UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

RESOLUCIÓN EFICIENTE DE CIERTOS SISTEMAS NO LINEALES DERIVADOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Ezequiel Dratman

Director de tesis: Guillermo Matera.
Consejero de estudios: Joos Heintz.

Buenos Aires, 2010

RESOLUCIÓN EFICIENTE DE CIERTOS SISTEMAS NO LINEALES DERIVADOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

En este trabajo estudiamos las soluciones estacionarias positivas de una discretización estándar, por medio de diferencias finitas, de la ecuación del calor semilineal con condiciones de borde no lineales de tipo Neumann. Demostramos que, si la difusión es suficientemente grande o suficientemente chica, en comparación con el flujo en los bordes, entonces existe una única solución de dicha discretización. Esta solución aproxima la única solución estacionaria positiva de la ecuación "continua". Además, exhibimos un algoritmo que calcula una ε-aproximación de dicha solución mediante métodos de continuación. El costo de nuestro algoritmo es *lineal* en el número de nodos involucrados en la discretización y el logaritmo del número de dígitos de aproximación requeridos. En los casos restantes probamos que existen soluciones espurias. Estos resultados nos permiten obtener el panorama global de la comparación entre las soluciones estacionarias del problema diferencial en consideración y su discretización.

Palabras clave: Problemas de frontera, diferencias finitas, condición de borde de tipo Neumann, soluciones estacionarias, continuación homotópica, resolución de sistemas no lineales, número de condición, complejidad algorítmica.

EFFICIENT SOLUTION OF CERTAIN NONLINEAR SYSTEMS DERIVED FROM DIFFERENTIAL EQUATIONS

We study the positive stationary solutions of a standard finite-difference discretization of the semilinear heat equation with nonlinear Neumann boundary conditions. We prove that, if the diffusion is large enough or small enough, compared with the flux in the boundary, there exists a unique solution of such a discretization, which approximates the unique positive stationary solution of the "continuous" equation. Furthermore, we exhibit an algorithm computing an ε-approximation of such a solution by means of a homotopy continuation method. The cost of our algorithm is *linear* in the number of nodes involved in the discretization and the logarithm of the number of digits of approximation required. In the remaining cases we prove that there exist spurious solutions. From these results we obtain a complete outlook of the comparison between the stationary solutions of the differential problem under consideration and its discretization.

Keywords: Two-point boundary-value problem, finite differences, Neumann boundary condition, stationary solution, homotopy continuation, nonlinear system solving, condition number, complexity.

Agradecimientos

Agradezco a Guillermo Matera, por confiar en mi durante los últimos diez años y hacer posible que llegara a está instancia en mi carrera.

A Luis Miguel Pardo, Julio Rossi y Gabriel Acosta, por aceptar ser jurados de mi tesis.

A Joos Heintz, por su visión crítica de la ciencia.

A Nino, por ser el hermano mayor.

A Mariano y Luciano, los amigos que me soportan en la oficina.

A Santiago, Andres, Ezequiel, Tico, Eda, Melina, Mariana, Nardo, Cristian y Martín, por acompañarme y brindarme su amistad.

A mis padres que me dieron todas las oportunidades para poder llegar.

A Melina Mazzini, mi amiga y compañera de la vida, por soportar mis altibajos, por estar siempre al pie del cañón, por quererme y por darme dos hermosos hijos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Numerosos problemas científicos y técnicos requieren la solución de sistemas de ecuaciones no lineales (ver [OR70] o [Mor90]). A fin de resolver estos problemas, usualmente se consideran las siguientes preguntas:

(*i*) ¿Existen soluciones en un subconjunto específico de $\mathbb{R}^n$?

(*ii*) ¿Cuántas soluciones hay en dicho conjunto?

(*iii*) ¿Cuánto valen aproximadamente?

En este trabajo estudiamos sistemas de ecuaciones no lineales que provienen de una discretización de ciertas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con términos no lineales de difusión y reacción (ver [Rhe98]). La solución de una ecuación diferencial de este tipo generalmente requiere la construcción de aproximaciones de dimensión finita. Es razonable esperar que estas discretizaciones hereden la no linealidad existente en la ecuación diferencial original. Así, las soluciones del problema discreto se representan por medio de un sistema de ecuaciones no lineales.

