delta_{jl1}).\frac{[\dot\alpha(t^2)+\dot\beta(t^2)t^2+\beta(t^2)].[\beta(t^2)-\dot\alpha(t^2)].t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}$$
$$+\ (\delta_{il}.\delta_{jk1}-\delta_{jl}.\delta_{ik1}).\frac{[\dot\alpha(t^2)+\dot\beta(t^2)t^2+\beta(t^2)].\dot\alpha(t^2).t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}$$
$$+\Big[(\delta_{il}-\delta_{il1})(\delta_{jk}-\delta_{jk1})-(\delta_{jl}-\delta_{jl1})(\delta_{ik}-\delta_{ik1})\Big]\frac{[\beta(t^2)-\dot\alpha(t^2)]\dot\alpha(t^2)t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}$$

$$+(1-\delta_{l1})\Big(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{jl}\delta_{ik}+\delta_{jl}\delta_{ik1}-\delta_{il}\delta_{jk1}\Big)\Big[\beta(t^2)-2\dot{\alpha}(t^2)+\frac{(\dot{\alpha}(t^2)-\beta(t^2))\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}\Big]$$

$$+\frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{ik1}-\delta_{il}\delta_{jk1})\Big\{4\dot{\alpha}(t^2)+2\ddot{\alpha}(t^2)t^2-\dot{\beta}(t^2)t^2-2\beta(t^2)-\frac{\dot{\alpha}(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)}$$

$$+2\frac{[\dot{\alpha}(t^2)+\dot{\beta}(t^2)t^2+\beta(t^2)]\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}-2\frac{(\dot{\alpha}(t^2))^2t^2}{\alpha(t^2)}\Big\}$$

$$+\frac{1}{2}\delta_{l1}\Big[(1-\delta_{i1})\delta_{j1}\delta_{ik}-(1-\delta_{j1})\delta_{i1}\delta_{jk}\Big]\Big\{4\dot{\alpha}(t^2)+6\ddot{\alpha}(t^2)t^2-3\dot{\beta}(t^2)t^2-2\beta(t^2)$$

$$-\frac{\dot{\alpha}(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)}+4\frac{[\dot{\alpha}(t^2)+\dot{\beta}(t^2)t^2+\beta(t^2)][\beta(t^2)-\dot{\alpha}(t^2)]t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}-2\frac{(\dot{\alpha}(t^2))^2t^2}{\alpha(t^2)}\Big\}.$$

- *(Tipo C)*

$$< R^*(H_i,H_{n+j})H_{n+k},H_{n+l}) > (q,u,t,0,\ldots,0)=0.$$

- *(Tipo D)*

$< R^*(H_{n+i},H_{n+j})H_k,H_l) > (q,u,t,0,\ldots,0)=$

$$=\frac{1}{2}R_{ijkl}(2\alpha(t^2)+(\delta_{i1}+\delta_{j1})\beta(t^2)t^2)+\frac{1}{2}\delta_{i1}(\beta(t^2)-2\dot{\alpha}(t^2))R_{klj1}t^2$$

$$+\frac{1}{2}\delta_{j1}(2\dot{\alpha}(t^2)-\beta(t^2))R_{kli1}t^2+\frac{(\alpha(t^2))^2t^2}{4}\sum_{r=1}^{n}\{R_{krj1}.R_{rli1}-R_{kri1}.R_{rlj1}\}.$$

- *(Tipo E)*

$< R^*(H_i,H_{n+j})H_k,H_{n+l}) > (q,u,t,0,\ldots,0)=$

$$\frac{1}{2}R_{kilj}\alpha(t^2)+\frac{(\alpha(t^2))^2t^2}{4}\sum_{r=1}^{n}R_{krj1}R_{ril1}+\frac{t^2}{2}(\delta_{j1}+\delta_{l1})(R_{kil1}-R_{kij1})\dot{\alpha}(t^2).$$

- *(Tipo F)*

  $< R^*(H_i,H_j)H_{n+k},H_l) > (q,u,t,0,\ldots,0) =$

  $$\frac{\alpha(t^2)t}{2}\{<\nabla_D R(E^i_j(s),E^l_j(s))E^k_j(s),u_1> - <\nabla_D R(E^j_i(s),E^l_i(s))E^k_i(s),u_1>\}.$$

  donde E^j_r es el único campo paralelo a lo largo de c_j tal que $E^r_j(0)=u_r$ si c_j es la geodésica de (M,g) que satisface que $c_j(0)=q$ y $\dot{c}_j(0)=u_j$ (ver la contrucción explícita que se dió de los campos H_i en la Sección 3.2.2).

Para demostrar el Teorema 3.15 necesitaremos la conocida fórmula de Koszul. Esta nos dice que si A,B,C son campos de una variedad Riemanniana (M,g) y ∇ es la conexión de Levi-Civita tenemos que

$$\begin{aligned}<\nabla_A B,C>=&\frac{1}{2}\{A(<B,C>)+B(<C,A>)-C(<A,B>)\}\\ &-\frac{1}{2}\{<A,[B,C]>+<B,[A,C]>+<C,[B,A]>\}\end{aligned}$$

Demostración del Teorema 3.15: Tengamos en cuenta que como G es una métrica natural para $1\leq i,j\leq n$ los campos $\{H_1,\ldots,H_{2n}\}$ satisfacen $<H_i,H_j>=\delta_{ij}$, $<H_i,H_{n+j}>=0$ y que $<H_{n+i}(q,u,t,0,\ldots,0),H_{n+j}(q,u,t,0,\ldots,0)>=0$ si $i\neq j$. Los campos V^r_s son ortogononales a los campos H_l para $1\leq l\leq 2n$.

<u>Ecuación tipo A:</u>

$$<R^*(H_i,H_j)H_k,H_l>=<\nabla^*_{H_i}\nabla^*_{H_j}H_k-\nabla^*_{H_j}\nabla^*_{H_i}H_k-\nabla^*_{[H_i,H_j]}H_k,H_l>$$

Por la fórmula de Koszul el primer término $<\nabla^*_{H_i}(\nabla^*_{H_j}H_k),H_l>$ es igual a

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big\{H_i(<\nabla^*_{H_j}H_k,H_l>)+\nabla^*_{H_j}H_k(<H_l,H_i>)-H_l(<H_i,\nabla^*_{H_j}H_k>)\Big\}\\ -&\frac{1}{2}\Big\{<H_l,[\nabla^*_{H_j}H_k,H_i]>+<\nabla^*_{H_j}H_k,[H_i,H_l]>+<H_i,[\nabla^*_{H_j}H_k,H_l]>\Big\}\end{aligned}$$

De la Proposición 3.13, podemos ver que $[H_i,H_k]$ es ortogonal a H_j. Luego, mediante la fórmula de Koszul tenemos que

$$<\nabla^*_{H_j}H_k,H_l>=\frac{1}{2}\Big\{H_j(<H_k,H_l>)+H_k(<H_l,H_j>)-H_l(<H_j,H_k>)\Big\}$$

$$-\frac{1}{2}\Big\{ < H_j, [H_k, H_l] > + < H_k, [H_j, H_l] > + < H_l, [H_k, H_j] > \} = 0$$

Por lo tanto, $< \nabla^*_{H_i}(\nabla^*_{H_j} H_k), H_l >= -\frac{1}{2}\Big\{ < H_l, [\nabla^*_{H_j} H_k, H_i] > + < \nabla^*_{H_j} H_k, [H_i, H_l] >$ $+ < H_i, [\nabla^*_{H_j} H_k, H_l] > \Big\}$

Haciendo uso nuevamente de la fórmula de Koszul se sigue que el tercer término de la ecuación de tipo A es

$$< \nabla^*_{[H_i,H_j]} H_k, H_l >= -\frac{1}{2}\Big\{ < H_l, [H_k, [H_i, H_k]] > + < H_k, [[H_i, H_j], H_l] > \\ + < [H_i, H_j], [H_k, H_l] > \Big\}$$

Entonces,

$$< R^*(H_i, H_j)H_k, H_l >= \overbrace{\frac{1}{2}\Big\{ < H_l, [\nabla^*_{H_i} H_k, H_j] + [H_k, [H_i, H_j]] - [\nabla^*_{H_j} H_k, H_i] > \Big\}}^{A.1}$$

$$\overbrace{\frac{1}{2}\Big\{- < \nabla^*_{H_j} H_k, [H_i, H_l] > + < \nabla^*_{H_i} H_k, [H_j, H_l] > - < H_i, [\nabla^*_{H_j} H_k, H_l] >}^{A.2}$$

$$\overbrace{+ < H_j, [\nabla^*_{H_i} H_k, H_l] > + < H_k, [[H_i, H_j], H_l] > + < [H_i, H_j], [H_k, H_l] > \Big\}}^{A.2}$$

$\nabla^*_{H_i} H_k = \nabla^*_{H_k} H_i + [H_i, H_k]$ pues la conexión ∇^* es libre de torsión. Con lo cual, $[\nabla^*_{H_i} H_k, H_j] = [\nabla^*_{H_k} H_i, H_j] + [[H_i, H_k], H_J]$ y, teniendo en cuenta la propiedad de Jacobi del corchete de Lie, el término $A.1$ es

$$A.1 = \frac{1}{2} < H_l, [\nabla^*_{H_k} H_i, H_j] - [\nabla^*_{H_k} H_i, H_j] + [[H_i, H_k], H_J] + [H_k, [H_i, H_j]] \\ +[H_i, [H_j, H_k]] >= \frac{1}{2} < H_l, [\nabla^*_{H_k} H_i, H_j] - [\nabla^*_{H_k} H_j, H_i] >$$

Por Koszul, $- < \nabla^*_{H_j} H_k, [H_i, H_l] >= \frac{1}{2}\Big\{ < [H_i, H_l], [H_k, H_j] > + < H_k, [H_j, [H_i, H_l]] >$ $+ < H_j, [H_k, [H_i, H_l]] > \Big\}$ y $< \nabla^*_{H_i} H_k, [H_j, H_l] >= -\frac{1}{2}\Big\{ < [H_j, H_l], [H_k, H_i] >$ $+ < H_k, [H_i, [H_j, H_l]] > + < H_i, [H_k, [H_j, H_l]] > \Big\}$. Por otro lado, por Jacobi $[H_j, [H_i, H_l]] - [H_i, [H_j, H_l]] = -[[H_i, H_j], H_l]$. Luego, el término $A.2$ es

$$A.2 = \frac{1}{4}\Big\{ < [H_i, H_l], [H_k, H_j] > - < [H_j, H_l], [H_k, H_i] > + < H_k, [[H_i, H_j], H_l] >$$

$$+ < H_j, [H_k, [H_i, H_l]] > - < H_i, [H_k, [H_j, H_l]] > \Big\} + \frac{1}{2}\Big\{ < H_j, [\nabla^*_{H_i} H_k, H_l] >$$

$$- < H_i, [\nabla^*_{H_j} H_k, H_l] > + < [H_i, H_j], [H_k, H_l] > \Big\}$$

con lo cual $< R^*(H_i, H_j)H_k, H_l >=$

$$= \overbrace{\frac{1}{2} < [H_i, H_j], [H_k, H_l] > + \frac{1}{4}\Big(< [H_i, H_l], [H_k, H_j] > - < [H_j, H_l], [H_k, H_i] > \Big)}^{A.3}$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{4}\Big(< H_k, [[H_i, H_j], H_l] > + < H_j, [H_k, [H_i, H_l]] > - < H_i, [H_k, [H_j, H_l]] > \Big)}^{A.4}$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{2}\Big(< H_l, [\nabla^*_{H_k} H_i, H_j] - [\nabla^*_{H_k} H_j, H_i] > + < H_j, [\nabla^*_{H_i} H_k, H_l] >}^{A.5}$$

$$\overbrace{- < H_i, [\nabla^*_{H_j} H_k, H_l] > \Big)}^{A.5}$$

De la Proposición 3.13 se sigue que

$$< H_k, [H_l, [H_i, H_j]] >= \frac{1}{2}\sum_{rs} R_{ijrs} < H_k, [H_l, V^r_s] >= \frac{1}{2}\sum_{rs} R_{ijrs}(\delta_{ls}\delta_{ks} - \delta_{ls}\delta_{kr})$$

por lo tanto el término $A.4$ es

$$A.4 = \frac{1}{8}\Big\{ \sum_{rs} R_{ijrs}(\delta_{ls}\delta_{kr} - \delta_{lr}\delta_{ks}) + R_{ilrs}(\delta_{kr}\delta_{js} - \delta_{ks}\delta_{jr}) - R_{jlrs}(\delta_{kr}\delta_{is} - \delta_{ks}\delta_{ir})\Big\}$$

$$= \frac{1}{4}R_{ijkl} + \frac{1}{4}R_{ilkj} + \frac{1}{4}R_{jlik} = \frac{1}{2}R_{ijkl}$$

También de la Proposición 3.13 podemos ver sin dificultad que

$$< [H_i, H_j], [H_k, H_l] >= \sum_{rsr's'} R_{ijrs}R_{klr's'}\xi^s\xi^{s'} < H_{n+r}, H_{n+r'} >$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{rsr's'} R_{ijrs}R_{klr's'} < V^r_s, V^{r'}_{s'} >=$$

$$= \sum_{rsr's'} R_{ijrs}R_{klr's'}\xi^s\xi^{s'}\Big(\delta_{rr'}\alpha(|\xi|^2) + \beta(|\xi|^2)\xi^r\xi^{r'}\Big) + \sum_{1\le r<s\le n} R_{ijrs}R_{klrs}$$

entonces el término $A.3$ es

$$A.3 = \frac{1}{2}\sum_{rsr's'} R_{ijrs}R_{klr's'}\xi^s\xi^{s'}\Big(\delta_{rr'}\alpha(|\xi|^2)+\beta(|\xi|^2)\xi^r\xi^{r'}\Big)+\frac{1}{2}\sum_{1\leq r<s\leq n} R_{ijrs}R_{klrs}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{rsr's'} R_{ilrs}R_{kjr's'}\xi^s\xi^{s'}\Big(\delta_{rr'}\alpha(|\xi|^2)+\beta(|\xi|^2)\xi^r\xi^{r'}\Big)+\frac{1}{4}\sum_{1\leq r<s\leq n} R_{ilrs}R_{kjrs}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{rsr's'} R_{jlrs}R_{kir's'}\xi^s\xi^{s'}\Big(\delta_{rr'}\alpha(|\xi|^2)+\beta(|\xi|^2)\xi^r\xi^{r'}\Big)-\frac{1}{4}\sum_{1\leq r<s\leq n} R_{jlrs}R_{kirs}$$

Dado el criterio, nos interesa conocer las ecuaciones de curvatura en los puntos de la forma $z = (q, u, t, 0\ldots, 0)$. El término $A.3$ en esos puntos es

$$A.3 = \frac{1}{2}\sum_{r} R_{ijr1}R_{klr1}t^2\alpha(t^2)+\frac{1}{2}\sum_{1\leq r<s\leq n} R_{ijrs}R_{klrs}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{r} R_{ilr1}R_{kjr1}t^2\alpha(t^2)+\frac{1}{4}\sum_{1\leq r<s\leq n} R_{ilrs}R_{kjrs}$$

$$-\frac{1}{4}\sum_{r} R_{jlr1}R_{kir1}t^2\alpha(t^2)-\frac{1}{4}\sum_{1\leq r<s\leq n} R_{jlrs}R_{kirs}$$

Veamos como es el término $A.4$: Si X es un campo de N, entonces lo podemos escribir como $X = \sum_{s=1}^{n} \rho^s H_s + \gamma^s H_{n+s} + \gamma_s^r V_s^r$. De la Proposición 3.13 y de la definición de G^* tenemos que

$$< H_j, [X, H_l] >= -H_l(\rho^j) + \sum_{1\leq r<s\leq n} \gamma_s^r(\delta_{ls}\delta_{jr} - \delta_{lr}\delta_{js})$$

Si $X = \nabla^*_{H_i} H_k$, entonces $\rho^j(z) = G^*(\nabla^*_{H_i} H_k, H_j) = \frac{1}{2}\{H_i(< H_k, H_j >)+$ $+H_k(< H_j, H_i >) - H_j(< H_i, H_k >)\} - \frac{1}{2}\{< H_j, [H_k, H_i] > + < H_j, [H_k, H_i] >$ $+ < H_j, [H_k, H_i] >\} = 0$

Por otro lado, aplicando la fórmula de Koszul

$$\gamma_s^r(z) = G^*(\nabla^*_{H_i} H_k, V_s^r) = \frac{1}{2}\{H_i(< H_k, V_s^r >) + H_k(< V_s^r, H_i >) - V_s^r(< H_i, H_k >)\}$$

$$-\frac{1}{2}\{< V_s^r, [H_k, H_i] > + < H_k, [H_i, V_s^r] > + < H_i, [H_k, V_s^r] >\}$$

$$= -\frac{1}{2} < V_s^r, \sum_{r's'} R_{ikr's'}\xi^{s'} H_{n+r'} + \sum_{r'<s'} R_{ikr's'} V_{s'}^{r'} >$$

$$+(\delta_{ir}\delta_{sk}-\delta_{is}\delta_{rk})+(\delta_{kr}\delta_{is}-\delta_{ks}\delta_{ri})=\frac{1}{2}R_{ikrs}$$

Luego $< H_j, [\nabla^*_{H_i}H_k, H_l] >= \frac{1}{2}R_{ikjl}$ y el término $A.5$ es

$$A.5=\frac{1}{4}\Big(R_{ikjl}-R_{jkil}+R_{kilj}-R_{kjli}\Big)=\frac{1}{2}R_{ijkl}$$

Sumando $A.3$, $A.4$ y $A.5$ obtenemos la ecuación tipo A:

$< R^*(H_i,H_j)H_k, H_l > (q,u,t,0,\ldots,0) =$

$$\frac{1}{2}\sum_r R_{ijr1}R_{klr1}t^2\alpha(t^2)+\frac{1}{2}\sum_{1\le r<s\le n}R_{ijrs}R_{klrs}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_r R_{ilr1}R_{kjr1}t^2\alpha(t^2)+\frac{1}{4}\sum_{1\le r<s\le n}R_{ilrs}R_{kjrs}$$

$$+\frac{1}{4}\sum_r R_{jlr1}R_{ikr1}t^2\alpha(t^2)+\frac{1}{4}\sum_{1\le r<s\le n}R_{jlrs}R_{ikrs}+R_{ijkl}$$

<u>Ecuación tipo B:</u> Como $< \nabla^*_{[H_{n+i},H_{n+j}]}H_{n+k}, H_{n+l} >= 0$ pues $[H_{n+i},H_{n+j}]=0$, se sigue que

$$< R^*(H_{n+i},H_{n+j})H_{n+k},H_{n+l} >=\overbrace{< \nabla^*_{H_{n+i}}\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+l} >}^{B.01}-$$

$$-\overbrace{< \nabla^*_{H_{n+j}}\nabla^*_{H_{n+i}}H_{n+k},H_{n+l} >}^{B.02}$$

Por Koszul, dado que $[H_{n+i},H_{n+j}]=0$ tenemos que

$$< \nabla^*_{H_{n+i}}\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+l} >=\frac{1}{2}\Big\{\overbrace{H_{n+i}(< \nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+l} >)}^{B.1}$$

$$+\overbrace{\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k}(< H_{n+l},H_{n+i} >)}^{B.2}-\overbrace{H_{n+l}(< \nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+i} >)}^{B.3}\Big\}$$

$$-\frac{1}{2}\Big\{\overbrace{< H_{n+l},[\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+i}] >}^{B.4}+< H_{n+i},[\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+l}] >\Big\}$$

El término $B.1 = \frac{1}{2}\Big\{H_{n+i}(H_{n+j}(< H_{n+k}, H_{n+l} >)) + H_{n+i}(H_{n+k}(< H_{n+l}, H_{n+j} >)) - H_{n+i}(H_{n+l}(< H_{n+j}, H_{n+k} >))\Big\}$, con lo cual

$$B.1 + B.3 = \frac{1}{2}\Big\{H_{n+i}(H_{n+j}(< H_{n+k}, H_{n+l} >)) + H_{n+i}(H_{n+k}(< H_{n+l}, H_{n+j} >))$$

$$-H_{n+l}(H_{n+j}(< H_{n+k}, H_{n+i} >)) + H_{n+l}(H_{n+k}(< H_{n+i}, H_{n+j} >))\Big\}$$

Como los términos $B.01$ y $B.02$ son similares, intercambiando adecuadamente los índices y teniendo encuenta que $[H_{n+i}, H_{n+j}] = 0$, el tensor de curvatura es
$< R^*(H_{n+i}, H_{n+j})H_{n+k}, H_{n+l} >=$

$$= \overbrace{\frac{1}{4}\Big\{H_{n+i}(H_{n+k}(< H_{n+l}, H_{n+j} >)) - H_{n+l}(H_{n+j}(< H_{n+k}, H_{n+i} >))}^{B.5}$$

$$\overbrace{-H_{n+j}(H_{n+k}(< H_{n+l}, H_{n+i} >)) + H_{n+l}(H_{n+i}(< H_{n+k}, H_{n+j} >))\Big\}}^{B.5}$$

$$+\overbrace{\frac{1}{2}\Big\{\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k}(< H_{n+l}, H_{n+i} >) - \nabla^*_{H_{n+i}}H_{n+k}(< H_{n+l}, H_{n+j} >)\Big\}}^{B.6}$$

$$+\overbrace{\frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+j}, [\nabla^*_{H_{n+i}}H_{n+k}, H_{n+l}] > + < H_{n+l}, [\nabla^*_{H_{n+i}}H_{n+k}, H_{n+j}] >}^{B.7}$$

$$\overbrace{- < H_{n+l}, [\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k}, H_{n+i}] > + < H_{n+i}, [\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k}, H_{n+l}] > \Big\}}^{B.7}$$