Más precisamente, estudiamos la ecuación del calor semilineal con condiciones de borde tipo Neumann, es decir, dadas funciones g_1 y g_2 de clase $\mathcal{C}^3$ en $\mathbb{R}$ y analíticas en $x = 0$, consideramos el siguiente problema en $[0,1] \times [0,T) \subset \mathbb{R}^2$:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_t & = & u_{xx} - g_1(u) & \text{en } (0,1) \times [0,T), \\ u_x(1,t) & = & \alpha g_2(u(1,t)) & \text{en } [0,T), \\ u_x(0,t) & = & 0 & \text{en } [0,T), \\ u(x,0) & = & u_0(x) \geq 0 & \text{en } [0,1], \end{array} \right. \tag{1.1}$$

con $\alpha > 0$. Este tipo de ecuaciones modelan muchos fenómenos de la física, biología e ingeniería, como la conducción del calor (ver, por ejemplo, [Can84, §20.3], [Pao92, §1.1]), reacciones químicas y combustión (ver, por ejemplo, [BE89, §5.5], [Gri96, §1.7]), crecimiento y migración de poblaciones (ver, por ejemplo, [Mur02, Chapter 13], [Pao92, §1.1]), etc. En particular, la siguiente ecuación

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u^p & \text{en } (0,1) \times [0,T), \\ u_x(1,t) = \alpha u(1,t)^q & \text{en } [0,T), \\ u_x(0,t) = 0 & \text{en } [0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & \text{en } [0,1], \end{cases} \tag{1.2}$$

donde $p, q \geq 2$ son números naturales, constituye un prototipo de nolinealidades polinomiales sin singularidades (ver, por ejemplo, [BE89, §5.5], [GK04, Chapter 7], [Lev90], [SGKM95], [Pao92, §1.1]). Usaremos estas ecuaciones para ejemplificar nuestros resultados, por lo que haremos referencia a ellas reiteradamente a lo largo del trabajo.

Existen numerosos trabajos donde se estudia el comportamiento a lo largo del tiempo de las soluciones de (1.1) (ver, por ejemplo, [CFQ91], [GMW93], [Qui93], [Ros98], [BR01], [RT01], [AMTR02], [CQ04]). Con el objetivo de describir el comportamiento dinámico de las soluciones de (1.1) usualmente se estudia el comportamiento de las *soluciones estacionarias correspondientes* (ver, por ejemplo, [BR01], [CFQ91]), es decir, las soluciones positivas del siguiente problema de frontera:

$$\begin{cases} u_{xx} = g_1(u) & \text{en } (0,1), \\ u_x(1) = \alpha g_2(u(1)), \\ u_x(0) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

En el caso particular de la ecuación (1.2), las soluciones estacionarias son las soluciones positivas de

$$\begin{cases} u_{xx} = u^p & \text{en } (0,1), \\ u_x(1) = \alpha u^q(1), \\ u_x(0) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

En [CFQ91] se realiza un estudio completo del número de soluciones de (1.4) en función de p y q. En dicho trabajo los autores demuestran que

- para $p > 2q - 1$ existe una solución de (1.4),
- para $q \leq p \leq 2q - 1$ pueden existir cero, una o dos soluciones de (1.4),
- para $p < q$ existe una solución de (1.4).

El método usualmente utilizado para aproximar numéricamente las soluciones de (1.1) y (1.3) consiste en considerar una discretización por medio de diferencias finitas de segundo orden en la variable x, utilizando una malla uniforme (ver, por ejemplo, [BB98]). A partir de esta semi-discretización en espacio obtenemos el siguiente problema de valores iniciales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_1' & = & \frac{2}{h^2}(u_2-u_1)-g_1(u_1), \\ u_k' & = & \frac{1}{h^2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})-g_1(u_k), \quad (2\le k\le n-1) \\ u_n' & = & \frac{2}{h^2}(u_{n-1}-u_n)-g_1(u_n)+\frac{2\alpha}{h}g_2(u_n), \\ u_k(0) & = & u_0(x_k), \qquad (1\le k\le n) \end{array}\right. \tag{1.5}$$

donde $h := 1/(n-1)$ y $x_1,\dots,x_n$ definen una partición uniforme del intervalo $[0,1]$. En el análisis del comportamiento dinámico de las soluciones positivas de (1.5) nuevamente es necesario considerar las soluciones estacionarias de (1.5), es decir, las n-uplas $(u_1,\dots,u_n)\in(\mathbb{R}_{>0})^n$ que satisfacen las siguientes relaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & \frac{2}{(h)^2}(u_2-u_1)-g_1(u_1), \\ 0 & = & \frac{1}{(h)^2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})-g_1(u_k), \quad (2\le k\le n-1) \\ 0 & = & \frac{2}{(h)^2}(u_{n-1}-u_n)-g_1(u_n)+\frac{2\alpha}{h}g_2(u_n). \end{array}\right. \tag{1.6}$$