Si $f(q, v, \zeta) = H_{n+k}(q, v, \zeta)(< H_{n+l}, H_{n+j} >)$ entonces

$$f(q, v, \zeta) = 2\delta_{lj}\dot{\alpha}(|\zeta|^2)\zeta_k + 2\dot{\beta}(|\zeta|^2)\zeta_k\zeta_l\zeta_j + \delta_{kl}\beta(|\zeta|^2)\zeta_j + \delta_{jk}\beta(|\zeta|^2)\zeta_l.$$

y evaluando en los puntos de la forma $z = (q, u, t, 0, \ldots, 0)$

$$H_{n+i}(q, u, t, 0, \ldots, 0)(f) = 2\delta_{lj}\delta_{ik}\dot{\alpha}(t^2) + 4\delta_{lj}\delta_{ik1}\ddot{\alpha}(t^2)t^2 + (\delta_{kl}\delta_{ij} + \delta_{jk}\delta_{il})\beta(t^2)$$

$$+4\delta_{iklj1}\ddot{\beta}(t^2)t^4 + 2(\delta_{ki}\delta_{lj1} + \delta_{il}\delta_{kj1} + \delta_{kl}\delta_{ij1} + \delta_{jk}\delta_{il1})\dot{\beta}(t^2)t^2$$

Sumando todos los términos de $B.5$ tenemos que

$$B.5 = (\delta_{jl}\delta_{ik1} - \delta_{ik}\delta_{jl1} + \delta_{jk}\delta_{il1} - \delta_{il}\delta_{jk1})\Big[\ddot{\alpha}(t^2) - \frac{1}{2}\dot{\beta}(t^2)\Big]t^2$$

Veamos ahora como son los términos de la forma $\nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}(< H_{n+l}, H_{n+i} >)$, en los puntos $z = (q, u, t, 0, \ldots, 0)$, que forman parte de $B.6$. Si escribimos $\nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k} = \sum_r \psi^r H_r + \gamma^r H_{n+r} + \sum_{r<s} \rho^r_s V^r_s$, la función coordenada es $\psi^r =< \nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}, H_r >$. Por la fórmula de Koszul y por la definición de G^*

$$\psi^r =< \nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}, H_r >= -\frac{1}{2} H_r(q, u, t, 0, \ldots, 0)(\delta_{jk}\alpha(|\zeta|^2) + \beta(|\zeta|^2)\zeta^j\zeta^k) = 0$$

$$\rho^r_s =< \nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}, V^r_s >= -\frac{1}{2} V^r_s(< H_{n+j}, H_{n+k} >) - \frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+k}, [H_{n+j}, V^r_s] > + < H_{n+j}, [H_{n+k}, V^r_s] > \Big\}$$

De la Proposición 3.13,

$$< H_{n+j}, [H_{n+k}, V^r_s] >= \delta_{kr}\delta_{js}\Big(\alpha(t^2) + \delta_{js1}\beta(t^2)t^2\Big) - \delta_{ks}\delta_{jr}\Big(\alpha(t^2) + \delta_{jr1}\beta(t^2)t^2\Big)$$

Luego,

$$< H_{n+k}, [H_{n+j}, V^r_s] > + < H_{n+j}, [H_{n+k}, V^r_s] >= -\delta_{r1}\Big(\delta_{ks}\delta_{j1} + \delta_{js}\delta_{k1}\Big)\beta(t^2)t^2$$

Por otro lado,

$$V^r_s(q, u, t, 0, \ldots, 0)(< H_{n+j}, H_{n+k} >) = D|_{s=0}\Big(\delta_{jk}\alpha(t^2) + \beta(t^2)t^2 e^1_j(s)e^1_k(s)\Big) = \\ = \delta_{r1}\Big(\delta_{k1}\delta_{js} + \delta_{j1}\delta_{ks}\Big)\beta(t^2)t^2$$

Entonces $\rho^r_s(q, u, t, 0, \ldots, 0) = 0$.

$$< \nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}, H_{n+r} >= \frac{1}{2}\Big\{ H_{n+j}(< H_{n+k}, H_{n+r} >) + H_{n+k}(< H_{n+r}, H_{n+j} >) \\ - H_{n+r}(< H_{n+j}, H_{n+k} >)\Big\}$$

Como $H_{n+j}(q, u, t, 0, \ldots, 0)(< H_{n+k}, H_{n+r} >) = \frac{\partial}{\partial \xi^j}|_{(t,0)}(\delta_{kr}\alpha(|\zeta|^2) + \beta(|\zeta|^2)\zeta_k.\zeta_r) = 2\delta_{kr}\delta_{j1}\dot{\alpha}(t^2)t + 2\delta_{jkr1}\dot{\beta}(t^2)t^3 + \Big(\delta_{jk}\delta_{r1} + \delta_{jr}\delta_{k1}\Big)\beta(t^2)t$

$$\gamma^r =< \nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}, H_{n+r} >= \frac{\Big(\delta_{kr}\delta_{j1} + \delta_{jr}\delta_{k1} - \delta_{jk}\delta_{r1}\Big)\dot{\alpha}(t^2)t + \delta_{jkr1}\dot{\beta}(t^2)t^3}{\alpha(t^2) + \delta_{r1}\beta(t^2)t^2}$$

$$+\frac{\delta_{jk}\delta_{r1}\beta(t^2)t}{\alpha(t^2) + \delta_{r1}\beta(t^2)t^2}$$

Dado que $H_{n+r}(< H_{n+l}, H_{n+i} >) = 2\delta_{il}\delta_{r1}\dot{\alpha}(t^2)t+2\delta_{ilr1}\dot{\beta}(t^2)t^3+\Big(\delta_{lr}\delta_{i1}+\delta_{ir}\delta_{l1}\Big)\beta(t^2)t$ y que $\nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}(< H_{n+l}, H_{n+i} >) = \sum_r \gamma^r H_{n+r}(< H_{n+l}, H_{n+i} >)$ se sigue que

$\nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}(< H_{n+l}, H_{n+i} >) =$

$$= \Big\{(\delta_{kl} - \delta_{kl1})\delta_{ij1} + (\delta_{jl} - \delta_{jl1})\delta_{ik1} + (\delta_{ik} - \delta_{ik1})\delta_{jl1} + (\delta_{ij} - \delta_{ij1})\delta_{lk1}\Big\}\frac{\dot{\alpha}(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)}$$

$$+2\Big\{\delta_{iljk1}\frac{[\dot{\alpha}(t^2) + \dot{\beta}(t^2)t^3 + \beta(t^2)t]^2}{\alpha(t^2) + \beta(t^2)t^2}+$$

$$+\delta_{il1}(\delta_{jk} - \delta_{jk1})\frac{[\beta(t^2)t - \dot{\alpha}(t^2)t][\dot{\alpha}(t^2)t + \dot{\beta}(t^2)t^3 + \beta(t^2)t]}{\alpha(t^2) + \beta(t^2)t^2}$$

$$+\delta_{jk1}(\delta_{il}-\delta_{il1})\frac{[\dot{\alpha}(t^2)t + \dot{\beta}(t^2)t^3 + \beta(t^2)t]\dot{\alpha}(t^2)t}{\alpha(t^2) + \beta(t^2)t^2}+(\delta_{il}-\delta_{il1})(\delta_{jk}-\delta_{jk1})\frac{[\beta(t^2)t - \dot{\alpha}(t^2)]\dot{\alpha}(t^2)t}{\alpha(t^2) + \beta(t^2)t^2}\Big\}$$

El término $B.6$ es

$$B.6 = \frac{1}{2}\Big(\delta_{jl}\delta_{ik1} + \delta_{ik}\delta_{jl1} - \delta_{jk}\delta_{il1} - \delta_{il}.\delta_{jk1}\Big)\frac{\dot{\alpha}(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)}$$

$$+(\delta_{jk}\delta_{il1} - \delta_{ik}\delta_{jl1})\frac{[\dot{\alpha}(t^2) + \dot{\beta}(t^2)t^2 + \beta(t^2)][\beta(t^2) - \dot{\alpha}(t^2)]t^2}{\alpha(t^2) + \beta(t^2)t^2}$$

$$+ \ (\delta_{il}\delta_{jk1} - \delta_{jl}\delta_{ik1})\frac{[\dot{\alpha}(t^2) + \dot{\beta}(t^2)t^2 + \beta(t^2)]\dot{\alpha}(t^2)t^2}{\alpha(t^2) + \beta(t^2)t^2}$$

$$+\Big[(\delta_{il} - \delta_{il1})(\delta_{jk} - \delta_{jk1}) - (\delta_{jl} - \delta_{jl1})(\delta_{ik} - \delta_{ik1})\Big]\frac{[\beta(t^2) - \dot{\alpha}(t^2)]\dot{\alpha}(t^2)t^2}{\alpha(t^2) + \beta(t^2)t^2}$$

Para calcular el término $B.7$ primero debemos calcular los términos del tipo $< H_{n+j}, [\nabla^*_{H_{n+i}} H_{n+k}, H_{n+l}] >$. Por lo visto, en el cálculo del término $B.6$, la Proposición 3.13 y las propiedades del corchete de Lie tenemos que

$$< H_{n+j}, [\nabla^*_{H_{n+i}} H_{n+k}, H_{n+l}] > (q,u,t,0,\ldots,0) = -H_{n+l}(\gamma^j)(\alpha(t^2) + \delta_{j1}\beta(t^2)t^2)$$

Hay que calcular $H_{n+l}(q,u,t,0,\ldots,0)(\gamma^j) = D|_{s=0}(\gamma^j(q,u,t,0,\ldots,0,\overbrace{s}^{lugar\ l},0,\ldots,0)$.
Para calcular $\gamma^j(q,u,t,0,\ldots,0,\overbrace{s}^{lugar\ l},0,\ldots,0)$ es necesario conocer los términos de la forma $D|_{s=0}(< H_{n+k}, H_{n+m} > (q,u,t,0,\ldots,0,\overbrace{s}^{lugar\ l},0,\ldots,0))$. Si $l = 1$ con $z = (q,u,t+s,0,\ldots,0)$ se tiene que

$$< H_{n+k}, H_{n+m} > |_z = \begin{cases} \alpha((t+s)^2) + \beta((t+s)^2)(t+s)^2 & si \quad k = m = 1 \\ \alpha((t+s)^2) & si \quad k = m \neq 1 \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Los campos $\{H_{n+1},\ldots,H_{2n}\}$ son ortogonales en los puntos de la forma $(q,u,t+s,0,\ldots,0)$, por lo tanto $\gamma^j(q,u,t+s,0,\ldots,0)$ se cálcula de forma similar a como lo hicimos antes. Se tiene
$< H_{n+j}, [\nabla^*_{H_{n+i}} H_{n+k}, H_{n+l}] > (q,u,t,0,\ldots,0) =$

$$(\delta_{ik}\delta_{j1} - \delta_{kj}\delta_{i1} - \delta_{ij}\delta_{k1})\Big(2\ddot{\alpha}(t^2)t^2 + \dot{\alpha}(t^2)\Big) - \delta_{ijk1}\Big(2\ddot{\beta}(t^2)t^4 + 3\dot{\beta}(t^2)t^2\Big)$$
$$-\delta_{ik}\delta_{j1}\Big(2\dot{\beta}(t^2)t^2 + \beta(t^2))\Big) + 2\Big[(\delta_{kj}\delta_{i1} - \delta_{ij}\delta_{k1} - \delta_{ik}\delta_{j1})\dot{\alpha}(t^2)t$$
$$+\delta_{ikj1}\dot{\beta}(t^2)t^3 + \delta_{ik}\delta_{j1}\beta(t^2)t\Big].\Big[\frac{\dot{\alpha}(t^2)t + \delta_{j1}(\dot{\beta}(t^2)t^3 + \beta(t^2)t}{\alpha(t^2) + \delta_{j1}\beta(t^2)t^2}\Big]$$

Si $l \neq 1$, con $z = (q,u,t,0,\ldots,s,\ldots,0)$

$$< H_{n+k}, H_{n+m} > |_z = \begin{cases} \alpha(t^2+s^2) + \beta(t^2+s^2)t^2 & si \quad k = m = 1 \\ \alpha(t^2+s^2) + \beta(t^2+s^2)s^2 & si \quad k = m = l \\ \alpha(t^2+s^2) & si \quad k = m \neq 1\ y \neq l \\ \beta(t^2+s^2)ts & si \quad (k,m) = (1,l)\ o\ (l,1) \\ 0 & en\ otro\ caso. \end{cases}$$

Los campos $\{H_{n+1},\ldots,H_{2n}\}$ no son ortogonales. En este caso escribimos $\nabla^*_{H_{n+i}}H_{n+k}(z) = \sum_r^n \bar{\gamma}^r(z)\bar{H}_{n+r}(z)$, donde $\bar{H}_{n+r} = H_{n+r}$ si $r \neq l$ y $\bar{H}_{n+r}(z) = H_{n+l}(z) - \frac{\beta(t^2+s^2)ts}{\alpha(t^2+s^2)+\beta(t^2+s^2)t^2}H_{n+1}(z)$. Luego, calculando de la misma manera que antes las funciones coordenadas, tenemos que si $l \neq 1$, con $z = (q,u,t,0,\ldots,0)$, que:

- Si $j \neq 1$ y $j \neq l$

$$< H_{n+j}, [\nabla^*_{H_{n+i}}H_{n+k}, H_{n+l}] > (z) = -(\delta_{jk}\delta_{il} + \delta_{ij}\delta_{kl})\dot{\alpha}(t^2)$$

- Si $j = l$

$$< H_{n+j}, [\nabla^*_{H_{n+i}}H_{n+k}, H_{n+l}] > (z) = [\delta_{ik}\dot{\alpha}(t^2) - \delta_{ik1}\dot{\beta}(t^2)t^2 - \delta_{ik}\beta(t^2)]\frac{\alpha(t^2)}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}$$

$$+2[\delta_{ik1}\frac{\dot{\alpha}(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2} - \delta_{ijk}\dot{\alpha}(t^2)]$$

- Si $j = 1$

$$< H_{n+j}, [\nabla^*_{H_{n+i}}H_{n+k}, H_{n+l}] > (z) = (\delta_{il}\delta_{k1} + \delta_{kl}\delta_{i1})[\frac{\dot{\alpha}(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)} - \dot{\alpha}(t^2) - \dot{\beta}(t^2)t^2]$$

Recordemos que

$$B.7 = \frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+j}, [\nabla^*_{H_{n+i}}H_{n+k}, H_{n+l}] > + < H_{n+l}, [\nabla^*_{H_{n+i}}H_{n+k}, H_{n+j}] >$$

$$- < H_{n+l}, [\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k}, H_{n+i}] > + < H_{n+i}, [\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k}, H_{n+l}] > \Big\}$$

entonces, calculando los demás términos de $B.7$ (permutando los índices) y sumándolos con cuidado, tenemos que

$$B.7 = (1-\delta_{l1})\Big(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{jl}\delta_{ik}+\delta_{jl}\delta_{ik1}-\delta_{il}\delta_{jk1}\Big)\Big[\beta(t^2)-2\dot{\alpha}(t^2)+\frac{(\dot{\alpha}(t^2)-\beta(t^2))\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}\Big]$$

$$+\frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{ik1} - \delta_{il}\delta_{jk1})\Big\{4\dot{\alpha}(t^2) + 2\ddot{\alpha}(t^2)t^2 - \dot{\beta}(t^2)t^2 - 2\beta(t^2) - \frac{\dot{\alpha}(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)}$$

$$+2\frac{[\dot{\alpha}(t^2)+\dot{\beta}(t^2)t^2+\beta(t^2)]\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}-2\frac{(\dot{\alpha}(t^2))^2t^2}{\alpha(t^2)}\Big\}$$

$$+\frac{1}{2}\delta_{l1}\Big[(1-\delta_{i1})\delta_{j1}\delta_{ik}-(1-\delta_{j1})\delta_{i1}\delta_{jk}\Big]\Big\{4\dot{\alpha}(t^2)+6\ddot{\alpha}(t^2)t^2-3\dot{\beta}(t^2)t^2-2\beta(t^2)$$

$$-\frac{\dot{\alpha}(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)}+4\frac{[\dot{\alpha}(t^2)+\dot{\beta}(t^2)t^2+\beta(t^2)][\beta(t^2)-\dot{\alpha}(t^2)]t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}-2\frac{(\dot{\alpha}(t^2))^2t^2}{\alpha(t^2)}\Big\}.$$

Finalmente, sumando $B.5$, $B.6$ y $B.7$ llegamos a la ecuación tipo B.

<u>Ecuación tipo C</u>: Dado que $[H_i, H_{n+j}]=0$,

$$< R^*(H_i,H_{n+j})H_{n+k},H_{n+l} >=\overbrace{< \nabla^*_{H_i}\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+l} >}^{C.01}-\overbrace{< \nabla^*_{H_{n+j}}\nabla^*_{H_i}H_{n+k},H_{n+l} >}^{C.02}$$

Por Koszul y la Proposición 3.13 se puede ver sin dificultad que

$$< \nabla^*_{H_i}\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+l} >=\frac{1}{4}\Big\{H_i(H_{n+j}(< H_{n+k},H_{n+l} >))+H_i(H_{n+k}(< H_{n+l},H_{n+j} >))$$

$$-H_i(H_{n+l}(< H_{n+j},H_{n+k} >))\Big\}-\frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+l},[\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_i] >$$

$$+ < H_i,[\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+l}] > \Big\}$$

y

$$C.02 =< \nabla^*_{H_i}\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+l} >=-\frac{1}{2}\nabla^*_{H_i}H_{n+k}(< H_{n+l},H_{n+j} >)$$

$$+\frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+l},[\nabla^*_{H_i}H_{n+k},H_{n+j}] > + < H_{n+j},[\nabla^*_{H_i}H_{n+k},H_{n+l}] > \Big\}$$

Si $f = H_{n+j}(< H_{n+k},H_{n+l} >)$, entonces $H_i(f)=0$, pues f depende sólo del parámetro de R^n. Similarmente, se ve que $H_i(< H_{n+l},H_{n+j} >)=0$. Si escribimos a $\nabla^*_{H_i}H_{n+k}(z)$, donde $z=(q,u,t,0,\ldots,0)$, en la base $\{H_1(z),\ldots,H_{2n}(z),V^r_s(z)\}$ se puede ver fácilmente que $\nabla^*_{H_i}H_{n+k}*(z)(< H_{n+l},H_{n+j} >)=0$. Por lo tanto,

$$< R^*(H_i,H_{n+j})H_{n+k},H_{n+l} > (q,u,t,0,\ldots,0)=\frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+l},[\nabla^*_{H_i}H_{n+k},H_{n+j}] >$$

$$+ < H_{n+j},[\nabla^*_{H_i}H_{n+k},H_{n+l}] > \Big\}-\frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+l},[\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_i] >$$

$$+ < H_i,[\nabla^*_{H_{n+j}}H_{n+k},H_{n+l}] > \Big\}$$

Si escribimos a $\nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}(z)$ en la base $\{H_1(z), \ldots, H_{2n}(z), V^r_s(z)\}$ también se puede ver que $< H_{n+l}, [\nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}, H_i] >=< H_i, [\nabla^*_{H_{n+j}} H_{n+k}, H_{n+l}] >= 0$. De la misma forma, vemos que el término $< H_{n+l}, [\nabla^*_{H_i} H_{n+k}, H_{n+j}] >= 0$ en los puntos $(q, u, t, 0, \ldots, 0)$. Con lo cual,

$$< R^*(H_i, H_{n+j}) H_{n+k}, H_{n+l} > (q, u, t, 0, \ldots, 0) = 0$$

<u>Ecuación tipo D:</u> Como $[H_{n+i}, H_{n+j}] = 0$ la ecuación de curvatura en este caso es

$$< R^*(H_{n+i}, H_{n+j}) H_k, H_l >=< \nabla^*_{H_{n+i}} \nabla^*_{H_{n+j}} H_k, H_l > - < \nabla^*_{H_{n+j}} \nabla^*_{H_{n+i}} H_k, H_l >$$

Por Koszul, la Proposición 3.13 y por la definición del los campos $\{H_r\}_{r=1}^{2n}$ se ve que

$$< \nabla^*_{H_{n+i}} \nabla^*_{H_{n+j}} H_k, H_l >= \frac{1}{2} H_{n+i}(< \nabla^*_{H_{n+j}} H_k, H_l >) - \frac{1}{2}\Big\{ < H_l, [\nabla^*_{H_{n+j}} H_k, H_{n+i}] >$$

$$+ < H_{n+i}, [\nabla^*_{H_{n+j}} H_k, H_l] > \Big\}$$

y como $< \nabla^*_{H_{n+j}} H_k, H_l >= -\frac{1}{2} < H_{n+j}, [H_k, H_l] >$

$< R^*(H_{n+i}, H_{n+j}) H_k, H_l >=$

$$\overbrace{\frac{1}{4}\Big\{ H_{n+j}(< H_{n+j}, [H_k, H_l] >) - H_{n+i}(< H_{n+j}, [H_k, H_l] >) \Big\}}^{D.1}$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{2}\Big\{ < H_l, [\nabla^*_{H_{n+i}} H_k] > - < H_l, [\nabla^*_{H_{n+j}} H_k, H_{n+i}] > \Big\}}^{D.2}$$

$$+ \overbrace{\frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+j}, [\nabla^*_{H_{n+i}} H_k] > - < H_{n+i}, [\nabla^*_{H_{n+j}} H_k, H_l] > \Big\}}^{D.3}$$

Escribiendo en la base $\nabla^*_{H_{n+i}} H_k$ es la base $\{H_1, \ldots, H_{2n}, V^r_s\}$, se sigue que

$$< H_{n+j}, [\nabla^*_{H_{n+i}} H_k] >= -\frac{1}{2} \sum_r < H_{n+i}, [H_k, H_r] >< H_{n+j}, [H_r, H_l] >$$

por lo tanto de 3.13

$$D.3 = \frac{(\alpha(t^2))^2 t^2}{4}\sum_r (R_{krj1}R_{rli1} - R_{kri1}R_{rlj1})$$

Como $< H_{n+i}, [H_k, H_l] >= \sum_{rs} R_{klrs}\xi^s(\delta_{ir}\alpha(|\xi|^2) + \beta(|\xi|^2)\xi^i\xi^r)$ se tiene que $H_{n+j}(< H_{n+i}, [H_k, H_l] >) = R_{klij}(\alpha(t^2) + \delta_{i1}\beta(t^2)t^2) + (2\delta_{j1}R_{kli1} + R_{klj1}\beta(t^2))t^2$ y el término $D.1$ es

$$D.1 = \frac{1}{4}R_{klij}\Big(2\alpha(t^2) + (\delta_{i1} + \delta_{j1})\beta(t^2)t^2\Big) + \frac{1}{4}\delta_{i1}\Big(\beta(t^2) - 2\dot{\alpha}(t^2)\Big)R_{klj1}t^2$$
$$+\frac{1}{4}\delta_{j1}\Big(2\dot{\alpha}(t^2) - \beta(t^2)\Big)R_{kli1}t^2$$

Dado que $< H_l, [\nabla^*_{H_{n+i}}H_k, H_{n+j}] >= \frac{1}{2}H_{n+j}(< H_{n+i}, [H_k, H_l] >)$, luego $D.2 = D.1$. Sumando los términos $D.1$, $D.2$ y $D.3$ obtenemos la Ecuación de tipo D.