Se conoce muy poco sobre la comparación entre las soluciones estacionarias de (1.3) y (1.6). En el trabajo [BR01] se demuestra que existen soluciones *espurias* del sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & \frac{2}{h^2}(u_2-u_1)-u_1^p, \\ 0 & = & \frac{1}{h^2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1})-u_k^p, \quad (2\le k\le n-1) \\ 0 & = & \frac{2}{h^2}(u_{n-1}-u_n)-u_n^p+\frac{2\alpha}{h}u_n^q, \end{array}\right. \tag{1.7}$$

para $q<p<2q-1$, esto es, soluciones positivas de (1.7) que no convergen a ninguna solución de (1.4) cuando el tamaño de la malla h tiende a cero.

En [DM09] y [Dra10] se presenta un estudio completo de (1.7), para $p>2q-1$ y $p<q$ respectivamente. En estos artículos se muestra que en esos casos existe exactamente una solución real positiva, y se proponen algoritmos numéricos que resuelven una instancia dada del problema que consideramos con $n^{O(1)}$ operaciones. En particular, el algoritmo de [Dra10] tiene costo *lineal* en n, es decir, se aproxima numéricamente la solución deseada con $O(n)$ operaciones.

Observamos que la subfamilia de sistemas (1.7) tiene típicamente una cantidad exponencial $O(p^n)$ de soluciones *complejas* ([DDM05]), y en consecuencia está mal condicionada desde el punto de vista de su resolución por los llamados algoritmos universales robustos (ver [Par00], [CGH$^+$03], [DMW09]). Por ejemplo, se obtienen algoritmos de este tipo al utilizar métodos de continuación generales (ver, por ejemplo, [AG90]). Esto muestra la necesidad de diseñar algoritmos específicos para calcular las soluciones positivas de sistemas "estructurados" como (1.6).

Existen numerosos trabajos donde se utilizan métodos de continuación para la aproximación de soluciones reales de sistemas no lineales derivados de la discretización de ecuaciones diferenciales de segundo orden asociadas a problemas de frontera (ver, por ejemplo, [ABSW06], [Duv90], [Wat80]). Estos artículos usualmente se concentran en problemas con condiciones de frontera tipo Dirichlet que involucran ecuaciones de la forma $u_{xx} = f(x, u, u_x)$ para los que la existencia y unicidad de las soluciones es conocida. Generalmente, en dichos trabajos se demuestra la existencia de una curva homotópica sin tener en cuenta el costo del algoritmo de continuación subyacente, por lo que no resultan adecuados para abordar la resolución del sistema (1.6). Por otro lado, vale la pena mencionar el análisis de [Kac02] de la complejidad de los métodos de disparo ("shooting") para problemas de frontera.

En este trabajo de tesis, utilizando las ideas de los trabajos [BR01], [DM09], [DMW09] y [Dra10], estudiamos la existencia y unicidad de las soluciones positivas del sistema (1.6), y las aproximamos utilizando algoritmos basados en métodos de homotopía. Pedimos que g_1 y g_2 sean funciones analíticas en $x = 0$ tales que $g_i(0) = 0$, $g_i'(x) > 0$, $g_i''(x) > 0$ y $g_i'''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$ con $i = 1, 2$, condiciones que se desprenden naturalmente de la generalización de las funciones monomiales presentes en el sistema (1.7). Asimismo, la generalización de los casos presentes en dichos artículos se traduce en condiciones de monotonía de las funciones $g := g_1/g_2$ y $G := G_1/g_2^2$, donde G_1 es la primitiva de g_1 que cumple $G_1(0) = 0$.

En la primera parte del trabajo, Capítulos 2–4, mostramos la importancia de las soluciones estacionarias de (1.5) en el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de (1.1), estudiamos la existencia y unicidad de las soluciones positivas de (1.6), y estimamos dichas soluciones en los casos que sea posible. Más precisamente, en el Capítulo 2 demostramos que las soluciones del sistema discreto (1.5) convergen a las soluciones del problema de frontera (1.1) en cualquier intervalo donde éstas estén definidas. Asimismo, demostramos que toda solución discreta globalmente acotada converge a una solución estacionaria. En el Capítulo 3 encontramos cotas para las soluciones positivas de (1.6) que serán de gran utilidad en los capítulos siguientes, en especial en el desarrollo del algoritmo que aproxima las soluciones correspondientes. En este capítulo consideramos el correlato discreto de ciertas identidades que cumplen las soluciones de la ecuación (1.3). Concluyendo esta parte del trabajo, en el Capítulo 4 demostramos la existencia y unicidad de soluciones positivas de (1.6) en los siguientes casos

- g es una función constante en $\mathbb{R}_{>0}$,
- g es una función estrictamente decreciente en $\mathbb{R}_{>0}$,
- G es una función estrictamente creciente en $\mathbb{R}_{>0}$.

Vemos que, en el sistema (1.7), estas condiciones son equivalentes a $p = q$, $p < q$ y $p > 2q-1$ respectivamente. Por lo tanto, tenemos una generalización de los resultados de existencia y unicidad de [DM09] y [Dra10]. Finalizando el

Capítulo 4 demostramos la existencia de *soluciones espurias* para el sistema (1.6) cuando g es una función estrictamente creciente y G es una función estrictamente decreciente, generalizando los resultados de [BR01] para el caso $q < p < 2q - 1$ en el contexto del sistema (1.7).

En la segunda parte del trabajo, Capítulos 5–7, estudiamos el condicionamiento simbólico y numérico del cálculo de las soluciones positivas de (1.6) y presentamos un algoritmo numérico para aproximarlas. En el Capítulo 5 suponemos que las funciones g_1 y g_2 son polinomios, es decir, trabajamos con una subfamilia de sistemas polinomiales de (1.6). En estas condiciones, siguiendo [DMW09], demostramos que un algoritmo universal robusto que calcula polinomios minimales de proyecciones lineales genéricas de dichos sistemas tiene complejidad de orden $D^{\Omega(1)}$, donde D es el número de Bézout del sistema de entrada. Este resultado es independiente de la representación de la salida en consideración, aunque el tamaño de la constante subyacente a la notación Ω depende de la representación. En particular, si se usa la habitual representación densa o rala de polinomios multivariados, entonces la complejidad del correspondiente algoritmo es de orden $\Omega(D)$, en tanto que si la representación es por medio de cálculos de evaluación (straight–line programs), la cota inferior es de orden $\Omega(D^{1/2})$. Por lo tanto, demostramos que los sistemas que estamos estudiando están mal condicionados desde el punto de vista simbólico. En contraposición, en el Capítulo 6 consideramos una curva homotópica determinada por la homotopía que obtenemos al considerar (1.6) como una familia de sistemas parametrizada por α para la aproximación numérica de las soluciones reales positivas de (1.6) y obtenemos estimaciones sobre su número de condición. Dichas estimaciones son del orden $O(1)$, de lo que deducimos que la familia de sistemas que queremos resolver está bien condicionada desde el punto de vista numérico. A partir de este resultado de buen condicionamiento numérico, en el Capítulo 7 obtenemos un algoritmo que calcula una ε-aproximación de la solución positiva de (1.6) en el caso en el que g es una función estrictamente decreciente y en el caso en que G es una función estrictamente creciente. Este algoritmo es un método de continuación que recorre la curva real positiva, con un costo de $O(n \log\log\varepsilon)$ operaciones aritméticas.

Capítulo 2

Discretización y convergencia

Sea α una constante positiva. Tal como se planteó en la introducción, vamos a considerar el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_t &= u_{xx} - g_1(u) & \text{en } (0,1)\times[0,T), \\ u_x(1,t) &= \alpha g_2(u)(1,t) & \text{en } [0,T), \\ u_x(0,t) &= 0 & \text{en } [0,T), \\ u(x,0) &= u_0(x) \geq 0 & \text{en } [0,1], \end{cases} \tag{2.1}$$

donde g_1 y g_2 son funciones de clase $\mathcal{C}^3$ en $\mathbb{R}$ y analíticas en $x=0$ tales que $g_i(0)=0$, $g_i'(x)>0$, $g_i''(x)>0$ y $g_i'''(x)\geq 0$ para todo $x>0$ con $i=1,2$. Además, u_0 verifica la siguiente "condición de compatibilidad":

$$u_0'(1) = \alpha g_2(u_0)(1),\ u_0'(0)=0.$$

Más precisamente, vamos a considerar el comportamiento de las soluciones positivas de una (semi)discretización en espacio de la ecuación (2.1). Para esto, fijamos una malla uniforme $x_1 := 0, x_2, \ldots, x_n := 1$ en $[0,1]$. Sea $u_k(t) := u(x_k,t)$ para todo $t\in[0,T)$ y $k=1,\ldots,n$, y sea $h:=(n-1)^{-1}$. En tal caso, siguiendo un esquema de diferencias finitas de segundo orden, tenemos las siguientes estimaciones:

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{2}{h^2}\big(u_2(t)-u_1(t)\big) - g_1(u_1)(t) + O(h^2), \\ u_k'(t) = \frac{1}{h^2}\big(u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)\big) - g_1(u_k)(t) + O(h^2),\ (2\leq k\leq n-1), \\ u_n'(t) = \frac{2}{h^2}\big(u_{n-1}(t) - u_n(t)\big) + \frac{2}{h}\alpha g_2(u_n)(t) - g_1(u_n)(t) + O(h^2), \end{cases} \tag{2.2}$$

donde la constante implicada en la notación "O" no depende de h (ver por ejemplo [SF73]).