Ecuación tipo E:

Como $[H_i, H_{n+j}] = 0$ tenemos que

$$< R^*(H_i, H_{n+j})H_k, H_{n+l} >=< \nabla^*_{H_i}\nabla^*_{H_{n+j}}H_k, H_{n+l} > - < \nabla^*_{H_{n+j}}\nabla^*_{H_i}H_k, H_{n+l} >$$

luego por Koszul, se sigue que

$< R^*(H_i, H_{n+j})H_k, H_{n+l} >=$

$$\overbrace{\frac{1}{4}H_{n+j}(< H_{n+l}, [H_k, H_i] >)}^{E.1} - \overbrace{\frac{1}{2}(\nabla^*_{H_i}H_k)(< H_{n+l}, H_{n+j} >)}^{E.2}$$

$$\overbrace{\frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+l}, [\nabla^*_{H_i}H_k, H_{n+j}] > + < H_{n+j}, [\nabla^*_{H_i}H_k, H_{n+l}] > \Big\}}^{E.3}$$

$$\overbrace{-\frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+l}, [\nabla^*_{H_{n+j}}H_k, H_i] > + < H_i, [\nabla^*_{H_{n+j}}H_k, H_{n+l}] > \Big\}}^{E.4}$$

Se puede ver sin dificultad que si $z = (q, u, t, 0, \ldots, 0)$

$$\frac{1}{4}H_{n+j}(z)(< H_{n+l}, [H_k, H_i] >) = \frac{1}{4}R_{kilj}\Big(\alpha(t^2) + \delta_{l1}\beta(t^2)t^2\Big) + \frac{\delta_{j1}}{2}R_{kil1}\dot{\alpha}(t^2)t^2$$

$$+\frac{\delta_{l1}}{4}R_{kij1}\beta(t^2)t^2$$

y que

$$(\nabla^*_{H_i}H_k)(z)(< H_{n+l}, H_{n+j} >) = 0$$

Escribiendo a $\nabla^*_{H_{n+j}}H_k$ en la base $\{H_1, \ldots, H_{2n}, V^r_s\}$, de la Proposición 3.13 se deduce que

$$-\frac{1}{2} < H_{n+l}, [\nabla^*_{H_{n+j}}H_k, H_i] >= \frac{1}{4}\sum_r R_{krj1}R_{ril1}\alpha(t^2)t^2$$

y

$$-\frac{1}{2} < H_i, [\nabla^*_{H_{n+j}}H_k, H_{n+l}] >= -\frac{1}{4}R_{kijl}\Big(\alpha(t^2) + \delta_{j1}\beta(t^2)t^2\Big)$$
$$-\frac{\delta_{l1}}{2}R_{kij1}\dot{\alpha}(t^2)t^2 - \frac{\delta_{j1}}{4}R_{kil1}\beta(t^2)t^2$$

Si escribimos $\nabla^*_{H_i}H_k = \sum_r \psi^r H_r + \gamma^r H_{n+r} + \sum_{r<s}\rho^r_s V^r_s$

$$\frac{1}{2}\Big\{ < H_{n+l}, [\nabla^*_{H_i}H_k, H_{n+j}] > + < H_{n+j}, [\nabla^*_{H_i}H_k, H_{n+l}] > \Big\} = \frac{\delta_{j1}}{4}R_{kil1}\beta(t^2)t^2$$
$$-\frac{1}{2}\Big\{H_{n+j}(\gamma^l)\Big(\alpha(t^2) + \delta_{l1}\beta(t^2)t^2\Big) + H_{n+l}(\gamma^j)\Big(\alpha(t^2) + \delta_{j1}\beta(t^2)t^2\Big)\Big\}$$

Tenemos que calcular $H_{n+1}(z)(\gamma^l) = D|_{s=0}(\gamma^l(q, u, t+s, 0, \ldots, 0))$ y $H_{n+j}(z)(\gamma^l) = D|_{s=0}(\gamma^l(q, u, t, 0, \ldots, \overbrace{s}^{lugar\ j}, \ldots, 0))$ si $j \neq 1$. No es díficil ver que

$$H_{n+1}(z) = -\frac{1}{2}R_{kil1}$$

Cuando $j \neq 1$ y $\tilde{z} = (q, u, t, 0, \ldots, \overbrace{s}^{lugar\ j}, \ldots, 0)$ tenemos que proceder con un poco de cuidado porque $\{H_1(\tilde{z}), \ldots, H_{2n}(\tilde{z}), V^r_s(\tilde{z})\}$ no es una base ortogonal, ver Ecuación tipo B. Si $j \neq 1$:

$$H_{n+j}(z)(\gamma^l) = \begin{cases} -\frac{1}{2}R_{kilj} & si \quad l \neq j \ y \ l \neq 1 \\ \\ 0 & si \quad l = j \\ \\ \frac{1}{2}R_{kij1} & si \quad l = 1 \end{cases}$$

y

$$H_{n+l}(z)(\gamma^l) = \begin{cases} -\frac{1}{2}R_{kijl} & si \quad l \neq j \ y \ j \neq 1 \\ \\ 0 & si \quad l = j \\ \\ \frac{1}{2}R_{kil1} & si \quad j = 1 \end{cases}$$

Luego,

$$E.3 = \frac{\delta_{j1}}{4}R_{kil1}\beta(t^2)t^2 + \frac{1}{4}(\delta_{l1} - \delta_{j1})R_{kilj}\beta(t^2)t^2$$

Sumando $E.1$, $E.2$, $E.3$ y $E.4$ obtenemos la Ecuación de tipo E.

<u>Ecuación tipo F:</u>

$$< R^*(H_i, H_j)H_{n+k}, H_l >=< \nabla^*_{H_i}\nabla^*_{H_j}H_{n+k}, H_l > - < \nabla^*_{H_j}\nabla^*_{H_i}H_{n+k}, H_l >$$

pues

$$< \nabla^*_{[H_i,H_j]}H_{n+k}, H_l >= \sum_{rs} R_{ijrs}\xi^s \overbrace{< \nabla^*_{H_{n+r}}H_{n+k}, H_l >}^{0}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r,s} R_{ijrs}\overbrace{< \nabla^*_{H_{n+r}}H_{n+k}, H_l >}^{0} = 0$$

No es díficil ver que $< \nabla^*_{H_i}H_{n+k}, [H_j, H_l] >= 0$, luego por Koszul resulta que $< R^*(H_i, H_j)H_{n+k}, H_l >=$

$$\overbrace{\frac{1}{4}\Big\{H_j(< H_{n+k}, [H_i, H_l] >) - H_i(< H_{n+k}, [H_j, H_l] >)\Big\}}^{F.1}$$

$$+\overbrace{\frac{1}{2}H_l(< H_{n+k}, [H_j, H_i] >)}^{F.1} + \overbrace{\frac{1}{2}\Big\{ < H_l, [\nabla^*_{H_i}H_{n+k}, H_j] >}^{F.2}$$

$$\overbrace{- < H_l, [\nabla^*_{H_j}H_{n+k}, H_i] > + < H_j, [\nabla^*_{H_i}H_{n+k}, H_l] >}^{F.2}$$

$$\overbrace{- < H_i, [\nabla^*_{H_j} H_{n+k}, H_l] >}^{F.2} \Big\}$$

Como $F.2 = \frac{1}{4}\Big\{H_j(< H_{n+k}, [H_i, H_l] >) - H_i(< H_{n+k}, [H_j, H_l] >)\Big\}$ $+ \frac{1}{2}H_l(< H_{n+k}, [H_i, H_j] >)$

$$< R^*(H_i, H_j)H_{n+k}, H_l >= \frac{1}{2}\Big\{H_j(< H_{n+k}, [H_i, H_l] >) - H_i(< H_{n+k}, [H_j, H_l] >)\Big\}$$

Si $z = (q, u, t, 0, \dots, 0)$,

$$H_j(z)(< H_{n+k}, [H_i, H_l] >) = \sum_{rs} H_j(z)(R_{ilrs})\xi^s < H_{n+k}, H_{n+r} > (z)$$

$$+ \sum_{rs} R_{ijrs}(z) \overbrace{H_j(z)(\xi^s < H_{n+k}, H_{n+r} >)}^{0}$$

luego, $H_j(z)(< H_{n+k}, [H_i, H_l] >) = H_j(z)(R_{ilk1})\alpha(t^2)t$ y similarmente $-H_i(z)(< H_{n+k}, [H_j, H_l] >) = -H_i(z)(R_{jlk1})\alpha(t^2)t$, de lo cual se sigue la Ecuación de tipo F.

□

Corolario 3.16 *Si $\bar{R}$ es el tensor de curvatura de (TM, G), se cumple que:*

- *(Tipo A)*

  $< \bar{R}(e_i, e_j)e_k, e_l > (q, u, t, 0 \dots, 0) =$

  $$t^2\alpha(t^2) \sum_{r=1}^{n} \{\frac{1}{2}R_{ijr1}R_{klr1} + \frac{1}{4}R_{ilr1}R_{kjr1} + \frac{1}{4}R_{jlr1}R_{ikr1}\} + R_{ijkl}.$$

- *(Tipo B)*

  $< \bar{R}(e_{n+i}, e_{n+j})e_{n+k}, e_{n+l} > (q, u, t, 0 \dots, 0) =$

  $$\Big(\delta_{jl}\delta_{ik1} - \delta_{ik}\delta_{jl1} + \delta_{jk}\delta_{il1} - \delta_{il}\delta_{jk1}\Big)[\ddot{\alpha}(t^2) - \frac{1}{2}\dot{\beta}(t^2)]t^2$$
  $$+\frac{1}{2}\Big(\delta_{jl}\delta_{ik1} + \delta_{ik}\delta_{jl1} - \delta_{jk}\delta_{il1} - \delta_{il}\delta_{jk1}\Big)\frac{\dot{\alpha}(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)}$$

$$+(\delta_{jk}\delta_{il1}-\delta_{ik}\delta_{jl1})\frac{[\dot\alpha(t^2)+\dot\beta(t^2)t^2+\beta(t^2)][\beta(t^2)-\dot\alpha(t^2)]t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}$$

$$+\ (\delta_{il}\delta_{jk1}-\delta_{jl}\delta_{ik1})\frac{[\dot\alpha(t^2)+\dot\beta(t^2)t^2+\beta(t^2)]\dot\alpha(t^2)t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}$$

$$+\Big[(\delta_{il}-\delta_{il1})(\delta_{jk}-\delta_{jk1})-(\delta_{jl}-\delta_{jl1})(\delta_{ik}-\delta_{ik1})\Big]\frac{[\beta(t^2)-\dot\alpha(t^2)]\dot\alpha(t^2)t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}$$

$$+(1-\delta_{l1})\Big(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{jl}\delta_{ik}+\delta_{jl}\delta_{ik1}-\delta_{il}\delta_{jk1}\Big)\Big[\beta(t^2)-2\dot\alpha(t^2)+\frac{(\dot\alpha(t^2)-\beta(t^2))\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}\Big]$$

$$+\frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{ik1}-\delta_{il}\delta_{jk1})\Big\{4\dot\alpha(t^2)+2\ddot\alpha(t^2)t^2-\dot\beta(t^2)t^2-2\beta(t^2)-\frac{\dot\alpha(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)}$$

$$+2\frac{[\dot\alpha(t^2)+\dot\beta(t^2)t^2+\beta(t^2)]\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}-2\frac{(\dot\alpha(t^2))^2t^2}{\alpha(t^2)}\Big\}$$

$$+\frac{1}{2}\delta_{l1}\Big[(1-\delta_{i1})\delta_{j1}\delta_{ik}-(1-\delta_{j1})\delta_{i1}\delta_{jk}\Big]\Big\{4\dot\alpha(t^2)+6\ddot\alpha(t^2)t^2-3\dot\beta(t^2)t^2-2\beta(t^2)$$

$$-\frac{\dot\alpha(t^2)\beta(t^2)t^2}{\alpha(t^2)}+4\frac{[\dot\alpha(t^2)+\dot\beta(t^2)t^2+\beta(t^2)][\beta(t^2)-\dot\alpha(t^2)]t^2}{\alpha(t^2)+\beta(t^2)t^2}-2\frac{(\dot\alpha(t^2))^2t^2}{\alpha(t^2)}\Big\}.$$

- *(Tipo C)*

$$<\bar R(e_i,e_{n+j})e_{n+k},e_{n+l}>(q,u,t,0\ldots,0)=0.$$

- *(Tipo D)*

  $<\bar R(e_{n+i},e_{n+j})e_k,e_l)>(q,u,t,0\ldots,0)=$

$$\frac{1}{2}R_{ijkl}\Big(2\alpha(t^2)+(\delta_{i1}+\delta_{j1})\beta(t^2)t^2\Big)+\frac{1}{2}\delta_{i1}\Big(\beta(t^2)-2\dot\alpha(t^2)\Big)R_{klj1}t^2$$

$$+\frac{1}{2}\delta_{j1}\Big(2\dot\alpha(t^2)-\beta(t^2)\Big)R_{kli1}t^2+\frac{(\alpha(t^2))^2t^2}{4}\sum_{r=1}^{n}\{R_{krj1}R_{rli1}-R_{kri1}R_{rlj1}\}$$

- *(Tipo E)*

  $< \bar{R}(e_i, e_{n+j})e_k, e_{n+l}) > (q, u, t, 0, \ldots, 0) =$

$$\frac{1}{2}R_{kilj}\alpha(t^2) + \frac{(\alpha(t^2))^2 t^2}{4}\sum_{r=1}^{n} R_{krj1}R_{ril1} + \frac{t^2}{2}(\delta_{j1} + \delta_{l1})(R_{kil1} - R_{kij1})\dot{\alpha}(t^2)$$

- *(Tipo F)*

  $< \bar{R}(e_i, e_j)e_{n+k}, e_l) > (q, u, t, 0, \ldots, 0) =$

$$\frac{\alpha(t^2)t}{2}\{< \nabla_D R(E^i_j(s), E^l_j(s))E^k_j(s), u_1 > - < \nabla_D R(E^j_i(s), E^l_i(s))E^k_i(s), u_1 >\}$$

Demostración: Reemplazando en la fórmula (3.3) las expresiones obtenidas en el Teorema 3.15 y escribiendo como son los términos de esta en los que interviene el corchete de Lie, obtenemos el valor del tensor de curvatura $\bar{R}$ en la base $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$.
□

Observación 3.17 *El tensor de curvatura $\bar{R}$ de (TM, G) es independiente del tensor de curvatura R sólo en las ecuaciones tipo C y en el subespacio vertical $(TM)^v$.*

3.3 Consecuencias Geométricas de las Ecuaciones de Curvatura.

Al igual que en la sección anterior, dado $v \in TM$, tomamos $z = (q, u, \xi)$, de modo que $\psi(q, u, \xi) = v$, ver la Observación 3.14.

3.3.1 Curvatura Seccional.

En esta sección calcularemos la curvatura seccional de (TM, G) cuando G es una métrica natural. LLamamos α y β a las funciones que caracterizan a G. Notamos con K y $\bar{K}$ a la curvatura seccional de (M, g) y (TM, G) respectivamente. Por último, si $A, B \in (TM)_v$ designaremos con $\bar{Q}(A, B)$ el cuadrado del área del paralelogramo definido por los vectores $\{A, B\}$, es decir $\bar{Q}(A, B) = \|A\|^2.\|B\|^2 - (< A, B >)^2$ donde $\| \ \|$ es la norma con respecto a G. De igual manera definimos $Q(A, B)$ para (M, g). En lo que sigue la norma con respecto a la métrica g la notaremos con $| \ |$, al igual que el módulo en $\mathbb{R}$, pero esto quedará claro por el contexto.

Proposición 3.18 *Tenemos las siguientes expresiones para la curvatura seccional de (TM, G):*

a) Caso horizontal (hh)

$$\bar{K}(e_i, e_j) = K(u_i, u_j) - \frac{3}{4}\alpha(|v|^2)|R(u_i, u_j)v|^2$$

para $1 \leq i, j \leq n$.

b) Caso vertical (vv)

$$\bar{K}(e_{n+i}, e_{n+j}) = -\frac{1}{\bar{Q}(e_{n+i}, e_{n+j})}\Big\{\frac{(\dot{\alpha}(h))^2 h + 2\dot{\alpha}(h)\alpha(h) - \beta(h)\alpha(h)}{\alpha(h) + \beta(h).h}$$

$$+(\delta_{i1} + \delta_{j1}).\Big[\frac{\alpha(h).\Big(2\alpha(h)\ddot{\alpha}(h) - \alpha(h)\dot{\beta}(h) - 3(\dot{\alpha}(h))^2 + 2\dot{\alpha}(h)\beta(h)\Big)}{\alpha(h).(\alpha(h) + \beta(h).h)}$$

$$+\frac{\Big(2\alpha(h)\ddot{\alpha}(h)\beta(h) - (\dot{\alpha}(h))^2\beta(h) - \alpha(h)\dot{\alpha}(h)\dot{\beta}(h)\Big).h}{\alpha(h).\Big(\alpha(h) + \beta(h).h\Big)}\Big].h\Big\}$$

para $1 \leq i \neq j \leq n$ y donde $h = |v|^2$.

c) Caso mixto (hv)

$$\bar{K}(e_i, e_{n+j}) = \frac{\alpha(|v|^2)}{4}|R(u_j, v)u_i|^2$$

para $1 \leq i, j \leq n$. Recordamos que $v = u_1|v|$, con lo cual $\bar{K}(e_i, e_{n+1}) = 0$.

Demostración: La curvatura seccional es $\bar{K}(A,B) = -\frac{1}{\bar{Q}(A,B)} < \bar{R}(A,B)A,B >$. Como G es una métrica natural, tenemos que $\bar{Q}(e_i,e_j) = 1$ si $1 \leq i \neq j \leq n$, luego para el caso horizontal $\bar{K}(e_i,e_j) = - < \bar{R}(e_i,e_j)e_i,e_j >$. Por lo tanto, del Corolario 3.16 ecuación tipo A, tomando $i = k$ y $j = l$ tenemos que

$$\bar{K}(e_i,e_j) = -|v|^2\alpha(|v|^2).\sum_{r=1}^{n}\{\frac{1}{2}R_{ijr1}.R_{ijr1} + \frac{1}{4}R_{ijr1}.R_{ijr1} + \frac{1}{4}R_{jjr1}.R_{iir1}\} - R_{ijij}$$

$$= -R_{ijij} - \frac{3}{4}\alpha(|v|^2).(\ |v|^2\sum_{r=1}^{n}(R_{ij1r})^2\ ) = K(u_i,u_j) - \frac{3}{4}\alpha(|v|^2)|R(u_i,u_j)v|^2.$$

De la ecuación tipo B del Corolario 3.16, tomando $i = k$, $j = l$ e $i \neq j$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\bar{K}(e_{n+i},e_{n+j}) = -\frac{1}{\bar{Q}(e_{n+i},e_{n+j})}.\Big\{(\delta_{i1}+\delta_{j1}).\Big[\ & 2\ddot{\alpha}(|v|^2) - \dot{\beta}(|v|^2) \\ & -\frac{(\dot{\alpha}(|v|^2) - \beta(|u|^2))^2}{\alpha(|v|^2)+\beta(|v|^2).|v|^2} - \frac{(\dot{\alpha}(|u|^2))^2}{\alpha(|v|^2)} \\ +\frac{(\ \dot{\alpha}(|v|^2) + \beta(|v|^2).|v|^2 + \beta(|v|^2)\ ).(\ \beta(|v|^2) - \dot{\alpha}(|v|^2)\ )}{\alpha(|v|^2)+\beta(|v|^2).|v|^2} & \Big].|v|^2 \\ +\frac{(\dot{\alpha}(|v|^2))^2|v|^2 + 2\dot{\alpha}(|v|^2)\alpha(|v|^2) - \beta(|v|^2)\alpha(|v|^2)}{\alpha(|v|^2)+\beta(|v|^2).|v|^2} & \Big\}\end{aligned}$$

de aquí agrupando correctamente se sigue el caso vertical b). Teniendo en cuenta que G es natural, $\|e_i\| = 1$ para $1 \leq i \leq n$ y que $\{e_i\}_{i=1}^n$ son ortogonales a $\{e_{n+j}\}_{j=1}^n$, se deduce de la ecuación tipo E del Corolario 3.16 que

$$\bar{K}(e_i,e_{n+j}) = -\frac{(\alpha(|v|^2))^2|v|^2}{4(\alpha(|v|^2)+\delta_{j1}\beta(|v|^2)|v|^2)}\sum_{r=1}^{n}R_{irj1}R_{rij1}$$

$$= \frac{\alpha(|v|^2)}{4}\sum_{r=1}^{n}\Big[g(R(u_j,u_1|v|)u_i,u_r)\Big]^2 = \frac{\alpha(|v|^2)}{4}|R(u_j,v)u_i|^2.$$

$\square$

Corolario 3.19 *Sea (M,g) una variedad Riemanniana con curvatura seccional constante K_0. Sea (TM,G) con G métrica natural, tenemos las siguientes expresiones para la curvatura seccional $\bar{K}$:*

a) $\bar{K}(e_i, e_j) = K_0 - \frac{3}{4}(K_0)^2\alpha(|v|^2)(\delta_{i1} + \delta_{j1})|v|^2$ *con* $(i \neq j)$.

b) $\bar{K}(e_i, e_{n+j}) = \frac{\alpha(|v|^2)}{4} K_0 |v|^2(\delta_{ij} + \delta_{i1})$.