Consideramos entonces la siguiente versión (semi)discreta de la ecuación (2.1):

$$\begin{cases} u_1'(t) &=& \frac{2}{h^2}\big(u_2(t)-u_1(t)\big)-g_1(u_1)(t), & \\ u_k'(t) &=& \frac{1}{h^2}\big(u_{k+1}(t)-2u_k(t)+u_{k-1}(t)\big)-g_1(u_k)(t), & (2\le k\le n-1), \\ u_n'(t) &=& \frac{2}{h^2}\big(u_{n-1}(t)-u_n(t)\big)+\frac{2}{h}\alpha g_2(u_n)(t)-g_1(u_n)(t), & \\ u_k(0) &=& u_0(x_k) & (1\le k\le n). \end{cases} \tag{2.3}$$

En las siguientes secciones demostramos que las soluciones del sistema (2.3) convergen a las soluciones de (2.1), y vamos a discutir el papel de las soluciones estacionarias de (2.3) en la descripción del comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (2.3).

2.1. Convergencia de las soluciones discretas

Comenzamos demostrando la convergencia de las soluciones de la ecuación (2.3) a las de la ecuación (2.1).

Sea $\mathcal{F} := (f_1,\dots,f_n) : (\mathbb{R}_{\ge 0})^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la función definida usando el lado derecho de las primeras n ecuaciones de (2.3). Sea $U := (u_1,\dots,u_n)$ un vector de funciones en $C^1([0,T])$. Entonces el problema de valores iniciales (2.3) puede expresarse abreviadamente como $U' = \mathcal{F}(U)$, $U(0) := U_0$, con $U_0 := (u_0(x_1),\dots,u_0(x_n))$.

Siguiendo, por ejemplo, [Smi95] or [Wal98], observamos que la función $\mathcal{F}$ es *cuasimonótona creciente* o de *tipo K*, es decir, f_i es creciente en la variable u_j para $i \ne j$.

Un problema de valores iniciales definido por una función cuasimonótona satisface un Principio de Comparación que se expresa usando super y subsoluciones. Recordamos que una *supersolución* de (2.3) es una solución $\overline{U} := (\overline{u}_1,\dots,\overline{u}_n)$ con coordenadas en $C^1([0,T])$ del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\overline{U}' \ge \mathcal{F}(\overline{U}),\ \overline{U}(0) \ge U_0,$$

donde el signo "$\ge$" se aplica coordenada a coordenada. Equivalentemente, una *subsolución* $\underline{U}$ de (2.3) es una solución del sistema de inecuaciones

$$\underline{U}' \le \mathcal{F}(\underline{U}),\ \underline{U}(0) \le U_0.$$

En estas condiciones, tenemos el siguiente Principio de comparación (ver, por ejemplo, [Wal98, Chapter III, §10]).

Lema 2.1 (Principio de Comparación) *Sea $\overline{U}$, U y $\underline{U}$ supersoluciones, soluciones y subsoluciones positivas de (2.3) respectivamente. Entonces*

$$\overline{U}(t) \ge U(t) \ge \underline{U}(t).$$

para todo $t \in [0, T]$.

Adaptando los métodos de [Wal70, §IV.35] (ver también [FGR02, Theorem 2.1] en un contexto similar al nuestro), obtenemos el siguiente resultado de convergencia.

Teorema 2.2 *Sean* $u(x,t) \in C^{4,1}([0,1] \times [0,\tau])$ *una solución positiva de (2.1) con* $\tau < T$ *y* $U(t) := \big(u_1(t), \dots, u_n(t)\big)$ *una solución de (2.3) con* $u_k(0) = u(x_k, 0)$ *para* $1 \leq k \leq n$. *Entonces existe una constante* $c > 0$, *que sólo depende de la norma infinito de* u *en* $C^{4,1}([0,1] \times [0,\tau])$, *tal que*

$$\max_{t\in[0,\tau]} \max_{1\leq k\leq n} |u(x_k,t) - u_k(t)| \leq ch^2,$$

para $h > 0$ *suficientemente chico.*

Demostración: Sea $v_k(t) := u(x_k, t)$ para $k = 1, \dots, n$. De (2.2) se deduce que existe una constante $c_1 > 0$, independiente de k y h, tal que

$$|u_{xx}(x_k,t) - \delta^2 v_k(t)| \leq c_1 h^2,$$

donde $\delta^2 v_k(t)$ es la aproximación por diferencias finitas de $u_{xx}(x_k, t)$ utilizada en (2.3) para $k = 1, \dots, n$, es decir,

$$\begin{array}{rcl}
\delta^2 v_1(t) & := & \frac{2}{h^2}\big(v_2(t) - v_1(t)\big), \\
\delta^2 v_k(t) & := & \frac{1}{h^2}\big(v_{k+1}(t) - 2v_k(t) + v_{k-1}(t)\big),\ (2 \leq k \leq n-1), \\
\delta^2 v_n(t) & := & \frac{2}{h^2}\big(v_{n-1}(t) - v_n(t)\big) + \frac{2}{h}\alpha g_2(v_n)(t).
\end{array}$$

Definimos $c_2 := \max\{\alpha g_2'(3c_0/2), 3/2\}$, $c_3 := 2c_2$ y $a := 2c_3^2 e^{c_3}$, donde c_0 es la norma infinito de u en $C([0,1] \times [0,\tau])$. Con el objetivo de demostrar el teorema, vamos a buscar cotas superiores e inferiores para U en función de $V(t) := \big(v_1(t), \dots, v_n(t)\big)$. Consideremos la supersolución $\overline{U} := (\overline{u}_1, \dots, \overline{u}_n)$ de (2.3) definida como

$$\overline{u}_k(t) := v_k(t) + \varrho_k(t),$$

donde $\varrho_k(t) := \varphi(t)(e^{c_3 x_k} - c_3 x_k)$ y φ es la solución del problema de valores iniciales

$$\varphi'(t) = a\varphi(t) + c_1 h^2, \quad \varphi(0) = 0,$$

es decir, $\varphi(t) := h^2(c_1/a)(e^{at} - 1)$.

Sea $f(x) := e^{c_3 x} - c_3 x$. Afirmamos que $\overline{U}$ es una supersolución de (2.3). En efecto, la función f cumple que $1 \leq f(x_1) \leq \dots \leq f(x_n)$. Entonces

$$\begin{array}{rcl}
\overline{u}_k'(t) & = & v_k'(t) + \varphi'(t) f(x_k) \\
& = & u_{xx}(x_k,t) - g_1(v_k)(t) + a\varphi(t) f(x_k) + c_1 h^2 f(x_k) \\
& \geq & u_{xx}(x_k,t) + c_1 h^2 - g_1(v_k)(t) + a\varphi(t) f(x_k) \\
& \geq & \delta^2 v_k(t) - g_1(v_k)(t) + a\varphi(t) f(x_k),
\end{array}$$

para $1 \leq k \leq n$. Dado que $-g_1(v_k)(t) \geq -g_1(\overline{u}_k)(t)$ para $1 \leq k \leq n$, concluimos que la afirmación es verdadera si se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}
&\varphi(t)\big(af(x_1) - \tfrac{2}{h^2}(f(x_2) - f(x_1))\big) \geq 0,\\
&\varphi(t)\big(af(x_k) - \tfrac{1}{h^2}(f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1}))\big) \geq 0, \quad (2 \leq k \leq n)\\
&\varphi(t)\big(af(x_n) + \tfrac{2}{h^2}(f(x_n) - f(x_{n-1}))\big) - \tfrac{2}{h}\alpha(g_2(\overline{u}_n)(t) - g_2(v_n)(t)) \geq 0.
\end{aligned}$$

Fijemos $2 \leq k \leq n-1$. Del polinomio de Taylor de grado dos de f en un entorno de x_k y de la definición de a, inferimos que existe $\xi_1 \in (x_{k-1}, x_{k+1})$ tal que

$$f(x_{k+1}) - 2f(x_k) + f(x_{k-1}) = h^2 f''(\xi_1) \leq h^2 c_3^2 e^{c_3} \leq af(x_k)h^2.$$