El caso vertical $\bar{K}(e_{n+i}, e_{n+j})$ *es igual que en la Proposición 3.18, pues es independiente del tensor de curvatura de* (M, g).

Observación 3.20 *En la situación del Corolario 3.19, si además* (TM, G) *es una variedad plana, entonces* $K_0 = 0$.

Corolario 3.21 *Sea* G *una métrica natural sobre el fibrado tangente, de modo que* (TM, G) *tenga curvatura seccional constante, luego* (TM, G) *y* (M, g) *son planas.*

Demostración: Se deduce del item c) de la Prosición 3.18, pues $\bar{K} = \bar{K}(e_1, e_{n+j}) = 0$. Esto implica que $R(u_j, v)u_i = 0$ para todo i, j, con lo cual $K_0 = 0$.

□

También se deduce de la Proposición 3.18 el siguiente hecho:

Corolario 3.22 *Consideremos el fibrado tangente dotado de dos métricas naturales* G_1 *y* G_2 *y sean* $\{\alpha_i\}_{i=1,2}$ *y* $\{\beta_i\}_{i=1,2}$ *las funciones que las caracterizan. Si* $\bar{K}_1(u)(V, W) = \bar{K}_2(u)(V, W)$ *para todo* $u \in TM$ *y* $V, W \in (TM)_u$ *y* (M, g) *no es plana, entonces* $\alpha_1(t) = \alpha_2(t)$.

Observación 3.23 *Sea* G_s *la métrica de Sasaki introducida en la Sección 3.1.1. Las funciones que caracterizan la métrica de Sasaki son* $\alpha \equiv 1$ *y* $\beta \equiv 0$. *Por lo tanto, de 3.18 tenemos las siguientes expresiones, que coinciden con las obtenidas por Aso en [3], para la curvatura seccional* K_s *de* (TM, G_s):

- $K_s(e_i, e_j) = K(u_i, u_j) - \frac{3}{4}|R(u_i, u_j)v|^2$
- $K_s(e_{n+i}, e_{n+j}) = 0$
- $K_s(e_i, e_{n+j}) = \frac{1}{4}|R(u_j, v)u_i|^2$

Observación 3.24 *Sea* G_{cg} *la métrica de Cheeger-Gromoll. Las funciones que caracterizan a esta métrica natural son* $\alpha(t) = \beta(t) = \frac{1}{1+t}$. *Si* $\gamma = 1 + |v|^2$, *de la Proposición 3.18 se deduce que:*

- $K_{cg}(e_i, e_j) = K(u_i, u_j) - \frac{3}{4\gamma}|R(u_i, u_j)v|^2$
- $K_{cg}(e_i, e_{n+j}) = \frac{1}{4\gamma}|R(u_j, u)u_i|^2$

Por otro lado, si evaluamos el tensor de curvatura de (TM, G_{cg}) *en* $e_{n+i}(q, u, |v|, 0, \dots, 0)$ *y* $e_{n+j}(q, u, |v|, 0, \dots, 0)$ *obtenemos que :*

$$- < R_{cg}(e_{n+i}, e_{n+j})e_{n+i}, e_{n+j} >= \frac{1+\gamma+\gamma^2}{\gamma^4} - \frac{(\delta_{i1}+\delta_{j1})|v|^4}{\gamma^4}$$
$$= \frac{1-\gamma}{\gamma^4} + \frac{\gamma+2}{\gamma^3} + \frac{1-\gamma}{\gamma^4}(\delta_{i1}+\delta_{j1})|v|^2$$

El caso vertical se sigue observando que, para $i \neq j$, $\bar{Q}(e_{n+i}, e_{n+j}) = = \frac{1}{\gamma^2}(1 + (\delta_{i1} + \delta_{j1})|v|^2)$, *pues* $< e_{n+i}, e_{n+j} >= \frac{1}{1+|v|^2}(\delta_{ij} + \delta_{ij1}|v|^2)$. *O sea*

- $K_{cg}(e_{n+i}, e_{n+j}) = \frac{1-\gamma}{\gamma^2} + \frac{(\gamma+2)}{\gamma.(1+(\delta_{i1}+\delta_{j1})|v|^2)}$

A estos resultados llegaron Sekizawa (horizontal y mixto) en [42] y Gudmundsson y Kappos (vertical) en [15].

Proposición 3.25 *Si* S *denota la curvatura escalar de* (M, g), *entonces la curvatura escalar de* (TM, G_{cg}) *esta dada por*

$$S_{cg}(v) = S(\pi(v)) - \frac{1}{2\gamma}\sum_{ij}|R(u_i, u_j)u_1|^2 + \frac{n-1}{\gamma}\Big(6 + (n-2)(1+\gamma+\gamma^2)\Big)$$

Demostración: Para calcular la curvatura escalar utilizamos la base ortogonal $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ (evaluada como en 3.14) que previamente normalizamos. La Proposición se sigue de la expresiones de la curvatura seccional y del hecho de que $\sum_{ij=1}^{n}|R(u_j, v)u_i|^2$

$$= \sum_{ij=1}^{n}|R(u_i, u_j)v|^2.$$

□

Corolario 3.26 *Si* (M, g) *tiene curvatura seccional constante* K_0, *entonces*

$$S_{cg}(v) = \frac{(n-1)}{\gamma^2}\Big[n\gamma^2 K_0 - \gamma(\gamma-1)K_0^2 + 6 + (n-2)(1+\gamma+\gamma^2)\Big]$$

Observación 3.27 *Si* (M, g) *tiene curvatura seccional constante se ve que* (TM, G_{cg}) *no tiene curvatura escalar constante.*

Observación 3.28 *En [15], Gudmundsson y Kappos calcularon la curvatura escalar del fibrado tangente dotado de la métrica de Cheeger-Gromoll. Su expresión difiere en un término con la nuestra. Esto se debe a un error en el cálculo en [15], sin embargo este no afecta los resulados que se obtienen en ese trabajo, que se deducen de la fórmula dada en el Corolario 3.26, y que hemos mencionado en la Sección 3.1.1.*

Corolario 3.29 *Si* (M, g) *es plana, entonces* $S_{cg} > 0$.

3.3.2 Ejemplo: Métrica Exponencial y Curvatura Seccional.

Consideremos la métrica natural $G_{\exp}$ sobre TM cuya aplicación matricial inducida por el super espacio λ es

$$^{\lambda}G_{\exp}(q, u, \xi) = \begin{pmatrix} Id_{n\times n} & 0 \\ 0 & A_3(\xi) \end{pmatrix}$$

donde $A_3(\xi) = e^{-|\xi|^2}(Id_{n\times n} + \xi^t.\xi)$. LLamaremos a esta *métrica exponencial.* Se puede ver sin dificultad que las curvaturas seccionales en los planos de $(TM)_v$ generados por $\{e_r(q, u, |v|, 0\ldots, 0), e_s(q, u, |v|, 0\ldots, 0)\}$, con $u_1 = \frac{v}{|v|}$ si $v \neq 0$, y $\{e_r(q, u, 0\ldots, 0), e_s(q, u, 0\ldots, 0)\}$ si $v = 0$, están dadas por

- $K_{\exp}(e_i, e_j) = K(u_i, u_j) - \frac{3}{4}e^{-|v|^2}|R(u_i, u_j)v|^2$
- $K_{\exp}(e_i, e_{n+j}) = \frac{e^{-|v|^2}}{4}|R(u_j, v)u_i|^2$
- $K_{\exp}(e_{n+i}, e_{n+j}) = e^{|v|^2}\left(\frac{2}{1+|v|^2} + \frac{1-|v|^2}{(1+|v|^2)(1+(\delta_{i1}+\delta_{j1})|v|^2}\right)$

Proposición 3.30 *Sea* (M, g) *una variedad Riemanniana de curvatura seccional constante* K_0*, luego* $K_{\exp}(e_i, e_j) \geq 0$ *para todo* $1 \leq i, j \leq 2n$ *si y sólo si* $0 \leq K_0 \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}e^{\frac{1}{2}}$ *y* $|v| \leq \sqrt{3}$.

Demostración: De la expresión para la curvatura seccional en el caso vertical se puede ver sin dificultad que $|v| \leq \sqrt{3}$ es condición necesaria y suficiente para que $K_{\exp}(e_{n+i}, e_{n+j}) \geq 0$. Como el caso mixto siempre es mayor o igual a cero, veamos que pasa en el caso horizontal. Si (M, g) tiene curvatura seccional constante K_0, entonces el tensor de curvatura de (M, g) es de la forma $R(A, B)C = K_0(< A, C > B- < B, C > A)$. Luego, $K_{\exp}(e_i, e_j) = K_0 - \frac{3}{4}e^{-|v|^2}|K_0||v|(\delta_{i1}+\delta_{j1}) \geq 0$. Si consideramos los planos generados por $\{e_i, e_j\}$ con $1 < i < j \leq n$, entonces necesariamente $K_0 \geq 0$. Si consideramos los planos generados por $\{e_1, e_j\}$, entonces $K_{\exp} \geq 0$ si y sólo si $K_0 - \frac{3}{4}e^{-|v|^2}K_0^2|v| \geq 0$, que es equivalente a que $\frac{4}{3} \geq K_0 e^{-|v|^2}|v|$. Como $e^{-|v|^2}|v| \leq e^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}$, la condición necesaria y suficiente para que la curvatura seccional, en el caso horizontal sea mayor o igual a cero es $0 \leq K_0 \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}e^{\frac{1}{2}}$.

□

Observación 3.31 *TM dotado con la métrica $G_{\exp}$ nunca es una variedad plana y tampoco puede ser una variedad de curvatura no positiva.*

La base $\{e_1, \ldots, e_{2n}\}$ es una base ortogonal con respecto a la métrica exponencial, luego normalizandola podemos utilizarla para calcular la curvatura escalar. Se desprende de las expresiones de la curvatura seccional que la curvatura escalar de $(TM, G_{\exp})$ en v está dada por:

$$S_{\exp}(v) = S(\pi(v)) + \frac{(n-1)e^{|v|^2}}{1+|v|^2}\Big[(n-2)(3-|v|^2) + \frac{6+2|v|^2}{1+|v|^2}\Big]$$
$$+e^{-|v|^2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big[\frac{1}{4}|R(u_j, v)u_i|^2 - \frac{3}{4}|R(u_i, u_j)v|^2\Big]$$

donde S denota la curvatura escalar de (M, g). Dado que $\sum_{ij=1}^{n}|R(u_j, v)u_i|^2 = \sum_{ij=1}^{n}|R(u_i, u_j)v|^2$, podemos escribir la curvatura escalar como:

$$S_{\exp}(v) = S(\pi(v)) + \frac{(n-1)e^{|v|^2}}{1+|v|^2}\Big[(n-2)(3-|v|^2) + \frac{6+2|v|^2}{1+|v|^2}\Big]$$
$$-\frac{e^{-|v|^2}}{2}\sum_{i,j=1}^{n}|R(u_i, u_j)v|^2$$

Proposición 3.32 *Si (M, g) tiene curvatura seccional constante K_0, entonces*

$$S_{\exp}(v) = (n-1)\Big\{K_0\Big(n - K_0|v|^2 e^{-|v|^2}\Big) + \frac{e^{|v|^2}}{1+|v|^2}\Big[(n-2)(3-|v|^2) + \frac{6+2|v|^2}{1+|v|^2}\Big]\Big\}$$

Corolario 3.33 *Si (M, g) es plana tenemos que:*

a) Si $\dim M = 2$*, entonces* $S_{\exp} > 0$.

b) Si $\dim \geq 3$*, entonces* $S_{\exp}(v) > 0$ *si y sólo si* $0 \leq |v|^2 < \frac{(n-1)+\sqrt{4(n-2)n+1}}{n-2}$.

c) Si $\dim \geq 3$*, entonces* $S_{\exp}(v) = 0$ *si y sólo si* $|v|^2 = \frac{(n-1)+\sqrt{4(n-2)n+1}}{n-2}$.

Demostración: El punto a) es inmediato de la Proposición 3.32. Para ver b) y c), hay que notar que $S_{exp}(v) > 0$ si y sólo si $-(n-2)|v|^4 + (2n-2)|v|^2 + 3(n-2) + 6 > 0$, por otro lado, la curvatura escalar es cero si y sólo si $|v|$ es raíz de este polinomio.

□

3.4 Métricas Naturales y Fibrados Tangentes Planos.

El siguiente teorema corresponde Kowalski [24] e independientemente fué probado por Aso en [3]. Aquí veremos como se deduce del Corolario 3.16.

Teorema 3.34 *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y TM dotado con la métrica de Sasaki G_s. Entonces*

$$(TM, G_s) \text{ es plana si y sólo si } (M, g) \text{ es plana.}$$

Demostración: Si el tensor de curvatura R de (M, g) es nulo, del Corolario 3.16 se ve que $R_s \equiv 0$. Por otro lado, si $R_s \equiv 0$, evaluando la ecuación tipo A de 3.16 en los puntos de la forma $(q, u, 0)$ para cualquier $(q, u) \in O(M)$ obtenemos que $0 =< R_s(e_i, e_j)e_k, e_l > |_{(q,u,0)} =< R(u_i, u_j)u_k, u_l >$, de lo cual se desprende que R es el tensor nulo.

□

Como ya adelantamos este resultado no vale para cualquier métrica natural sobre el fibrado tangente. Por ejemplo, recordar la Observación 3.24 y lo visto en la Sección 3.3.2. Ni la métrica de Cheeger-Gromoll, ni la métrica exponencial hacen del fibrado tangente una variedad plana aunque (M, g) lo fuera. Cabría preguntarnos que condiciones debemos imponer a la métrica natural G sobre TM para valga un resultado similar.

Teorema 3.35 *Sea* (M, g) *una variedad Riemanniana de* $\dim M \geq 3$ *y sea* (TM, G) *el fibrado tangente dotado con una métrica natural. Si* $\alpha, \beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}$ *son las funciones que caracterizan a* G*, entonces*

$$(TM, G) \text{ es plana si y sólo si } (M, g) \text{ es plana y } \beta(t) = \frac{(\dot{\alpha}(t))^2 t + 2\alpha(t)\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}$$

Demostración: Sea (TM, G) plana. De la misma manera que en la Demostración del Teorema 3.34 se deduce que (M, g) es plana. Si $\bar{R} \equiv 0$, en particular tenemos que para todo $i, j \neq 1$, $< \bar{R}(e_{n+i}, e_{n+j})e_{n+i}, e_{n+j} >= 0$. Del Corolario 3.16,

$$0 =< \bar{R}(e_{n+i}, e_{n+j})e_{n+i}, e_{n+j} >= \frac{(\dot{\alpha}(|v|^2))^2|v|^2 + 2\alpha(|v|^2)\dot{\alpha}(|v|^2) - \alpha(|v|^2)\beta(|v|^2)}{\alpha(|v|^2) + \beta(|v|^2).|v|^2}$$

luego,

$$\beta(|v|^2) = \frac{(\dot{\alpha}(|v|^2))^2|v|^2 + 2\alpha(|v|^2)\dot{\alpha}(|v|^2)}{\alpha(|v|^2)}.$$

Supongamos ahora que (M, g) es plana y que $\beta(t) = \frac{(\dot{\alpha}(t))^2 t + 2\alpha(t)\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}$. Si vemos que $< \bar{R}(e_i, e_j)e_k, e_l >= 0$ para $1 \leq i, j, k, l \leq 2n$, entonces $\bar{R} \equiv 0$. Del Corolario 3.16 se deduce que

$< \bar{R}(e_i, e_j)e_k, e_l >= 0$ (*Tipo A*)

$< \bar{R}(e_i, e_j)e_{n+k}, e_{n+l} >= 0$ (*Tipo D*)

$< \bar{R}(e_i, e_{n+j})e_{n+k}, e_{n+l} >= 0$ (*Tipo C*)

$< \bar{R}(e_i, e_{n+j})e_k, e_{n+l} >= 0$ (*Tipo E*)

$< \bar{R}(e_i, e_j)e_k, e_{n+l} >= 0$ (*Tipo F*)

que se anulan porque dependen del tensor de curvatura de (M, g). Resta ver el caso $< \bar{R}(e_{n+i}, e_{n+j})e_{n+k}, e_{n+l} >$ en el que todos los vectores son verticales. Supongamos que que $i, j, k, l \neq 1$,

$$< \bar{R}(e_{n+i}, e_{n+j})e_{n+k}, e_{n+l} >= (\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{jl}\delta_{ik})[\beta - 2\dot{\alpha} - \frac{(\dot{\alpha} - \beta)^2|v|^2}{\alpha + \beta|v|^2}]$$

donde $\alpha, \beta, \dot{\alpha}$ están evaluadas en $|v|^2$. Si β es como dijimos:

i) $\beta - 2\dot{\alpha} = \frac{(\dot{\alpha})^2}{\alpha}|v|^2$

ii) $\alpha + \beta|v|^2 = \frac{(\dot{\alpha}|v|^2+\alpha)^2}{\alpha}$

iii)$(\dot{\alpha} - \beta)^2|v|^2 = \frac{(\dot{\alpha}^2|v|^2+\alpha\dot{\alpha})^2|v|^2}{\alpha^2}$

De i), ii), y iii) tenemos que $< \bar{R}(e_{n+i}, e_{n+j})e_{n+k}, e_{n+l} >= 0$ para $i, j, k, l \neq 1$ y $1 \leq i, j, k, l \leq n$. Consideremos el caso en que uno de los índices es 1. Supongamos que $l = 1$:

$$(\diamondsuit) \quad < \bar{R}(e_{n+i}, e_{n+j})e_{n+k}, e_{n+1} >= (\delta_{jk}\delta_{i1} - \delta_{ik}\delta_{j1})\Big\{\ddot{\alpha}|v|^2 - \frac{1}{2}\dot{\beta}|v|^2 \ - \frac{1}{2}\frac{\dot{\alpha}\beta|v|^2}{\alpha}$$

$$+\frac{[\dot{\alpha} + \dot{\beta}|v|^2 + \beta].[\beta - \dot{\alpha}].|v|^2}{\alpha + \beta|v|^2} - 2\dot{\alpha} - 3\ddot{\alpha}|v|^2 + \frac{3}{2}\dot{\beta}|v|^2 + \beta$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\dot{\alpha}\beta|v|^2}{\alpha} - 2\frac{[\dot{\alpha} + \dot{\beta}|v|^2 + \beta][\beta - \dot{\alpha}]|v|^2}{\alpha + \beta|v|^2} + \frac{(\dot{\alpha})^2|v|^2}{\alpha}\Big\}$$

$$= (\delta_{jk}\delta_{i1} - \delta_{ik}\delta_{j1})\Big\{(2\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha} - 2\ddot{\alpha} + \dot{\beta}) - \frac{[\dot{\alpha} + \dot{\beta}|v|^2 + \beta].[\beta - \dot{\alpha}]}{\alpha + \beta|v|^2}\Big\}.|v|^2 = 0$$

Con lo cual si hay un sólo 1 en $(ijkl)$ el tensor de curvatura se anula. Si hay 3 o 4 índices 1, trivialmente se anula. Si hay dos, tenemos tres casos:

i) $\bar{R}(e_{n+1}, e_{n+1}, *, *) = 0.$

ii) $\bar{R}(*, *, e_{n+1}, e_{n+1}) = 0.$

iii) $(n + 1, *, n + 1, *)$ y $(*, n + 1, *, n + 1)$ que son equivalentes. También se deduce de $(\diamondsuit)$ que $< \bar{R}(e_{n+1}, e_{n+i})e_{n+1}, e_{n+l} >= 0$.

□

Teorema 3.36 *Sea (M, g) una variedad Riemannian de dimensión 2. Luego tenemos que, (TM, G) es plana si y sólo si (M, g) es plana y las funciones α y β satisfacen que $\beta(t) = 2\ddot{\alpha}(t)t - \frac{\dot{\alpha}(t)\beta(t)t^2}{2\alpha(t)} - \dot{\beta}(t)t + 2\dot{\alpha}(t) - \frac{\dot{\alpha}(t)t}{\alpha(t)} + \frac{[\dot{\alpha}(t)+\dot{\beta}(t)t+\beta(t)].[\beta(t)-\dot{\alpha}(t)]}{\alpha(t)+\beta(t)t}$ para todo $t \geq 0$. Por ejemplo, si $\beta(t) = \frac{(\dot{\alpha}(t))^2t+2\alpha(t)\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}$ y (M, g) es plana, entonces (TM, G) es plana.*

Demostración: Que (TM, G) plana implica que (M, g) sea plana se deduce como en la demostración del Teorema anterior. Si el tensor de curvatura $\bar{R}$ es nulo, en particular

$$0 =< \bar{R}(e_{n+1}, e_{n+2})e_{n+1}, e_{n+2} >= 2\ddot{\alpha}(|v|^2)|v|^2 - \frac{\dot{\alpha}(|v|^2)\beta(|v|^2)|v|^2}{2\alpha(|v|^2)} - \dot{\beta}(|v|^2)|v|^2$$

$$+2\dot{\alpha}(|v|^2) - \beta(|v|^2) - \frac{\dot{\alpha}(|v|^2)|v|^2}{\alpha(|v|^2)} + \frac{[\dot{\alpha}(|v|^2) + \dot{\beta}(|v|^2)|v|^2 + \beta(|v|^2)].[\beta(|v|^2) - \dot{\alpha}(|v|^2)]|v|^2}{\alpha(|v|^2) + \beta(|v|^2)|v|^2}$$

lo que nos da la condición que debe satisfacer α y β. Por otro lado, si R es el tensor nulo, por el Corolario 3.16 sólo hace falta ver que $< \bar{R}(e_{n+1}, e_{n+2})e_{n+1}, e_{n+2} >= 0$, y esto se cumple con la condición que pedimos que satisfagan α y β.

□

Observación 3.37 *Una métrica natural G sobre TM está caracterizada por las funciones α y β, que cumplen que $\alpha(t) > 0$ y $\alpha(t) + \beta(t)t > 0$ para $t \geq 0$ (ver Proposición 3.2). Si (TM, G) es plana y $\dim(M) \geq 3$ vimos que $\beta = \frac{(\dot{\alpha}(t))^2 t + 2\alpha(t)\dot{\alpha}(t)}{\alpha(t)}$. Luego, para $t \geq 0$*

$$\alpha(t) + \beta(t)t = \frac{(\dot{\alpha}(t))^2 t + 2\alpha(t)\dot{\alpha}(t)t + (\alpha(t))^2}{\alpha(t)} = \frac{(\dot{\alpha}(t)t + \alpha(t))^2}{\alpha(t)} > 0$$

con lo cual $\dot{\alpha}(t)t + \alpha(t) \neq 0$. Como $\dot{\alpha}(0)0 + \alpha(0) = \alpha(0) > 0$, entonces $\dot{\alpha}(t)t + \alpha(t) > 0$ para $t \geq 0$.

Por otro lado, si (M, g) plana, tomando $\alpha : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable tal que $\alpha(t) > 0$ y $\dot{\alpha}(t).t + \alpha(t) > 0$ para $(t \geq 0)$ podemos construir una métrica natural G sobre TM de modo que (TM, G) sea plana.

3.5 Geodésicas Compartidas.

Recordemos el Corolario 3.21. De este sabemos que si G es una métrica natural y (TM, G) es de curvatura seccional constante, entonces (TM, G) es plana. Las métricas naturales en este aspecto son bastante rígidas. Por lo tanto, en la siguiente proposición directamente pedimos que el fibrado tangente sea plano.

Proposición 3.38 *Sean G_1 y G_2 dos métricas naturales sobre el fibrado tangente de (M, g), de modo que (TM, G_1) y (TM, G_2) sean planas. Si α_1, β_1 y α_2, β_2 son* *las funciones que caracterizan a G_1 y G_2 respectivamente, supongamos que $\alpha_1(0) = \alpha_2(0)$. Luego existen isometrías locales entre (TM, G_1) y (TM, G_2) en un entorno de los puntos 0_p con $p \in M$ dadas por*

$$f_{0_p} = \exp^2_{0_p} \circ (\exp^1_{0_p})^{-1} : V_{0_p} \longrightarrow V_{0_p}$$

donde $\exp^i$ es la aplicación exponencial inducida por la métrica G_i y V_{0_p} es un entorno normal de 0_p con respecto a ambas métricas. Además, se tiene que $(f_{0_p})_{*0_p} = id_{TTM}|_{(TM)_{0_p}}$.

Demostración: Veamos que la identidad de TTM restringida a la fibra tangente a 0_p, $id_{TTM}|_{(TM)_{0_p}} : ((TM)_{0_p}, G_1) \longrightarrow ((TM)_{0_p}, G_2)$, es una es una isometría. Sea $u = (u_1, \ldots, u_n)$ una base ortonormal de M_p. Sabemos que $\{e_1(p, u, 0), \ldots, e_{2n}(p, u, 0)\}$ es una base de la fibra tangente de 0_p. Tenemos que para $1 \le i, j \le n$

$$G_1(0_p)(e_i(p, u, 0), e_j(p, u, 0)) = g(p)(u_i, u_j) = G_2(0_p)(e_i(p, u, 0), e_j(p, u, 0))$$
$$G_1(0_p)(e_i(p, u, 0), e_{n+j}(p, u, 0)) = 0 = G_2(0_p)(e_i(p, u, 0), e_{n+j}(p, u, 0))$$
$$G_1(0_p)(e_{n+i}(p, u, 0), e_{n+j}(p, u, 0)) = \delta_{ij}\alpha_1(0) = \delta_{ij}\alpha_2(0) = G_2(0_p)(e_i(p, u, 0), e_j(p, u, 0))$$

luego $id_{TTM}|_{(TM)_{0_p}}$ es una isometría. Sea V_{0_p}, como dijimos, un entorno normal para las dos métricas de 0_p. Si $v \in V_{0_p}$, existe una única geodésica γ de (TM, G_1), tal que $\gamma(0) = 0_p$ y $|\dot\gamma| = 1$ y pasa por v pongamos a tiempo t_v, es decir $\gamma(t_v) = v$. Sea $\widetilde\gamma$ la geodésica de (TM, G_2), tal que $\widetilde\gamma(0) = 0_p$ y $\dot{\widetilde\gamma}(0) = \dot\gamma(0)$. Notamos con P y $\widetilde P$ el transporte paralelo a lo largo de γ y $\widetilde\gamma$ respectivamente. Sea $\phi_v : (TM)_v \longrightarrow (TM)_{\widetilde\gamma(t_v)}$ dada por

$$\phi_v(b) = \widetilde P_{t_v} \circ P^{-1}_{t_v}(b)$$

La proposición se deduce del Teorema de Cartan, ver [11] pág. 157. Sea $\{\bar R_i\}_{i=1,2}$ el tensor de curvatura de $\{(TM, G_i)\}_{i=1,2}$. El Teorema de Cartan nos dice que si $G_1(v)(\bar R_1(v_1, v_2)v_3, v_4) = G_2(\bar R_2(\phi_v(v_1), \phi_v(v_2))\phi_v(v_3), \phi_v(v_4))$ para todo $v \in V_{0_p}$ y todo $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \in (TM)_v$, entonces f_{0_p} es una isometría y su diferencial en 0_p es la aplicación identidad. En nuestro caso, esta condición, que llamaremos condición de Cartan, se cumple trivialmente porque los fibrados tangentes son planos. $\square$

Proposición 3.39 *Sea TM dotado de dos métricas naturales G_1 y G_2, de modo que resulten variedades planas. Sean α_1, β_1 y α_2, β_2 las funciones que caracterizan a G_1 y G_2 respectivamente. Luego, si $|v| = r$, $f = \exp^2_v \circ (\exp^1_v)^{-1}$ es una isometría en un entorno de $v \in TM$ si y sólo si $\alpha_1(r^2) = \alpha_2(r^2)$ y $\dot\alpha_1(r^2)r^2 = \dot\alpha_2(r^2)r^2$.*

Demostración: Si $\alpha_1(r^2) = \alpha_2(r^2)$ y $\dot{\alpha}_1(r^2)r^2 = \dot{\alpha}_2(r^2)r^2$, y dado que $(TM, G_i)_{i=1,2}$ es plana, es fácil ver que la aplicación identidad $id : (TM)_v \longrightarrow (TM)_v$ es una isometría. Luego, por el Teorema de Cartan, f es una isometría.

Por otro lado, si f es una isometría, entonces $f_{*_v} = id : (TM)_v \longrightarrow (TM)_v$ es una isometría lineal. En particular, si X e Y son vectores verticales tangentes a v, tenemos que $G_1(X,Y) = G_2(X,Y)$, es decir $\Big(\sum_{i\geq 2} \rho_i\psi_i\Big)\alpha_1(r^2) + \rho_1\psi_1(\alpha_1(r^2) + \beta_1(r^2)r^2) = \Big(\sum_{i\geq 2} \rho_i\psi_i\Big)\alpha_2(r^2) + \rho_1\psi_1(\alpha_2(r^2) + \beta_2(r^2)r^2)$, si $X = \sum_{i=1}^{n} \rho_i e_{n+i}(z)$ e $Y = \sum_{j=1}^n \psi_j e_{n+j}(z)$ donde si $v \neq 0$ $z = (p, u, r, 0, \ldots, 0)$, con $u_1 = \frac{v}{r}$ y si $v = 0$, $z = (p, u, 0)$ con u base ortonormal de M_p. De esto deducimos que $\alpha_1(r^2) = \alpha_2(r^2)$ para $r \geq 0$, con esto la proposición queda probada para el caso $v = 0$, y además que $\beta_1(r^2) = \beta_2(r^2)$ si $r > 0$. Supongamos que $v \neq 0$. Como las métricas son planas, tenemos que $\beta_i(t) = \frac{\dot{\alpha_i}^2(t)t + 2\alpha_i\dot{\alpha_i}(t)}{\alpha_i(t)}$. Entonces,

$$(\dot{\alpha_1})^2(r^2) - (\dot{\alpha_2})^2(r^2) = \frac{2\alpha_1(r^2)\Big(\dot{\alpha}_1(r^2) - \dot{\alpha}_1(r^2)\Big)}{r^2}$$

Si $\dot{\alpha_1}(r^2) \neq \dot{\alpha_2}(r^2)$, se sigue que

$$\dot{\alpha_1}(r^2) + \dot{\alpha_2}(r^2) = -2\frac{\alpha_1(r^2)}{r^2}$$

Por ser G_i métricas Riemannianas $\alpha_i(t) + \dot{\beta_i}(t)t > 0$ y $\alpha_i(t) > 0$, como además son planas tenemos que $\dot{\alpha}_i(t)t + \alpha_i(t) > 0$, entonces

$$\dot{\alpha_1}(r^2) + \dot{\alpha_2}(r^2) > -2\frac{\alpha_1(r^2)}{r^2}$$

con lo cual, tenemos una contradicción que vino de suponer que $\dot{\alpha}_1(r^2) \neq \dot{\alpha_2}(r^2)$

□

Proposición 3.40 *Supongamos que existe α geodésica de (TM, G_1) y (TM, G_2). Supongamos que v y w son puntos de α de modo que tenemos definidas las isometrías locales f_v y f_w en respectivos entornos normales V_v y V_w (con $V_v \cap V_w$ conexo). Si P^i es el transporte paralelo a lo largo de α en (TM, G_i) y se satisface que $P^2_{t_0t_1} \circ (P^1_{t_0t_1})^{-1} = (P^2_{t_1t_2})^{-1} \circ (P^1_{t_1t_2})$ para $t_0 \leq t_1 \leq t_2$, tenemos que:*

i) $f_v(\alpha) = \alpha$ *y* $f_w(\alpha) = \alpha$.

ii) $f_v \equiv f_w$ *en* $V_v \cap V_w$.

Demostración: Supongamos que $\alpha(0) = v$ y $\alpha(1) = w$. Como f_v es una isometría $\beta(t) = f_v(\alpha(t))$ es una geodésica de (TM, G_2). Pero $\dot{\alpha}(0) = \dot{\beta}(0)$ y como α es también geodésica de (TM, G_2), entonces $f_v(\alpha) = \alpha$. Similarmente obtenemos que $f_w(\alpha) = \alpha$.

Sea $z \in V_v \cap V_w$ y sea $0 < l < 1$ tal que $\alpha(l) = z$. Sabemos que $f_v(z) = f_w(z)$, si vemos que $(f_v)_{*_z} \equiv (f_w)_{*_z}$, como sabemos que son isometrías, tenemos que $f_v \equiv f_w$ en $V_v \cap V_w$. Sea $\bar{z} \in (TM)_z$, consideremos J un campo de Jacobi a lo largo de α tal que $J(0) = 0$ y $J(l) = \bar{z}$, o sea $J(t) = (\exp^1_v)_{*_{t\dot{\alpha}(0)}}(tJ'(0))$. Se puede comprobar sin dificultad que $\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t))$ es un campo de Jacobi a lo largo de α en (TM, G_2). Luego, $\tilde{J}(t) = (\exp^2_v)_{t\dot{\alpha}(0)}(t\tilde{J}'(0))$. Veamos que $\tilde{J}(l) = (f_v)_{*_z}(\bar{z})$. Dado que $\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t))$, tenemos que $\tilde{J}'(0) = (f_v)_{*_v}(J'(0)) = id(J'(0))$, de lo cual tenemos que

$$\tilde{J}(l) = (\exp^2_v)_{*_{l\dot{\alpha}(0)}}(id(lJ'(0))) = (\exp^2_v)_{*_{l\dot{\alpha}(0)}} \circ id \circ (\exp^1_v)^{-1}_{*_{l\dot{\alpha}(0)}}(\bar{z}) = (f_v)_{*_z}(\bar{z})$$

Entonces, $(f_v)_{*_z}(\bar{z}) = P^2_t \circ id \circ P^{-1}_t(J(l))$ y del mismo modo resulta que $(f_w)_{*_z}(\bar{z}) = (P^2_{l1})^{-1} \circ id \circ P^1_{l1}(J(l))$, luego $(f_v)_{*_z}(\bar{z}) = (f_w)_{*_z}(\bar{z})$.

□

En la proposición anterior supusimos que había una geodésica que compartían (TM, G_1) y (TM, G_2). Veamos que efectivamente hay este tipo de curvas.

Proposición 3.41 *Sea* (M, g) *una variedad Riemanniana y* TM *provisto de una métrica natural* G. *Si* $c : I \longrightarrow M$ *es una geodésica de* (M, g), *entonces* $\bar{c} = \dot{c} : I \longrightarrow TM$ *es una geodésica de* (TM, G).

Demostración: Sea $u = \bar{c}(t_0) = \dot{c}(t_0)$ y $p = c(t_0)$. Supongamos que para cada entorno de u existe un punto $v \in Img(\bar{c})$ de modo que $\bar{c}$ no minimiza la distancia entre u y v. Tomemos un entorno normal de u que llamamos $\bar{V}$, de tal forma que $\pi(\bar{V}) \subseteq V$ entorno normal de p. Sea $v \in \bar{V}$ con $\pi(v) = q$ y $\bar{c}(t_1) = v$ tal que $\bar{c}$ no minimiza la distancia entre u y v. Luego, si notamos la longitud de un arco de curva en (TM, G) con $\bar{l}$, existe $\bar{h}$ con la propiedad de que $\bar{l}_{uv}(\bar{h}) < \bar{l}_{uv}(\bar{c})$. Por ser c una geodésica, es decir que $\dot{\bar{c}}$ no tiene componentes verticales, y G una métrica natural tenemos que

$$\bar{l}_{uv}(\bar{c}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G(\dot{\bar{c}}(t), \dot{\bar{c}}(t))}dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G\Big((\dot{\bar{c}})^h(t), (\dot{\bar{c}})^h(t)\Big)}dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))}dt = l_{pq}(c)$$

Por otro lado,

$$\bar{l}_{uv}(\bar{h}) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G\Big((\dot{\bar{h}})^h(t) + (\dot{\bar{h}})^v(t), (\dot{\bar{h}})^h(t) + (\dot{\bar{h}})^v(t)\Big)}dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G\Big((\dot{\bar{h}})^h(t), (\dot{\bar{h}})^h(t)\Big) + G\Big((\dot{\bar{h}})^v(t), (\dot{\bar{h}})^v(t)\Big)}dt \geq \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G\Big((\dot{\bar{h}})^h(t), (\dot{\bar{h}})^h(t)\Big)}dt$$

Luego, si h es la curva en M definida por $h(t) = \pi \circ \bar{h}$, $h(t_0) = p$ y $h(t_1) = q$ y $\dot{h}(t) = \pi_{*_{\bar{h}(t)}}(\dot{\bar{h}}(t))$. La longitud de h es

$$l_{pq}(h) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G\Big(\pi_{*_{\bar{h}(t)}}(\dot{\bar{h}}(t)), \pi_{*_{\bar{h}(t)}}(\dot{\bar{h}}(t))\Big)}dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{G\Big((\dot{\bar{h}})^h(t), (\dot{\bar{h}})^h(t)\Big)}dt \leq \bar{l}_{uv}(\bar{h})$$

con lo cual, $l_{pq}(h) < l_{pq}(c)$ lo que es una contradicción. Por lo tanto, como $\bar{c}$ minimiza localmente distancia en cada punto de su imagen, $\bar{c}$ es una geodésica de (TM, G). ▫

Observación 3.42 *En la Proposición anterior podemos relajar la hipótesis de que la métrica se natural. Es decir, si una métrica Riemanniana G sobre TM satisface que $G(v)(X^h, Y^h) = f(\pi(v))g(\pi_{*_v}(X), \pi_{*_v}(X))$ para X^h e Y^h horizontales y que $(V_v)^\perp = H_v$, entonces la Proposición 3.41 sigue valiendo.*

Proposición 3.43 *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y TM dotado de una métrica G. Sea $\tilde{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de la métrica G. Luego son equivalentes:*

i) $\tilde{\nabla}_{X^v} Y^v = 0$ para todo levantamiento vertical de X e Y campos de M.

ii) Las curvas de TM de la forma $\alpha(t) = tw + v$ con $v, w \in M_p$ son geodésicas de (TM, G).

Demostración: Sea (U, x) una carta de M y notamos con $(TU, \bar{x})$ y $(TTU, \bar{\bar{x}})$ las cartas de TM y TTM inducidas por esta. Los campos tangentes inducidos por estas cartas son $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $A_j = \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}$ y $B_k = \frac{\partial}{\partial \bar{\bar{x}}^k}$ con $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq 2n$ y $1 \leq k \leq 4n$, respectivamente. Sea $\alpha(t) = wt + v$ calulemos las coordenas de la aceleración de α con respecto a $(TTU, \bar{\bar{x}})$, es decir para $1 \leq j \leq 2n$:

$$(\dot{\alpha})_{*_t}(D|_t)(\bar{\bar{x}}^j) = D|_t(\bar{x}^j \circ \pi_{TM} \circ \dot{\alpha})$$

Para $1 \leq j \leq n$, tenemos que $D|_t(\bar{x}^j \circ \pi_{TM} \circ \dot{\alpha}) = D|_t(x^j \circ \pi \circ \alpha) = D|_t(x^j(p)) = 0$ y para $n+1 \leq j \leq 2n$, tenemos que $D|_t(\bar{x}^j \circ \pi_{TM} \circ \dot{\alpha}) = D|_t(\alpha(x^{j-n})) = w(x^{j-n})$. Las últimas $2n$ coordenadas son para $1 \leq j \leq 2n$

$$(\dot{\alpha})_{*_t}(D_t)(\bar{\bar{x}}^{2n+j}) = D|_t(\dot{\alpha}(\bar{x}^j))$$

Si $1 \leq j \leq n$, $D|_t(\dot{\alpha}(\bar{x}^j)) = (D|_t)^2(x^j \circ \pi \circ \alpha) = 0$ y $D|_t(\dot{\alpha}(\bar{x}^{n+j})) = (D|_{t=0})^2(tw(x^j) + v(x^j)) = 0$. Luego tenemos que $(\dot{\alpha})_{*_t}(D_t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} w(x^j) B_{n+j}$. Por lo tanto,

$$\tilde{\nabla}_D \dot{\alpha} = \tilde{K}((\dot{\alpha})_{*_t}(D_t)) = \sum_{k=1}^{2n} \Big(\sum_{ij=1}^{n} w(x^i) w(x^j) \tilde{\Gamma}^k_{n+i\ n+j} \Big) A_k \qquad (\blacklozenge)$$

donde $\tilde{K}$ es la función de conexión inducida por $\tilde{\nabla}$ y $\tilde{\Gamma}^k_{n+i\ n+j} = \tilde{\nabla}_{A_{n+i}} A_{n+j}(\bar{x}^k)$. Que $i)$ implica $ii)$ se deduce de observar que los campos A_{n+l} son el levantamiento vertical de los campos X_l, por lo tanto $\tilde{\Gamma}^k_{n+i\ n+j} = 0$ y la ecuación ($\blacklozenge$) se anula.

Si suponemos que todas las curvas del tipo $\alpha(t) = wt + v$ son geodésicas, entonces de ($\blacklozenge$) se deduce que $\tilde{\nabla}_{A_{n+i}} A_{n+j} = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq 2n$, lo que implica $i)$.

□

Observación 3.44 *La métrica de Sasaki satisface que* $\tilde{\nabla}_{X^v} Y^v = 0$.

Corolario 3.45 *Sea* (TM, G) *provisto de una métrica natural. Si las rectas* $\alpha(t) = tw + v$ *con* $v, w \in TM$ *y* $\pi(v) = \pi(w)$ *son todas geodésicas, entonces vale que* (M, g) *es plana si y sólo si* (TM, G) *es plana.*

Demostración: Del Corolario 3.21 sabemos que (TM, G) plana implica que (M, g) es plana, por lo tanto, sólo hace falta ver que en esta situación alcanza con que (M, g) sea plana para que (TM, G) lo sea. Dado $u \in TM$ y b_1, b_2 y $b_3 \in (TM)^v_u$, existen X, Y y $Z \in \chi(M)$ tales que $X^v(u) = b_1$, $Y^v(u) = b_2$ y $Z^v(u) = b_3$. Luego, $\tilde{R}(b_1, b_2)b_3 = \tilde{\nabla}_{X^v} \tilde{\nabla}_{Y^v} Z^v - \tilde{\nabla}_{Y^v} \tilde{\nabla}_{X^v} Z^v - \tilde{\nabla}_{[X^v, Y^v]} Z^v = 0$ pues las rectas α son geodésicas, lo que implica que $\tilde{\nabla}_{Y^v} Z^v = \tilde{\nabla}_{X^v} Z^v = 0$ y $[X^v, Y^v] = 0$. Entonces, de la Proposición 3.18 deducimos que si (M, g) es plana luego (TM, G) es plana.

□

3.6 r-Fibrados.

Sea (M,g) una variedad Riemanianna y $r>0$, llamamos a la subvariedad de TM dada por $T_rM=\{v\in TM: \ |v|=r\}$ el $r-fibrado$ de (M,g). T_rM es una subvariedad sumergida de dimensión $2n-1$ de TM. Si $v\in T_rM$, la fibra tangente a T_rM en V la podemos identificar con el subespacio de $(TM)_v$ dado por

$$i_{*_v}((T_rM)_v)=(TM)^h_v\oplus V^1_v$$

donde V^1_v es el subespacio dentro del subespacio vertical complementario al generado por $\bar{N}(v)=(\pi_{*_v}\times K_v)^{-1}(0,v)$, es decir aquel que satisface que $(TM)^v_v= = V^1_v\oplus<\bar{N}(v)>$. Esto se ve fácilmente, pues si $b\in(T_rM)_v$ y G_s es la métrica de Sasaki, tenemos que

$$G_s(\bar{N}(v),i_{*_v}(b))=g(v,K_v(i_{*_v}(b)))=g(i(v),\nabla_b i)=\frac{1}{2}b(g(i,i))=0$$

$\bar{N}(v)$ es ortogonal a la fibra tangente a T_rM en v con respecto a la métrica de Sasaki.