Para $k = 1$, usando el Teorema del valor medio,

$$f(x_2) - f(x_1) = hf'(\xi_2) = hc_3(e^{c_3\xi_2} - 1) \leq h^2 c_3^2 e^{c_3} \leq af(x_1)\frac{h^2}{2},$$

con $\xi_2 \in (x_1, x_2)$. Finalmente, como $\overline{u}_n(t) \leq 3c_0/2$ para h suficientemente chico, observamos que existe $\xi_3(t) \in (v_n(t), \overline{u}_n(t))$ tal que

$$g_2(\overline{u}_n)(t) - g_2(v_n)(t) = g_2'(\xi_3)(t)\varrho_n(t) \leq c_2\varrho_n(t)/\alpha$$

para h suficientemente chico. Teniendo en cuenta que $af(x_n) \geq 0$, deducimos la desigualdad

$$\begin{aligned}
\varphi(t)\big(af(x_n) + \frac{2}{h^2}(f(x_n) - f(x_{n-1}))\big) - \frac{2}{h}\alpha(g_2(\overline{u}_n)(t) - g_2(v_n)(t)) \geq\\
\geq \varphi(t)\frac{2}{h}\big(f'(\xi_4) - c_2 f(x_n)\big)
\end{aligned}$$

con $\xi_4 \in (x_{n-1}, x_n)$. Dado que $e^{-c_3h} \geq \frac{1}{2}$ para h suficientemente chico, concluimos que

$$f'(\xi_4) - c_2 f(x_n) \geq f'(x_{n-1}) - c_2 f(x_n) = 2c_2\big(e^{c_3}(e^{-c_3h} - 1/2) + (c_2 - 1)\big) \geq 0.$$

Con esta última desigualdad queda demostrada la afirmación.

El hecho de que

$$\underline{U}(t) := (\underline{u}_1(t), \cdots, \underline{u}_n(t)) := (v_1(t) - \varrho_1(t), \cdots, v_n(t) - \varrho_n(t))$$

es una subsolución de (2.3) para $h > 0$ suficientemente chico se demuestra de forma similar. Usando la comparación del Lema 2.1 deducimos que

$$|u(x_k, t) - u_k(t)| \leq \varrho(x_k, t) \leq ch^2$$

se cumple para todo $t \in [0, \tau]$ y $1 \leq k \leq n$. Esto finaliza la demostración del teorema. ∎

2.2. Comportamiento asintótico de las soluciones discretas

En la sección anterior demostramos la convergencia de las soluciones positivas de (2.3) a las soluciones de (2.1). En esta sección vamos a discutir el comportamiento asintótico de las soluciones de (2.3) en términos de las soluciones estacionarias de (2.3), es decir, las soluciones positivas del siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcll} 0 & = & \frac{2}{h^2}\big(u_2(t)-u_1(t)\big)-g_1(u_1)(t), & \\ 0 & = & \frac{1}{h^2}\big(u_{k+1}(t)-2u_k(t)+u_{k-1}(t)\big)-g_1(u_k)(t), & (2\leq k\leq n-1), \\ 0 & = & \frac{2}{h^2}\big(u_{n-1}(t)-u_n(t)\big)+\frac{2}{h}\alpha g_2(u_n)(t)-g_1(u_n)(t). & \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Con el fin de analizar el comportamiento asintótico de las soluciones de (2.3), observamos que el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$U' = \mathcal{F}(U) \tag{2.5}$$

determina un sistema dinámico *cuasimonótono tridiagonal* sobre $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$, es decir, si $\mathcal{F} := (f_1, \ldots, f_n)$, entonces $\partial f_i/\partial u_j = 0$ si $|i-j| \geq 2$. Para este tipo de sistemas dinámicos, tenemos el siguiente resultado ([Smi84]; ver también [FG99]).

Teorema 2.3 *Sea $U' = \mathcal{F}(U)$ un sistema dinámico cuasimonótono tridiagonal. Entonces cada trayectoria converge a un estado de equilibrio.*

En particular, en el caso del sistema dinámico $U' = \mathcal{F}(U)$ de (2.5), cuyos puntos de equilibrio son precisamente las soluciones positivas de (2.4), tenemos el siguiente corolario:

Corolario 2.4 *Sea $U : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ una solución positiva de (2.5) globalmente acotada. Entonces $U(t)$ converge a una solución estacionaria de (2.5) cuando t tiende a infinito.*