Consideremos sobre TM una métrica natural G . Si $v\in T_rM$ sea $z=(q,u,r,0,\dots,0)$ $\in N$, recordamos que $N=O(M)\times\mathbb{R}$ es la variedad espacio del super espacio $\lambda=(N,\psi,O(n),R_a,\{e_i\})$ con el que venimos trabajando, de modo que $u_1=\frac{v}{r}$. Luego, $\{e_1(z),\dots,e_{2n}(z)\}$ es una base de $(TM)_v$ y tenemos que $G(e_i(z),e_j(z))=\delta_{ij}$, $G(e_i(z),e_{n+j}(z))=0$ y $G(e_{n+i}(z),e_{n+j}(z))=\delta_{ij}\alpha(r^2)+\delta_{ij1}\beta(r^2)r^2$ si $1\le i,j\le n$. Como el campo $\bar{N}(v)=re_{n+1}(z)$, tenemos que $\bar{N}(v)$ es ortogonal a $(T_rM)_v$ con respecto a la métrica G. Resulta entonces que

$$N(v)=\frac{\bar{N}(v)}{\alpha(r^2)+\beta(r^2)r^2}$$

es un campo normal de T_rM en (TM,G).

Notamos con $\tilde{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de (TM,G) y con $\tilde{K}(X,Y)$ la curvatura seccional de (TM,G). La restricción de la métrica G a T_rM la notamos con $\bar{G}$ y con $\bar{K}(X,Y)$ su curvatura seccional. $K(A,B)$ es la curvatura seccional en (M,g). Sea $B(X,Y)=(\tilde{\nabla}_XY)^\perp$ si X e Y son campos tangentes del r-fibrado. Luego, como T_rM es una subvariedad de codimensión 1 de TM, $B(X,Y)=G(B(X,Y),N)N$. Si S_N es el operador autoadjunto tal que $\bar{G}(S_N(X),Y)=G(B(X,Y),N)$, es decir que S_N es la aplicación de Gauss, entonces $S_N(X)=(\tilde{\nabla}_XN)^T$ (la componente tangencial a T_rM de $\tilde{\nabla}_XN$) y por lo tanto, $B(X,Y)=-G(\tilde{\nabla}_XN,Y)N$.

El siguiente Teorema corresponde a Dombrowski [12]:

Teorema 3.46 *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y consideremos en TM las distribuciones horizontales y verticales inducidas por la conexión de Levi-Civita de (M, g). Luego si X^h, X^v, Y^h y Y^v son los levantamientos horizontales y verticales respectivamente de los campos X e Y tenemos que en $u \in TM$:*

i) $[X^v, Y^v] = 0$.

ii) $[X^h, Y^v] = (\nabla_X Y)^v$.

iii) $[X^h, Y^h] = [X, Y]^h - (R(X, Y)u)^v$

Corolario 3.47 *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y TM provisto de una métrica natural G. Si ∇ es la conexión de Levi-Civita de (TM, G) entonces, $G(\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v, Z^h)$ $= -\frac{1}{2} G(Y^v, (R(Z, X)u)^v)$.*

Demostración: La igualdad se deduce de la fórmula de Koszul y del Teorema anterior.

□

Observación 3.48 *El Corolario 3.47 sigue siendo válido aún sin la condición de que G sea un tensor $\lambda-$natural con respecto al fibrado tangente. Más precisamente, no hace falta pedir que G sea natural en el sentido clásico, o sea no es necesario que la aplicación matricial inducida sólo dependa del parámetro de $\mathbb{R}^n$.*

Proposición 3.49 *Sea (M, g) una variedad Riemanianna y (TM, G) el fibrado tangente dotado de una métrica natural. Sea T_rM el r-fibrado provisto de la métrica restringida $\bar{G} = G|T_rM$. Tenemos que*

$$\bar{K}(X, Y) = \tilde{K}(X, Y)$$

si $X, Y \in (T_rM)_v$ son ortonormales y horizontales. En particular, si $1 \leq i, j \leq n$

$$\bar{K}(e_i(z), e_j(z)) = K(u_i, u_j) - \frac{3}{4}\alpha(r^2)|R(u_i, u_j)u|^2$$

Demostración: Vamos a calcular $G(\tilde{\nabla}_X N, Y)$. Sean X e Y campos horizontales de TM. Consideremos una carta de (U, x) de M y $(TU, \bar{x})$ su carta inducida de TM. Recordemos, ver en el Capítulo de Preliminares la Sección 1.3.1, que la distribución horizontal está localmente generada por los campos $H_i(v) = A_i(v) - \sum_k (\sum_j \bar{x}^{n+j} \gamma_{ij}^k (\pi(v)) A_{n+k}(v))$ con $i = (1, \ldots, n)$. Estos campos, si bien los notamos de la misma manera, no son aquellos que forman un marco global para la variedad $N = O(M) \times \mathbb{R}$ del super espacio λ (Sección 3.2.2). Luego, existen funciones $\{\rho^i\}_{i=1}^n$ y $\{\gamma^j\}_{j=1}^n$ tales que $X = \sum_{i=1}^n \rho^i H_i$ e $Y = \sum_{j=1}^n \gamma^j H_j$. Localmente podemos escribir al campo N como $N(v) = \sigma \sum_l \bar{x}^{n+l}(v) A_{n+l}(v)$, donde $\sigma = \frac{1}{\alpha(r^2)+\beta(r^2)r^2}$, pues $A_{n+l} = (\frac{\partial}{\partial x^i})^v$. Si $z = (q, u, r, 0, \ldots, 0) \in N$, donde $u = \{u_1, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de M_q y $u_1 = \frac{v}{r}$, utilizando el Corolario 3.47 obtenemos que

$$\begin{aligned}
-G(\tilde{\nabla}_X N, Y) &= -\sigma \sum_l X \bar{x}^{n+l} G(A_{n+l}, Y) - \sigma \sum_{ijl} \rho^i \gamma^j \bar{x}^{n+l} G(\tilde{\nabla}_{H_i} A_{n+l}, H_j) \\
&= \frac{\sigma}{2} \sum_{ijl} \rho^i \gamma^j \bar{x}^{n+l} G\Big((\frac{\partial}{\partial x^l})^v, (R(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i})v)^v\Big) \\
&= \frac{\sigma}{2} \sum_{ijl} r \rho^i \gamma^j \bar{x}^{n+l} g(R(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i})u_1), u_r) G\Big((\frac{\partial}{\partial x^l})^v, u_r^v\Big) \\
&= \frac{\sigma}{2} \sum_{ijl} r \rho^i \gamma^j g(R(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i})u_1), u_r) G(e_{n+1}(z), e_{n+r}(z)) = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si X e Y son horizontales, $B(X, X) = B(X, Y) = B(Y, Y) = 0$, con lo cual, de la fórmula de Gauss deducimos que $\bar{K}(X, Y) = \tilde{K}(X, Y)$. Utilizando la Proposición 3.18 obtenemos el caso particular $\bar{K}(e_i(z), e_j(z)) = K(u_i, u_j) - \frac{3}{4}\alpha(r^2)|R(u_i, u_j)u|^2$. □

Sea $c : I \longrightarrow T_r M$ una curva en el r-fibrado. Es conocida la relación que existe entre la derivada covariante de una variedad y la de una subvariedad inmersa. En nuestro caso particular la relación es

$$\tilde{\nabla}_D i_*(\dot{c}) = i_*(\bar{\nabla}_D \dot{c}) + B(\dot{c}, \dot{c}) N(c)$$

De lo cual, teniendo en cuenta que $B(X, X) = 0$ si X es horizontal, se desprende el siguiente Corolario:

Corolario 3.50 *Sea $c : I \longrightarrow T_r M$ una geodésica de $T_r M$ tal que $\dot{c}(t) \in (TM)^h_{c(t)}$ para todo t, entonces c es geodésica de (TM, G).*

Observación 3.51 *En general el Corolario anterior no vale para geodésicas con velocidades verticales. Sea TM dotado con la métrica de Sasaki y sea $v \in T_rM$ y c una geodésica de T_rM de modo que $c(0) = v$ y $\dot{c}(0)$ sea vertical. Supongamos que $\dot{c}(0) = w^v_{\dot{c}(0)}$ para $w \in M_{\pi(v)}$. Resulta que la curva c no es una geodésica de (TM, G_s), porque si consideramos la curva $h(t) = wt + v$, que no es una curva de T_rM, es una geodésica del fibrado tangente y $\dot{h}(0) = \dot{c}(0)$.*

Proposición 3.52 *Sea (TM, G) con G natural de modo que $\tilde{\nabla}_{X^v} Y^v = 0$. Sean X e Y ortonomales con respecto a $\bar{G}$, entonces tenemos que*

$$\bar{K}(X,Y) = \tilde{K}(X,Y) + G(X^v, X^v)G(Y^v, Y^v) - (G(X^v, Y^v))^2$$

donde $X = X^h + X^v$ e $Y = Y^h + Y^v$ son las componentes horizontales y verticales.

Demostración: La fórmula de Gauss nos dice que la relación entre las curvaturas seccionales es $\bar{K}(X,Y) - \tilde{K}(X,Y) = G(B(X,X), B(Y,Y)) - |B(X,Y)|^2$ y vimos que $B(H,H) = 0$ cuando H es horizontal. Calculemos $B(U,W) = -G(\tilde{\nabla}_U N, W)$ cuando U es vertical y W es horizontal. Localmente, si $U = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \rho^i A_{n+i}$ y dado que $N = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \bar{x}^{n+j} A_{n+j}$, tenemos que

$$\tilde{\nabla}_U N = \sum_{ij} \rho^i A_{n+i}(\bar{x}^{n+j}) A_{n+j} + \sum_{ij} \rho^i \bar{x}^{n+j} \overbrace{\tilde{\nabla}_{A_{n+i}} A_{n+j}}^{0}$$

luego, $-G(\tilde{\nabla}_U N, W) = 0$, con lo cual $B(U,W) = 0$. Ahora si U y W son verticales $B(U,W) = -G(U,W)$, pues $\tilde{\nabla}_U N = \displaystyle\sum_{ij} \rho^i A_{n+i}(\bar{x}^{n+j}) A_{n+j} = U$. Evaluemos la forma bilinieal B en X e Y

$$B(X,Y) = \overbrace{B(X^h, Y^h) + B(X^h, Y^v) + B(X^v, Y^h)}^{0} + B(X^v, Y^v) = B(X^v, Y^v)$$

$$B(X,X) = B(X^h, X^h) + 2B(X^h, X^v) + B(X^v, X^v) = B(X^v, X^v)$$

$$B(Y,Y) = B(Y^h, Y^h) + 2B(Y^h, Y^v) + B(Y^v, Y^v) = B(Y^v, Y^v)$$

Por lo tanto, $\bar{K}(X,Y) = \tilde{K}(X,Y) + G(X^v, X^v)G(Y^v, Y^v) - (G(X^v, Y^v))^2$ □

Observación 3.53 *Si X es horizontal e $Y \in (T_rM)_v$ ortonormal a X, entonces $\bar{K}(X,Y) = \tilde{K}(X,Y)$.*

De la Observación 3.51, la Proposición 3.43 y el hecho de que $B(X^v, X^v) \neq 0$ si X^v no es el vector nulo, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.54 *Sea (TM, G) con G natural de modo que $\tilde{\nabla}_{X^v} Y^v = 0$. Si c es geodésica de $(T_rM, \bar{G})$ y $\dot{c}(t_0) \in (TM)^v_{c(t_0)}$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $|t_1 - t_0| < \varepsilon$ se tiene que $B(\dot{c}(t_1), \dot{c}(t_1)) \neq 0$.*

Corolario 3.55 *Sea (M, g) una variedad Riemanniana y consideremos el fibrado tangente dotado de una métrica natural G de modo que $\tilde{\nabla}_{X^v} Y^v = 0$. En ese caso la curvatura Gaussiana del r-fibrado tangente será cero.*

Demostración: Sea $v \in T_rM$ y H un vector tangente a v que es horizontal. Sea S_N la aplicación de Gauss y $W \in T_rM$. $\bar{G}(S_N(H), W) = G(B(H,W), N)$ y $B(H,W) = B(H, W^h)N + B(H, W^v)N = 0$. Por lo tanto, $(T_rM)^h_v \subseteq \ker(S_N)$ y $K_{Gauss}(T_rM) = 0$. □

En la Proposición 3.52 pedimos que la métrica natural G satisfaga que $\tilde{\nabla}_{X^v} Y^v = 0$. Es bien conocido que la métrica de Sasaki satisface esta propiedad. En [24], Kowalski además probó que la conexión de Levi-Civita inducida por la métrica de Sasaki cumple que:

- $\tilde{\nabla}_{X^h} Y^v|_v = (\nabla_X Y)^v + \frac{1}{2}(R(v,Y)X)^h$
- $\tilde{\nabla}_{X^v} Y^h|_v = \frac{1}{2}(R(u,X)Y)^h$
- $\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h|_v = (\nabla_X Y)^v + \frac{1}{2}(R(X,Y)v)^v$

Consideremos TM dotado de la métrica de Sasaki y el fibrado unitario tangente, o sea el 1-fibrado, con la métrica restringida. La expresión local de la derivada covariante del campo normal N en la dirección $b \in (T_1M)_v$ es

$$\tilde{\nabla}_b N = \sum_{i=1}^{n} b(\bar{x}^{n+i}) A_{n+i} + \sum_{i=1} \bar{x}^{n+i}(\tilde{\nabla}_{b^h} A_{n+i} + \tilde{\nabla}_{b^v} A_{n+i})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b(\bar{x}^{n+i})A_{n+i} + \sum_{i=1} \bar{x}^{n+i}\Big((\nabla_{\pi_*(b)}\frac{\partial}{\partial x^i})^v + \frac{1}{2}(R(v,\frac{\partial}{\partial x^i})\pi_*(b))^h\Big)$$

Por lo tanto,

$$G_s(B(b,b),N) = -G_s(\tilde{\nabla}_b N, b) = -g(\pi_*(\tilde{\nabla}_b N), \pi_*(b)) - g(K(\tilde{\nabla}_b N), K(b))$$

$$= -g(K(\tilde{\nabla}_b N), K(b)) = -g\Big(\sum_{i=1}^{n} b(\bar{x}^{n+i})\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} \bar{x}^{n+i}\nabla_{\pi_*(b)}(\frac{\partial}{\partial x^i}), K(b)\Big)$$

Por otro lado, si b es vertical y b' es horizontal

$$G_s(\tilde{\nabla}_b N, b') = G_s(\sum_{i=1}^{n} b(\bar{x}^{n+i})A_{n+i}, b') = 0$$

De esto deducimos:

Proposición 3.56 *$B(b,b) = 0$ si b es horizontal (esto lo sabíamos de la Demostración de la Proposición 3.49), $B(b,b) = -|K_v(b)|^2 N(v)$ si $b \in (T_1M)_v$ es vertical y $B(b,b') = 0$ si b es vertical y b' es horizontal.*

Observación 3.57 *Como $B(b^v, b^h) = 0$, si c es una geodésica de $(T_1M, \bar{G})$ la derivada covariante de la curva c en (TM, G_s) es*

$$\tilde{\nabla}_D i_*(c) = -|K_{c(t)}(\dot{c}(t))|^2 N(c(t))$$

Corolario 3.58 .

i) Si E es una dirección principal de $(T_1M)_v$ correspondiente a la curvatura principal κ, entonces $\kappa = -|K_v(E)|^2$.

ii) Si $\{E_1, \ldots, E_{2n-1}\}$ son las direcciones principales en $(T_1M)_v$, se tiene que

$$\bar{K}(E_i, E_j) - \tilde{K}(E_i, E_j) = |K_v(E_i)|^2 |K_v(E_j)|^2$$

Demostración: De la Proposición 3.56 se sigue que $\kappa = G_s(S_N(E^h + E^v), E^h + E^v) = G_s(B(E^h, E^h), N) + 2G_s(B(E^h, E^v), N) + G_s(B(E^v, E^v), N) = -|K_v(E)|^2$. El punto ii) se deduce de la aplicación de la fórmula de Gauss.

□

Observación 3.59 *Aplicando la Proposición 3.52 al caso particular del fibrado unitario tangente con la métrica de Sasaki restringida tenemos que*

$$\bar{K}(E,W) - \tilde{K}(E,W) = |K_v(E)|^2|K_v(W)|^2 - \Big(g(K_v(E), K_v(W))\Big)^2$$

si E y W son vectores ortonormales de $(T_1M)_v$. Ya sabemos que si E es horizontal $\bar{K}(E,W) = \tilde{K}(E,W)$. Si E y W son verticales y ortonormales la relación entre las curvaturas seccionales es

$$\bar{K}(E,W) = \tilde{K}(E,W) + 1$$

Como dijimos, la métrica de Sasaki satisface que $\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v = 0$. ¿Cuántas métricas naturales tienen esta propiedad? Recordemos que para una métrica natural esto es equivalente a que las rectas en las fibras de TM sean geodésicas (Proposición 3.43). ¿Hay muchas más que la métrica de Sasaki? En la Proposición 1.5 de [1], Abbassi y Sarih prueban que si $\tilde{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita de una métrica natural G, entonces si $r = |v|$

$$\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v|_v = \frac{\dot{\alpha}(r^2)}{\alpha(r^2)}\Big(g(Y,v)X^v + g(X,v)Y^v\Big)$$
$$+\frac{1}{\alpha(r^2)(\alpha(r^2)+\beta(r^2)r^2)}\Big[\alpha(r^2)(\beta(r^2)-\dot{\alpha}(r^2))g(X,Y)$$
$$+\Big(\alpha(r^2)\dot{\beta}(r^2) - 2\dot{\alpha}(r^2)\beta(r^2)\Big)g(X,v)g(Y,v)\Big]v^v$$

Si pedimos que $\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v = 0$ para todo X e Y y elegimos adecuadamente los campos de modo que X^v, Y^v y v^v sean linealmente independientes, vemos que necesariamente la función α que carateriza a la métrica G debe ser constante. Luego, si tomamos X ortogonal a v pero que no sea ortogonal a Y, resulta que β debe ser la función nula. Finalmente arribamos a la siguiente Proposición:

Proposición 3.60 *Sea (M,g) una variedad Riemanianna y consideremos el fibrado tangente dotado con una métrica natural G. Si $\tilde{\nabla}$ es la conexión de Levi-Civita inducida por G, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $\tilde{\nabla}_{X^v}Y^v = 0$

ii) G es un múltiplo escalar vertical de métrica de Sasaki, es decir $G(U,V) = g(\pi_*(U), \pi_*(V)) + kg(K(U), K(V))$, con $k > 0$.

Capítulo 4

Levantando Métricas a un Super Espacio

Por un lado, el objetivo de este capítulo es mostrar una generalización de lo expuesto en el Capítulo 3 y por otro, y esto es lo más importante, esbozar y mostrar algunos ejemplos de un aspecto de la teoría de super espacios que puede ser interesante para estudiar en el futuro. Este aspecto es el levantamientos de métricas de la variedad base a la variedad espacio de un super espacio. El germen de este trabajo fue estudiar las métricas naturales sobre el fibrado tangente. Estas no son otra cosa que cierto tipo de levantamiento de métricas de la variedad base al fibrado tangente. A los trabajos de Sasaki en 1958 y de Chegeer y Gromoll en 1972, donde se mostraron dos ejemplos clásicos de estas métricas, siguieron un gran número de artículos en donde se exhibieron más ejemplos y donde se estudió lo que tenían en común este tipo de construcciones. También por la decada de 1960 se empezó a estudiar la geometría del importante fibrado de bases LM y surgió naturalmente la idea de tratar de construir métricas sobre LM que provengan de una métrica de la variedad base. En esta dirección podemos mencionar, entre otros, los trabajos de Jensen [18], Mok [34], Cordero y De León [8], Kowalski y Sekizawa [26] y los más recientes, también de Kowalski y Sekizawa, [27] y [28].

Los super espacios son una generalización del fibrado de bases y resulta inmediato preguntarse cuales de las contrucciones que disponemos para el fibrado de bases pueden extenderse a este caso. Es decir, ¿Cómo podemos construir métricas en la variedad espacio de un super espacio utilizando métricas de la variedad base?, ¿Qué relación hay entre las geometrías de la variedad base y la variedad espacio dotada con una de estas métricas? Como dijimos, lejos de intentar dar una respuesta cerrada a estas preguntas, en lo que sigue del capítulo mostraremos algunas de estas métricas y las condiciones necesarias para poder realizar estas construciones.

4.1 Levantando Métricas Mediante una Conexión de Super Espacios.

Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre la variedad M dotado de una conexión ϕ. Supongamos que existe, como en la Proposición 2.118, un subespacio de $\mathfrak{o}$, que llamamos $\tilde{V}$, de la dimensión de los estabilizadores (supongamos que esta es $k-s$) que satisface que $\tilde{V} \cap T_eS_z = \{0\}$. Por ejemplo, esto se cumple trivialmente si el grupo O actua sin punto fijo. Luego, si los vectores $X_1, \ldots, X_{k-s}$ forman una base de $\tilde{V}$, los campos $V_i(z) = (\sigma_z)_{*_e}(X_i)$ para $i = (1, \ldots, k-s)$ trivializan la distribución vertical de λ. En este caso tenemos una base global para el tangente de N dada por $\{H_1(z), \ldots, H_n(z), V_1(z), \ldots, V_{k-s}(z)\}$ donde $H_i(z) = e_i^h(z)$. Recordemos que su base dual $\{\theta^1(z), \ldots, \theta^n(z), W^1(z), \ldots, W^k(z)\}$ está determinada por las 1-formas definidas por $\psi_{*z}(b) = \sum_{i=1}^{n} \theta^i(z)(b)e_i(z)$ y $\phi_z(b) = \sum_{j=1} W^j(z)(b)V_j(z)$.
Si G es una métrica sobre M, sea G^* la métrica Riemanniana sobre N definida por:

$$G^* = \psi^*(G) + \sum_{i=1}^{k-s} W^i \otimes W^i$$

Si la evaluamos en los campos $\{H_1(z), \ldots, H_n(z), V_1(z), \ldots, V_{k-s}(z)\}$ resulta que

$$G^*(H_i(z), H_j(z)) = G(e_i(z), e_j(z)) =^{\lambda} G_{ij}$$

$$G^*(H_i(z), V_j(z)) = 0$$

$$G^*(V_i(z), V_j(z)) = \delta_{ij}$$

Sobre la variedad espacio de λ podemos construirnos un nuevo super espacio $\beta = (N, Id, \{1\}, \cdot, \{H_i, V_j\})$, donde la variedad espacio es la misma N, la proyección es la identidad, el grupo es el que consiste sólo del elemento neutro, la acción es la trivial y las aplicaciones de referencia son los campos que trivializan el fibrado tangente de N y que mencionamos anteriormente. En esta situación, la representación matricial inducida por la métrica G^* con respecto a β es

$$^{\beta}G^* = \begin{pmatrix} ^{\lambda}G & 0 \\ 0 & Id_{k-s\times k-s} \end{pmatrix}$$

Observación 4.1 *G es $\lambda-$natural si y sólo si G^* es $\beta-$natural.*

Si X e Y son campos de M tales que los podemos escribir como $X(\psi(z)) = \sum_{i=1} x_i(z)e_i(z)$ y $Y(\psi(z)) = \sum_{i=1} y_i(z)e_i(z)$, entonces los levantamientos horizontales de estos campos son $X^h(z) = \sum_{i=1}^{n} x_i(z)H_i(z)$ e $Y^h(z) = \sum_{i=1}^{n} y_i(z)H_i(z)$. Si evaluamos la métrica G^* en los levantamientos horizontales de X e Y obtenemos que

$$G^*(X^h(z), Y^h(z)) = \sum_{i,j} x_i(z)y_j(z)G^*(H_i(z), H_j(z))$$

$$= \sum_{i,j} x_i(z)y_j(z)G(e_i(z), e_j(z)) = G(X(\psi(z)), Y(\psi(z)))$$

El diferencial de los difeomorfismos R_a son isometrías lineales en la distribución horizontal. Pues, si b_1 y b_2 son vectores horizontales en z entonces,

$$G^*((R_a)_{*_z}(b_1), (R_a)_{*_z}(b_2)) = G((\psi \circ R_a)_{*_z}(b_1), (\psi \circ R_a)_{*_z}(b_2)) = G^*(b_1, b_2)$$

Por otro lado, si a pertenece al conmutador de O, resulta que $(R_a)_{*_z}(V_i(z)) = (R_a \circ \sigma_z)_{*_e}(X_i) = V_i(z.a)$, con lo cual $R_a : N \longrightarrow N$ es una isometría.
Para la métrica G^* las distribuciones horizontales y verticales son ortogonales y por lo tanto, el subespacio horizontal con respecto a ψ coincide con el subespacio horizontal con respecto a la conexión ϕ. La proyección

$$\psi : (N, G^*) \longrightarrow (M, G)$$

es una submersión Riemanniana. Como vimos en el Capítulo 3, mediante la fórmula de O'Neill, podemos relacionar los tensores de curvatura de (N, G^*) y (M, G) por medio de

$$\begin{aligned} G(R(X,Y)Z,W) \circ \psi \quad &= G^*(R^*(X^h,Y^h)Z^h,W^h) + \tfrac{1}{4}G^*([Y^h,Z^h]^v,[X^h,W^h]^v) \\ &\quad -\tfrac{1}{4}G^*([X^h,Z^h]^v,[Y^h,W^h]^v) - \tfrac{1}{2}G^*([Z^h,W^h]^v,[X^h,Y^h]^v) \end{aligned}$$

, y si conocemos la expresión de los corchetes de Lie $[H_i, H_j]$ para $1 \leq i,j \leq n$ obtendremos una fórmula más explícita.

Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M. Supongamos que $\dim M = n$, $\dim O = k$ y $\dim S_z = s$ para todo $z \in N$ y supongamos también que N posee un marco global de campos tangentes $\{H_1, \ldots, H_{n+k-s}\}$ que satisfacen que

$$\psi_{*_z}(H_i(z)) = e_i(z) \qquad \text{si } 1 \leq i \leq n.$$
$$\psi_{*_z}(H_{n+j}) = 0 \qquad \text{si } 1 \leq j \leq k-s.$$

Por ejemplo, el super espacio dotado de una conexión que consideramos al principio de la sección tiene esta estructura.

Si tenemos una métrica G sobre M, en N definimos la métrica G^* como lo hicimos antes, es decir $G^* = \psi^*(G) + \sum_{j=1}^{k-s} H^{n+j} \otimes H^{n+j}$, donde ahora $\{H^i\}_{i=1}^{n+k-s}$ es la base dual de la base $\{H_i\}_{i=1}^{n+k-s}$.

Vamos a suponer que en la variedad M tenemos definidas dos distribuciones suaves complementarias que las notamos como $p \longrightarrow \mathcal{H}_p$ y $p \longrightarrow \mathcal{V}_p$ cuyas dimensiones son $\dim \mathcal{H}_p = r$ y $\dim \mathcal{V}_p = n - r$. Además, vamos a pedir que $\psi_{*_z}(< H_1, \ldots, H_r >) = \mathcal{H}_{\psi(z)}$ y $\psi_{*_z}(< H_r, \ldots, H_{n-r} >) = \mathcal{V}_{\psi(z)}$, es decir que $\{e_1(z), \ldots, e_r(z)\}$ generen $\mathcal{H}_{\psi(z)}$ y que $\{e_r(z), \ldots, e_n(z)\}$ generen $\mathcal{V}_{\psi(z)}$.

Un caso particular de esta situación es el que vimos en el Capítulo 3. La conexión de Levi-Civita induce naturalmente una distribución $\mathcal{H}_{\psi(z)}$ en el fibrado tangente que resulta complementeria a la distribución vertical inducida por la proyección canónica. En dicho capítulo, construímos un super espacio sobre el fibrado tangente de una variedad Riemanniana el cual posee un marco global de campos tangentes que satisfacen las propiedades que pedimos anteriormente.

Proposición 4.2 *Sea ∇^* la conexión de Levi-Civita de la métrica G^*. Si se satisface que:*

- $G^*(H_i, H_j) = \delta_{ij}$ *si* $1 \leq i, j \leq r$.
- $G^*(H_i, H_{r+j}) = 0$ *si* $1 \leq i \leq r$ *y* $1 \leq j \leq n - r$.
- $G^*(H_i, [H_j, H_l]) = 0$ *si* $1 \leq i, j, l \leq r$.
- $[H_i, H_{r+j}] = 0$ *si* $1 \leq i \leq r$ *y* $1 \leq j \leq n - r$.
- $[H_{r+j}, H_{r+l}] = 0$ *si* $1 \leq i \leq r$ *y* $1 \leq j, l \leq n - r$.

entonces las curvaturas seccionales de (N, G^*) *en los subespacios de la distribución* $\{H_1, \ldots, H_n\}$ *son:*

- *Para* $1 \leq i, j \leq r$*:*

$$K^*(H_i, H_j) = -\frac{3}{4}G^*([H_i, H_j], [H_i, H_j])$$

$$+\frac{1}{4}\Big\{G^*(H_i, [H_j, [H_i, H_j]]) + G^*(H_j, [[H_i, H_j], H_i])\Big\}$$

$$\frac{1}{2}\Big\{G^*(H_j, [\nabla^*_{H_i} H_j, H_i]) + G^*(H_i, [\nabla^*_{H_j} H_i, H_j])\Big\}$$

- *Para* $1 \leq i \neq j \leq n - r$*:*

$$K^*(H_{r+i}, H_{r+j}) = -\frac{1}{Q}\Big\{\frac{1}{4}\Big[H_{r+i}(H_{r+i}({}^{\lambda}G_{r+j\ r+j})) - H_{r+j}(H_{r+j}({}^{\lambda}G_{r+i\ r+i}))\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\Big[\nabla^*_{H_{r+j}} H_{r+i}({}^{\lambda}G_{r+j\ r+i}) - \nabla^*_{H_{r+i}} H_{r+i}({}^{\lambda}G_{r+j\ r+j})\Big]$$

$$+G^*(H_{r+j}, [\nabla^*_{H_{r+i}} H_{r+i}, H_{r+j}])$$

$$-\frac{1}{2}\Big[G^*(H_{r+i}, [\nabla^*_{H_{r+j}} H_{r+i}, H_{r+j}]) - G^*(H_{r+j}, [\nabla^*_{H_{r+j}} H_{r+i}, H_{r+i}])\Big]\Big\}$$

donde $Q(z) =^{\lambda} G_{r+i\ r+i}.{}^{\lambda}G_{r+j\ r+j} - ({}^{\lambda}G_{r+i\ r+j})^2$

- *Para* $1 \leq i \leq r$ *y* $1 \leq j \leq n - r$*:*

$$K^*(H_i, H_{r+j}) = -\frac{1}{{}^{\lambda}G_{r+j\ r+j}}\Big\{G^*(H_{r+j}, [\nabla^*_{H_i} H_i, H_{r+j}]) - \frac{1}{2}\nabla^*_{H_i} H_i({}^{\lambda}G_{r+j\ r+j})$$

$$+\frac{1}{2}\Big[G^*(H_{r+j}, [H_i, \nabla^*_{H_{r+j}} H_i]) + G^*(H_i, [H_{r+j}, \nabla^*_{H_{r+j}} H_i])\Big]\Big\}$$

Demostración: La proposición se deduce de la Demostración del Teorema 3.15, en particular del cálculo de las ecuaciones de tipo A, B y E. ▫

Observación 4.3 *Del Teorema 3.15 también podemos deducir las otras ecuaciones de curvatura. La proposición sigue valiendo para cualquier métrica* $\tilde{G}$ *sobre* N *que satisfaga las hipótesis, salvo que en las fórmulas de la curvatura seccional donde dice* ${}^{\lambda}G_{r+i\ r+j}$ *debemos cambiar por* $G^*(H_{r+i}, H_{r+j})$*.*

4.2 Una Conexión, Métricas de Sasaki-Mok en Super Espacios y sus Generalizaciones.

Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre M y ∇ una conexión afín sobre M. Sea $K : TTM \longrightarrow M$ la función de conexión inducida por ∇. Para $i = 1, \ldots, n$ consideramos las aplicaciones $K^i : TN \longrightarrow TM$ dadas por

$$K^i_z(b) = K\Big((e_i)_{*_z}(b)\Big)$$

Estas aplicaciones nos permiten definir una distribución sobre N dada por

$$H_z = \{b \in N_z : K^i_z(b) = 0 \text{ para } \ i = 1, \ldots, n\}$$

¿Esta distribución es complementaria de la distribución vertical?, es decir $N_z = H_z \oplus V_z$ para todo $z \in N$, ¿Es una distribución suave?, ¿Es invariante por la acción del grupo O?, En definitiva, ¿Resulta $z \longrightarrow H_z$ una conexión sobre λ?

Es sencillo ver que la distribución es invariante por la acción R. Pues si $b \in N_z$, tomamos una curva $c : I \longrightarrow N$ con $c(0) = z$ y $\dot{c}(0) = b$ y calculamos

$$K^i_{z.a}((R_a)_{*_z}(b)) = K((e_i \circ R_a)_{*_z}(b)) = K(D|_0(e_i(c(t).a))) = \sum_l L^l_i(a) K^l_z(b)$$

con lo cual, $(R_a)_{*_z}(H_z) \subseteq H_{z.a}$ y la igualdad se da por cuestión de dimensión. También resulta claro que $(R_a)_{*_z}(V_z) = V_{z.a}$.

Ahora, ¿Cómo son los vectores de $H_z \cap V_z$? Supongamos que $b \in H_z \cap V_z$, luego $K^i_z(b) = 0$ para $1 \leq i \leq n$ y $\psi_{*_z}(b) = 0$. Esto implica que $(e_i)_{*_z}(b) \in TM^h_{e_i(z)}$ y, como $\pi_{*_{e_i(z)}}((e_i)_{*_z}(b)) = (\pi \circ e_i)_{*_z}(b) = \psi_{*_z}(b) = 0$, también que $(e_i)_{*_z}(b) \in TM^v_{e_i(z)}$. Por lo tanto,

$$b \in H_z \cap V_z \text{ si y sólo si } (e_i)_{*_z}(b) = 0 \ \text{ para todo } 1 \leq i \leq n.$$

Si tomamos una carta (U, x) de M, con $\psi(z) = p \in U$, y calculamos las coordenadas de $(e_i)_{*_z}(b)$ con respecto a la carta inducida $(TU, \bar{x})$ tenemos que las primeras n coordenadas son $(e_i)_{*_z}(b)(\bar{x}^l) = b(x^l \circ \pi \circ e_i) = \psi_{*_z}(b)(x^l) = 0$. Dado que b es vertical, existe $X \in \mathfrak{o}$ tal que $b = (\sigma_z)_{*_e}(X)$. Entonces, $(e_i)_{*_z}(b)(\bar{x}^{n+l}) = D|_0(e_i(z. \exp(tX))(x^l)) = \sum_{r=1}^{n} e_r(z)(x^l)(L^r_i)_{*_e}(X)$. Por lo tanto, si $b \in V_z$, de la escritura local de $(e_i)_{*_z}(b)$ deducimos que

$$b \in H_z \text{ si y sólo si } \sum_{r=1}^{n} e_r(z)(x^l)(L^r_i)_{*_e}(X) = 0 \text{ para todo } \ 1 \leq i \leq n$$

Tenemos ejemplos en que $\ker(\sigma_z)_{*_e}$ está estrictamente incluído en $\ker L_{*e}$. Recordar el super espacio $\lambda = (LM \times GL(n), \psi, Gl(n), R, \{e_i, e_j^i\})$ sobre el fibrado de bases del Ejemplo 2.24. En este caso, $\ker L_{*e} = \mathbb{R}^{n\times n}$, pues el morfismo de cambio de bases es constantemente la matriz $Id_{n+n^2\times n+n^2}$, y $\ker(\sigma_z)_{*_e} = 0$. Luego, en un super espacio en el cual esta inclusión sea estricta, si tomamos $X \in \ker L_{*e}$ de modo que $X \notin \ker(\sigma_z)_{*_e}$, tenemos que $0 \neq b = (\sigma_z)_{*_e}(X) \in H_z \cap V_z$. Para que en la intersección se encuentre solamente el vector nulo es necesario que $\cap_{i=1}^n \ker(e_i)_{*_z} \cap V_z = 0$. En general, las distibuciones H_z y V_z no son complementarias.

Definición 4.4 *Sea $W \in M_p$ y sea $\psi(z) = p$. Decimos que W_z^h es el levantamiento horizontal de W en z si $W \in H_z$ y $\psi_{*_z}(W_z^h) = W$. Para cada $1 \leq i \leq n$, llamamos i-ésimo levantamiento vertical de W en z al vector vertical $W_z^{v(i)}$ que satisface que $K_z^j(W_z^{v(i)}) = \delta_{ij} W$.*

Observación 4.5 *Al no ser complementarias estas distribuciones no necesariamente estos levantamientos existen.*

Si $z \in N$, consideremos la aplicación lineal $F_z : N_z \longrightarrow M_{\psi(z)} \times \overbrace{M_{\psi(z)} \times \ldots \times M_{\psi(z)}}^{n\ veces}$ definida por $F_z(b) = (\psi_{*_z}(b), K_z^1(b), \ldots, K_z^n(b))$. Los levantamientos horizontales y verticales los podemos escribir con respecto a la aplicación F, si existen, como $W_z^h = F^{-1}(W, 0, \ldots, 0)$ y $W_z^{v(i)} = F^{-1}(0, \ldots, 0, \overbrace{W}^{lugar\ i+1}, 0, \ldots, 0)$. Si F es suryectiva tendremos todos los levantamientos.

Proposición 4.6 *Son equivalentes:*

i) F_z es inyectiva y $(M_{\psi(z)} \times 0 \times \ldots \times 0) \in Img\ F_z$

ii) $N_z = H_z \oplus V_z$.

Demostración: Supongamos cierto i). Entonces si $b \in H_z \cap V_z$ tenemos que $F_z(b) = 0$, con lo cual $b = 0$. Por otro lado, sea $\tilde{b} = F^{-1}(\psi_{*_z}(b), 0, \ldots, 0) \in N_z$. Podemos escribir $b = \tilde{b} + b - \tilde{b}$ y es fácil ver que $b - \tilde{b} \in V_z$ y $\tilde{b} \in H_z$.

Si vale que $N_z = H_z \oplus V_z$, entonces F_z es inyectiva pues $H_z \cap V_z = 0$. Dado $v \in M_{\psi(z)}$, como $\psi_{*_z} : N_z \longrightarrow M_{\psi(z)}$ es suryectiva, sea $\tilde{b}$ tal que $\psi_{*_z}(\tilde{b}) = v$. Si escribimos $\tilde{b} = \tilde{b}^h + \tilde{b}^v$, entonces $F(\tilde{b}^h) = (\psi_{*_z}(b), 0, \ldots, 0)$. ▫

Observación 4.7 *Que F sea inyectiva y que $(0, M_{\psi(z)}, \ldots, M_{\psi(z)}) \in Img(F)$ también implica que $N_z = H_z \oplus V_z$. Pues, así como en la proposición anterior tenemos la descomposición $b = \overbrace{b - b_1}^{V_z} + \overbrace{b_1}^{H_z}$, donde $b_1 = F^{-1}(\psi_{*_z}(b), 0, \ldots, 0)$, en este caso podemos descomponer $b = \overbrace{b - b_2}^{H_z} + \overbrace{b_2}^{V_z}$, donde $b_2 = F^{-1}(0, K_z^1(b), \ldots, K_z^n(b))$.*

Observación 4.8 *En particular, si F_z es un isomorfismo, los levantamientos horizontal y verticales existen y las distribuciones H_z y V_z son complementarias. De la Proposición 2.43 sabemos que una condición necesaria para F sea un isomorfismo es que $(\dim M)^2 = \dim O - \dim S_z$.*

Ejemplo 4.9 *Si $\lambda = (LM, \pi, GL(n), \cdot, \{\pi_i\})$ es el super espacio sobre M inducido por el fibrado de bases. La aplicación F inducida por una conexión afín ∇ de M resulta un isomorfismo.*

Proposición 4.10 *Sea λ un super espacio sobre M y ∇ una conexión afín sobre M. Si la aplicación F es inyectiva y $(M_{\psi(z)} \times 0 \times \ldots \times 0) \in Img\ F_z$ entonces, la distribución $z \longrightarrow H_z$ es una conexión de super espacios.*

Demostración: Ya comentamos que la distribución es invariante por la acción del grupo de λ y por lo visto en la Proposición 4.6 también resulta complementaria a la distribución vertical. Con lo cual, sólo hace falta ver que es una distribución suave. Si consideramos los campos $H_i(z) = F^{-1}(e_i(z), 0, \ldots, 0)$ con $1 \leq i \leq n$, podemos ver fácilmente que estos generan la distribución H_z. La proyección ψ es una submersión y el diferencial de una submersión también lo es. Por lo tanto, como $\psi_{*_z}(H_i(z)) = e_i(z)$ es una aplicación diferenciable, resulta que los campos H_i son diferenciables. □

Como ya hemos mencionamos, en lo que sigue construíremos unas métricas sobre la variedad espacio de un super espacio basándonos en las métricas de Sasaki-Mok que fueron definidas para el fibrado de bases, ver [8] y [34].

Sea G una métrica sobre M, ∇ su conexión de Levi-Civita y K la función de conexión de esta. Consideremos el tensor simétrico de tipo $(0, 2)$ sobre N dado por

$$\tilde{G}(A, B) = c(z)G(\psi_{*_z}(A), \psi_{*_z}(B)) + \sum_{i=1}^{n} l_i(z)G(K^i(A), K^i(B))$$

donde $c, l_i : N \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ son funciones diferenciables positivas. En el caso que $H_z \cap V_z = 0$ (F es inyectiva), $\tilde{G}$ resulta una métrica Riemanniana sobre la variedad espacio de λ. Si λ es el super espacio inducido por el fibrado de bases y $c = 1$ y $l_i = 1$ para todo i, la métrica $\tilde{G}$ no es otra que la métrica de Sasaki-Mok. Si tenemos levantamientos horizontales y verticales podemos caracterizar la métrica $\tilde{G}$ como aquella que satisface que:

- $\tilde{G}(X_z^h, Y_z^h) = c(z)G(\psi(z))(X, Y)$.
- $\tilde{G}(X^h, Y^{v(i)}) = 0$.
- $\tilde{G}(X_z^{v(i)}, Y_z^{v(j)}) = \delta_{ij} l_i(z) G(\psi(z))(X, Y)$.

Supongamos que existen los levantamientos horizontales y verticales y estos resultan únicos, lo que es equivalente a que F sea biyectiva ó que $H_z \cap V_z = 0$ y que existan dichos levantamientos. En ese caso, si $X(\psi(z)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\psi(z))e_i(z)$ e $Y(\psi(z)) = \sum_{i=1}^{n} Y_i(\psi(z))e_i(z)$ definimos el tensor $\bar{G}$ como:

- $\bar{G}(X^h, Y^h) = \sum_{i,j} cG\Big(e_i(z), e_j(z)\Big) X_i(\psi(z)) Y_j(\psi(z))$.
- $\bar{G}(X^h, Y^{v(s)}) = \sum_{i,j} c^s G\Big(e_i(z), e_j(z)\Big) X_i(\psi(z)) Y_j(\psi(z))$.
- $\bar{G}(X^{v(r)}, Y^{v(s)}) = \sum_{i,j} c^{rs} G\Big(e_i(z), e_j(z)\Big) X_i(\psi(z)) Y_j(\psi(z))$.

donde c, c^s y $c^{rs} = c^{sr}$ son constantes. Si $c = 1$, $c^s = 0$ para todo $s = (1, \ldots, n)$ y $c^{rs} = \delta_{rs}$, entonces $\bar{G}$ coincide con la métrica de Sasaki-Mok para el super espacio λ.

Si F es un isomorfismo, sea el super espacio $\beta = (N, id_N, \{1\}, \cdot, \{(e_i(z))^h, (e_j(z))_z^{v(i)}\})$ sobre la variedad espacio de λ, cuyo grupo es el que consta solamente del elemento unidad, la acción es la trivial y las aplicaciones de referencia son los levantamientos horizontales y verticales de las aplicaciones de referencia de λ ordenados de la siguiente manera: $\{(e_1(z))_z^h, \ldots (e_n(z))_z^h, (e_1(z))_z^{v(1)}, \ldots, (e_n(z))_z^{v(1)}, \ldots, (e_1(z))_z^{v(n)},$

$, \ldots, (e_n(z))_z^{v(n)}\}$. Luego, la aplicación matricial inducida por la métrica de Sasaki-Mok con respecto a β es

$$^{\beta}\tilde{G}(z) = \begin{pmatrix} [^{\lambda}G] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [^{\lambda}G] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & [^{\lambda}G] \end{pmatrix}$$

con lo cual observamos que la métrica de Sasaki-Mok es β-natural si y sólo si G es λ-natural.

Podemos dar una versión más general del tensor $\bar{G}$. Definimos $\hat{G}$ como:

- $\hat{G}(X^h, Y^h) = \sum_{i,j} \rho_{ij}\Big([G(e_l(z), e_k(z))]_{lk}\Big) X_i(\psi(z)) Y_j(\psi(z))$.
- $\hat{G}(X^h, Y^{v(s)}) = \sum_{i,j} \rho_{ij}^{s}\Big([G(e_l(z), e_k(z))]_{lk}\Big) X_i(\psi(z)) Y_j(\psi(z))$.
- $\hat{G}(X^{v(r)}, Y^{v(s)}) = \sum_{i,j} \rho_{ij}^{rs}\Big([G(e_l(z), e_k(z))]_{lk}\Big) X_i(\psi(z)) Y_j(\psi(z))$.

donde ρ_{ij}, ρ_{ij}^{s} y ρ_{ij}^{rs} son funciones diferenciables de la variedad de las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{n\times n}$ a $\mathbb{R}$.

Sea $\lambda = (LM, \pi, GL(n), \cdot, \{\pi_i\})$ el super espacio inducido por el fibrado de bases de una variedad M. Sea G una métrica sobre M y consideremos los levantamientos horizontales y verticales inducidos por la conexión de Levi-Civita de G. Kowalski y Sekizawa probaron en [26], ver también [27] y [28], que si $\hat{G}$ es una métrica semi-Riemanniana sobre LM, posiblemente degenerada, que proviene de un operador natural de segundo orden de la métrica G, entonces $\hat{G}$ es, para una elección adecuada de las funciones ρ_{ij}, ρ_{ij}^{s} y ρ_{ij}^{rs}, como mencionamos arriba. Si $\beta = (O(M) \times GL(n), \psi, R, \{e_i\})$ es el super espacio del Ejemplo 2.25, luego, recordar la Observación 2.122, estas métricas sobre LM son β-naturales con respecto a LM.

Veamos otra métrica que podemos contruir en la variedad espacio de un super espacio. Sea $\lambda = (N, \psi, O, R, \{e_i\})$ un super espacio sobre una variedad Riemanniana (M, G) y $K^i : N \longrightarrow TM$ las aplicaciones inducidas por la conexión de Levi-Civita de G. Si $f : N \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}$ es una función diferenciable, consideremos el tensor simétrico de tipo $(0,2)$ sobre N dado por:

$$\bar{G}(z)(A,B) = G(\psi(z))\Big(\psi_{*_z}(A), \psi_{*_z}(B)\Big) + \frac{1}{1+f(z)}\Big[\sum_{i=1}^{n} G(\psi(z))\Big(K^i(A), K^i(B)\Big)$$

$$+\sum_{i=1}^{n} G(\psi(z))\Big(K^i(A), e_i(z)\Big).G(\psi(z))\Big(K^i(B), e_i(z)\Big)\Big]$$

Si la intersección entre las distribuciones verticales y horizontales es $H_z \cap V_z = 0$ para todo $z \in N$, entonces $\bar{G}$ es una métrica Riemanniana. Notar el parecido que el tensor $\bar{G}$ tiene con la métrica de Cheeger-Gromoll.

Apéndice

En este apéndice definiremos objetos y mencionaremos, muy rápidamente, algunos resultados de la geometría natural y de la teoría de los invariantes diferenciales que pueden ser útil a quien no este familiarizado con estas. Si bien, este trabajo no utiliza ni esta teoría, ni el enfoque clásico de la geometría natural, este apartado apunta a darnos una idea sobre el lenguaje en el que están escritos los primeros trabajos sobre el tema ([25] y [26]). Para una versión más extendida y un tratamiento más riguroso y preciso de estos temas ver [30], [31] y [23].

Sea $\mathcal{M}_n$ la categoría de las variedades diferenciables de dimensión n, cuyos morfismos son difeomorfismos locales, y $\mathcal{FM}_n$ la categoría de fibraciones con morfismos de fibrados sobre difeomorfismos locales. Un *funtor natural* es un funtor entre las categorías $\mathcal{M}_n$ y $\mathcal{FM}_n$, tal que si M es una variedad diferenciable, FM es una fibración con base M. Además, si $f : M \longrightarrow N$ es un morfismo de $\mathcal{M}_n$ entonces, $F(f) : FM \longrightarrow FN$ debe ser un morfismo de fibrados sobre f cuya restricción a las fibras resulta un difeomorfismo.

Sea F un funtor natural. Decimos que F es de orden r, si este es el mínimo número, mayor o igual que cero, que satisface que si $f, g : M \longrightarrow N$ son difeomorfismos locales tales que $j^r_p(f) = j^r_p(g)$ (ver [23]), entonces $F(f)|_{F_pM} = F(g)|_{F_pM}$.

Sea F un funtor natural de orden r. Luego, $F(\mathbb{R}^n)$ es una fibración con base $\mathbb{R}^n$. Se llama *fibra estándar de* F a $F_0(\mathbb{R}^n)$, es decir a la fibra correspondiente al punto 0. No es difícil ver que si M es una variedad diferenciable de dimensión n y $p \in M$, entonces $F_0(\mathbb{R}^n)$ y $F_p(M)$ son difeomorfas.

Notaremos como G^r_n al grupo $J^r_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)_0$. Por ejemplo, $G^1_k = GL(k)$ es el grupo de las matrices inversibles de $\mathbb{R}^{k\times k}$. El grupo G^r_n actua naturalmente sobre la fibra estándar de F. Sea $[f] = j^r_0(f) \in G^r_n$, luego para un representante f de la clase

$j_0^r(f)$ tenemos que

$$\begin{tikzcd} F(\mathbb{R}^n) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d] & F(\mathbb{R}^n) \arrow[d] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

y si $\xi \in F_0(\mathbb{R}^n)$ entonces la acción queda determinada por $j_0^r(f).\xi = F(f)(\xi)$. La buena definición de esta acción se sigue de que el orden de F es r.

Sea $S_k = \{\phi : R^k \longrightarrow M : \text{diferenciable}\}$. Dado $r \geq 0$, tenemos definida en el espacio S_k una relación de equivalencia dada por: $\phi \sim_r \varphi$ si y sólo si $D^\alpha(f \circ \phi) = D^\alpha(f \circ \alpha)$, donde $\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, con $\alpha_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \leq r$. El cociente $J_k^r(M) = S_k / \sim_r$ se llama el espacio de Jets (r, k). Este, tiene estructura de variedad diferenciable, y con la proyección natural resulta una fibración sobre M. Por ejemplo, $J_1^1(M)$ es el fibrado tangente de M y $J_n^1(M)$ es el fibrado de bases LM.

Con F^r designaremos el funtor natural de orden r dado por $M \longrightarrow F^r(M) = J_n^r(M)$, es decir

$$\begin{tikzcd} J_n^r(M) \arrow[r, "F^r(f)"] \arrow[d] & J_n^r(N) \arrow[d] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

donde $F^r(f)(j_n^r(\phi)) = j_n^r(f \circ \phi)$.

Sea P un G_n^r espacio, es decir P es una variedad diferenciable en la cual el grupo G_n^r actua a izquierda. Dado P un G_n^r espacio, consideremos el funtor $M \longrightarrow F_P^r(M)$ dado por $F_P^r(M) = F^r(M) \times_{G_n^r} P$, que es el fibrado asociado a la fibración $F^r(M)$. Es fácil ver que $F_P^r(M)$ es una fibración de fibra P. Por ejemplo, $TM = F_{\mathbb{R}^n}^1(M) = F^1(M) \times_{G_n^1} \mathbb{R}^n = LM \times_{GL(n)} \mathbb{R}^n$. La siguiente caracterización de los funtores naturales corresponde a Krupka [30]:

Teorema A.1: Sea F un funtor natural de orden r, entonces si $M \in \mathcal{M}_n$ resulta que

- $F(M) = F_{F_0}^r = F^r(M) \times_{G_n^r} F_0$.
- $F(f) = [F^r(f), Id_{F_0}]$, es decir $F(f)([j_n^r(\phi), \xi]) = [F^r(f)(j_n^r(\phi)), \xi]$.

Si F_1 y F_2 son dos funtores naturales, una *transformación natural* entre estos es una aplicación A de modo que $A_M : F_1(M) \longrightarrow F_2(M)$ es un morfismo sobre la función identidad de M que satisface que dado un morfismo de la categoría $f : M \longrightarrow N$

$$F_2(f) \circ A_M = A_N \circ F_1(f)$$

Sean F_1 y F_2 dos funtores naturales y notemos con $\mathcal{S}(F_iM)$ las secciones diferenciables de la fibración (F_iM).

$$\begin{tikzcd}
& F_i(M) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d] & F_i(N) \arrow[d] \\
M \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, "Id_M"] & M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

Una aplicación $H : \mathcal{S}(F_1M) \longrightarrow \mathcal{S}(F_2M)$, es un *operador natural* si $H_N f^*(\sigma) = f^*(H_M(\sigma))$ para toda $f : M \longrightarrow N$ y $\sigma \in \mathcal{S}(F_1M)$. Si $\sigma \in \mathcal{S}(F_iM)$, $f^*\sigma$ es la sección de $F_i(N)$ dada por $f^*\sigma = F_i(f) \circ \sigma \circ f^{-1}$. También para que H sea un operador natural este debe cumplir que $H|_U(\sigma|_U) = H(\sigma)|_U$ para $U \subseteq M$ subvariedad y además exigimos que toda familia suavemente parametrizada de secciones de $F_1(M)$ se transforme vía H en una familia suavemente parametrizada de secciones de $F_2(M)$. Decimos que el operador es de orden k, si $j^k(\sigma_1) = j^k(\sigma_2)$ implica que $H(\sigma_1) = H(\sigma_2)$.

Para dar una mejor idea, con respecto al primer requerimiento, si A es una transformación natural entre los funtores F_1 y F_2, tenemos que

$$\begin{tikzcd}
& F_2(M) \arrow[rr, "F_2(f)"] \arrow[dd] & & F_2(N) \arrow[dd] \\
F_1(M) \arrow[ur, "A_M"] \arrow[rr, "F_1(f)"] \arrow[dd] & & F_1(N) \arrow[ur, "A_N"] \arrow[dd] & \\
& M \arrow[rr, "f"] & & N \\
M \arrow[ur, "Id"] \arrow[rr, "f"] & & N \arrow[ur, "Id"] &
\end{tikzcd}$$

se debe satisfacer que $A_N(F_1(f) \circ \sigma \circ f^{-1}) = F_2(f) \circ A_M \circ \sigma \circ f^{-1}$.

Dados P y Q dos G_n^r espacios, decimos que una aplicación $h : P \longrightarrow Q$ es un *r-invariante diferencial* si $h(j^r(\phi).z) = j^r(\phi).h(z)$ para todo $j^r(\phi) \in G_n^r$.

Si F_1 y F_2 son dos funtores naturales de orden r, sean $P = (F_1)_0$ y $Q = (F_2)_0$ las fibras estándar. Como sabemos, ambas son G_n^r espacios y gracias al Teorema A.1

tenemos que dado $M \in \mathcal{M}_n$, $F_1(M) = F^r(M) \times_{G_n^r} P$ y $F_2(M) = F^r(M) \times_{G_n^r} Q$. Sea $h : P \longrightarrow Q$ un invariante diferencial, veamos como podemos inducir una tranformación natural T entre estos funtores:

$$\text{Si } [z,\xi] \in F^r(M) \times_{G_n^r} P, \text{ definimos } T_M([z,\xi]) = [z, h(\xi)] \in F^r(M) \times_{G_n^r} Q$$

Kruka [30] probó, y este es el hecho que subyace en el Teorema A.2, que efectivamente, la relación anterior de invariantes diferenciables y transformaciones naturales, es una relación biunívoca.

El siguiente teorema es fundamental en la teoría de los invariantes diferenciales y es el que permite el enfoque de los trabajos [25] y [26], pues todo problema de caracterización en el que intervengan operadores naturales entre funtores naturales se traduce a un problema de invariantes diferenciales entre las fibras estándar.

Teorema A.2: (Krupka [30]) Hay una correspondencia biunívoca entre los operadores naturales de orden k entre dos funtores naturales y las aplicaciones k-invariantes entre sus fibras estándar.

Una *F-métrica derivada de g* es un morfismo $\zeta : TM \oplus TM \oplus TM \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ lineal en la segunda y tercera coordenada, no necesariamente simétrica, y cuya expresión es [25]:

- Si $\dim M = 2$ y ζ es simétrica, entonces ξ es

  $$\begin{aligned}\zeta(u,X,Y) &= \alpha(|u|^2)g(X,Y) + \beta(|u|^2)g(X,u)g(Y,u) \\ &+\gamma(|u|^2)\Big[g(X,u)g(Y,Ju) + g(Y,u)g(X,Ju)\Big]\end{aligned}$$

  Si ζ es antisimétrica, entonces es de la forma

  $$\zeta(u,X,Y) = \delta(|u|^2)\Big[g(X,u)g(Y,Ju) - g(Y,u)g(X,Ju)\Big]$$

- Si $\dim M \geq 3$ y ζ es simétrica

  $$\zeta(u,X,Y) = \alpha(|u|^2)g(X,Y) + \beta(|u|^2)g(X,u)g(Y,u)$$

  Si $\dim M = 3$ y ζ es antisimétrica (para dimensiones mayores no hay antisimétricas), entonces es de la forma

  $$\zeta(u,X,Y) = \rho(|u|^2)g(X \times Y, u)$$

  donde α, β y δ son funciones diferenciables y J es una estructura casi compleja de (M,g).

Cualquier métrica sobre M es una F-métrica simétrica independiente del primer parámetro.

Si X^h e Y^v es el levantamiento horizontal y vertical respectivamente inducidos por la conexión de Levi-Civita de g, podemos describir los levantamientos clásicos de la siguiente manera:

El levantamiento de Sasaki o diagonal de una *F-métrica* ζ es el que está dado por:

- $\zeta^s_u(X^h, Y^h) = \zeta(u, X, Y)$.
- $\zeta^s_u(X^h, Y^v) = 0 = \zeta^s_u(X^v, Y^h)$.
- $\zeta^s_u(X^v, Y^v) = \zeta(u, X, Y)$.

El levantamiento horizontal está definido por:

- $\zeta^h_u(X^h, Y^h) = 0 = \zeta^h_u(X^v, Y^v)$.
- $\zeta^h_u(X^h, Y^v) = \zeta^h_u(Y, X)$ y $\zeta^h_u(X^v, Y^h) = \zeta^h_u(X, Y)$.

El levantamiento vertical está definido por:

- $\zeta^v_u(X^h, Y^h) = \zeta(u, X, Y)$.
- $\zeta^v_u(X^h, Y^v) = 0 = \zeta^v_u(Y^v, X^h) = \zeta^v_u(X^v, Y^v)$.

Por ejemplo, si ζ es la métrica g, entonces el levantamiento de Sasaki de g es la métrica de Sasaki, de ahí el nombre de este levantamiento.

Referencias

[1] M. Abbassi and M. Sarih, *On some hereditary properties of Riemannian g-natural metrics on tangent bundles of Riemannian manifolds*, Differential Geom. Appl., **22**, (2005), 1:19-47.

[2] J. Araujo and G.R. Keilhauer, *Natural tensor field of type (0,2) on the tangent and cotangent bundle of a semi-Riemannian manifold*, Acta Univ. Palacki. Olomuc., Fac. rer. nat. Mathematica **39**, (2000), 7-16.

[3] K. Aso, *Notes on some properties of the sectional curvature of the tangent bundle*, Yokohama Math. J., **29**, (1981), 1-5.

[4] J. K. Beem and P. E. Ehrlich, *Global Lorentzian geometry*, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, Inc. (1981)

[5] W. M. Boothby, *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, Inc. New York (1975).

[6] M.C. Calvo and G.R. Keilhauer, *Tensor field of type (0,2) on the tangent bundle of a Riemannian manifold*, Geometriae Dedicata **71**, (1998), 209-219.

[7] J. Cheeger and D. Gromoll, *On the structure of complete manifolds of non-negative curvature*, Annals of Mathematics. Second Series, **96**, (1972), 413-443.

[8] L.A. Cordero and M. De León, *On the curvature of the induced Riemannian metric on the frame bundle of a Riemannian manifold*, J. Math. Pures Appl. (9), **65**, (1986), 1: 81-91.

[9] J. Dieudonné, *Elementos de análisis*, Tomo III, Editorial Reverté,S.A. (1983).

[10] J. Dieudonné, *Elementos de análisis*, Tomo IV, Editorial Reverté,S.A. (1983).

[11] M. Do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro (1988).

[12] P. Dombrowski, *On the geometry of the tangent bundle*, J. Reine Angew. Math., **210**, (1962), 73-88.

[13] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko and S.P. Novikov, *Modern geometry, methods and applications. Part II, The geometry and topology of manifolds.* Graduate Texts in Mathematics, 104. Springer-Verlag, New York, 430 pp (1985).

[14] D. Gromoll, W. Klingenberg and W. Meyer, *Riemannsche geometrie im großen* , Springer, Lecture notes in math. 55 (1968).

[15] S. Gudmundsson and E. Kappos, *On the geometry of the tangent bundle with the Cheeger-Gromoll metric*, Tokyo J. Math. **25**, (2002), 1:75-83.

[16] K. Hasegawa, *Certain metrics on a principal fiber bundle and variational problems*, SUT Journal of Mathematics, **33**, (1997), 2:239-255.

[17] G. Henry, *Tensores naturales de tipo (0,2) en el fibrado unitario tangente con aplicaciones al espacio de geodésicas*, Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires (2003).

[18] G. Jensen, *Einstein metrics on principal fibre bundles*, J. Differential Geometry, **8**, (1973), 599-614.

[19] W. Klingenberg, *Riemannian geometry*, Springer, Berlin; New York: de Gruyter (1982).

[20] A. W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction* , Progress in Mathematics, **140**, Second Edition, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, (2002).

[21] E. Kappos, *Natural metrics on tangent bundles*, Master's thesis 2001:E10. Lund University.

[22] G.R. Keilhauer, *Tensor field of type (0,2) on linear frame bundles and cotangent bundles*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, (2000), 103:51-64.

[23] I. Kolar, P. Michor and J. Slovak, *Natural operations in differential geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 434 pp, (1993).

[24] O. Kowalski, *Curvature of the induced Riemannian metric on the tangent bundle of a Riemannian manifold*, J. Reine Angew.Math. **250**, (1971), 124-129.

[25] O. Kowalski and M. Sekisawa, *Natural transformation of Riemannian metrics on manifolds to metrics on tangent bundles- a classification*. Bull Tokyo Gakugei. Univ. **4**, (1988), 1-29.

[26] O. Kowalski and M. Sekisawa, *Natural transformation of Riemannian metrics on manifolds to metrics on linear frame bundles- a classification*. Differential Geometry and its Applications. Proceedings of the Conference, August 24-30, 1986 , Brno, Czechoslovakia, 149-178.

[27] O. Kowalski and M. Sekizawa, *On curvatures of linear frame bundles with naturally lifted metrics*, Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino, **63**, (2005), 3:283-295.

[28] O. Kowalski and M. Sekizawa, *Invariance of g-natural metrics on linear frame bundles*, Arch. Math. (Brno), **44**, (2008), 2:139-147.

[29] O. Kowalski and M. Sekizawa, *On the geometry of orthonormal frame bundles II*, Ann. Global Anal. Geom., **33**, (2008), 4:357-371.

[30] D. Krupka, *Elementary theory of differential invariants*, Arch. Math. (Brno), **14**, (1978), 4:207-214.

[31] D. Krupka and J. Janyska, *Lectures on differential invariants*, Folia Facultatis Scientiarum Naturalium Universitatis Purkynianae Brunensis. Mathematica, **1**, University J. E. Purkyně, Brno, (1990), 195pp.

[32] P. Michor, *Gauge theory for fibers bundles*, Extended version of a series of lectures held at the Institute of Physics of the University of Napoli, (1988).

[33] J. Milnor, *Curvatures of lef invariant metrics on Lie groups*, Advances in Mathematics, **21**, (1976), 293-329.

[34] K.P. Mok, *On the differential geometry of frame bundles of Riemannian manifolds*, J. Reine Angew. Math., **302**, (1978), 16-31.

[35] S. Morita, *Geometry of differential forms*, Translation of Mathematical Monographs, 201, AMS, (2001).

[36] E. Musso and F. Tricerri, *Riemannian metrics on the tangent bundles*, Ann. Mat. Pura. Appl.(4) , **150**, (1988), 1-19.

[37] T. Okubo, *On the differential geometry of frame bundles*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **72**, (1966), 29-44.

[38] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J., **13**, (1966), 459-469.

[39] P. Piccione and D. Tausk, *The theory of connections and G-structures: Applications to Affine and Isometric Immersions*, IMPA, Rio de Janeiro (2006).

[40] S. Sasaki, *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*, Tohoku Math. J. Second Series, **10**, (1958), 338-354.

[41] M. Sekizawa, *Curvatures of the tangent bundles with Cheeger-Gromoll metric*, Tokyo J. Math, **14** (1991), 2:407-417.

[42] Spivak, *A Comprehensive introduction to differential geometry*, Vol. II, Publish or Perish, Inc., Berkeley (1979).