Capítulo 3

Soluciones estacionarias discretas: identidades y estimaciones

Sean $A, U_1, \ldots, U_n$ indeterminadas sobre $\mathbb{R}$. Sean g_1 y g_2 funciones de clase $\mathcal{C}^3$ en $\mathbb{R}$ y analíticas en $x = 0$ tales que $g_i(0) = 0$, $g_i'(x) > 0$, $g_i''(x) > 0$ y $g_i'''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$ con $i = 1, 2$. Como anunciamos en la introducción, en este capítulo buscamos estimaciones para las soluciones positivas de (1.6), esto es, para las soluciones positivas del sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & \big(U_2 - U_1\big) - \frac{h^2}{2} g_1(U_1), \\ 0 & = & \big(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}\big) - h^2 g_1(U_k), \qquad (2 \leq k \leq n-1), \\ 0 & = & \big(U_{n-1} - U_n\big) + hAg_2(U_n) - \frac{h^2}{2} g_1(U_n), \end{array} \right. \tag{3.1}$$

para $A = \alpha$ con $\alpha > 0$ dado, donde $h := 1/(n-1)$. Recordemos que, para cada valor $\alpha > 0$ de A, el sistema (3.1) corresponde a la discretización por diferencias finitas de segundo orden del siguiente problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} u_{xx} & = & g_1(u) & \text{en } (0,1), \\ u_x(1) & = & \alpha g_2(u(1)), & \\ u_x(0) & = & 0. & \end{array} \right. \tag{3.2}$$

Claramente el sistema (3.1) es una generalización del sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & -(U_2 - U_1) + \frac{h^2}{2} U_1^p, \\ 0 & = & -(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}) + h^2 U_k^p, \quad (2 \leq k \leq n-1) \\ 0 & = & -(U_{n-1} - U_n) + \frac{h^2}{2} U_n^p - AhU_n^q, \end{array} \right. \tag{3.3}$$

que utilizaremos a modo de ejemplo a lo largo del presente trabajo. Es más, de la misma forma que en (3.1), para cada valor $\alpha > 0$ de A el sistema (3.3) corresponde a la discretización por diferencias finitas del siguiente problema

$$\begin{cases} u_{xx} = u^p & \text{en } (0,1), \\ u_x(1) = \alpha u^q(1), & \\ u_x(0) = 0. & \end{cases} \tag{3.4}$$

Para simplificar los enunciados en las siguientes secciones, vamos a definir algunas funciones auxiliares.

Definición 3.1

- *Llamamos* $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *a la función* $g(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$.
- *Llamamos* $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a la función primitiva de* g_1 *que cumple* $G_1(0) = 0$.
- *Llamamos* $G : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *a la función* $G(x) := G_1(x)/g_2^2(x)$.

Notemos que, para el sistema (3.3), las funciones g, G_1 y G son las funciones polinomiales $g(x) := x^{p-q}$, $G_1(x) := x^{p+1}/(p+1)$ y $G(x) := x^{p+1-2q}$.

3.1. Primeras identidades e inecuaciones

Sean $A, U_1, \dots, U_n$ indeterminadas en $\mathbb{R}$. Definimos $U := (U_1, \dots, U_n)$ y notamos por $F : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a la función definida por el lado derecho de (3.1). De las ecuaciones de (3.1) vemos que, para un valor $U_1 = u_1$ positivo dado, los valores de $U_2, \dots, U_n$, A están unívocamente determinados y son positivos. Por lo tanto, dejando variar a U_1, podemos considerar a $U_2, \dots, U_n$, A como funciones de U_1. En efecto, podemos definirlas recursivamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} U_1(u_1) &:= u_1, \\ U_2(u_1) &:= u_1 + \tfrac{h^2}{2} g_1(u_1), \\ U_{k+1}(u_1) &:= 2U_k(u_1) - U_{k-1}(u_1) + h^2 g_1(U_k(u_1)), \quad (2 \le k \le n-1), \\ A(u_1) &:= \Big(\tfrac{1}{h}(U_n - U_{n-1})(u_1) + \tfrac{h}{2} g_1(U_n(u_1))\Big)/g_2(U_n(u_1)). \end{aligned} \tag{3.5}$$

En tal sentido, tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.2 *Sea* $u_1 > 0$. *Entonces, para* $2 \le k \le n$, *valen las siguientes afirmaciones:*

1. $(U_k - U_{k-1})(u_1) = h^2\Big(\frac{1}{2} g_1(u_1) + \sum_{j=2}^{k-1} g_1\big(U_j(u_1)\big)\Big) > 0$,
2. $U_k(u_1) = u_1 + h^2\Big(\frac{k-1}{2} g_1(u_1) + \sum_{j=2}^{k-1} (k-j) g_1\big(U_j(u_1)\big)\Big) > 0$,

3. $(U'_k - U'_{k-1})(u_1) = h^2\Big(\frac{1}{2}g'_1(u_1) + \sum_{j=2}^{k-1} g'_1\big(U_j(u_1)\big)U'_j(u_1)\Big) > 0,$

4. $U'_k(u_1) = 1 + h^2\Big(\frac{k-1}{2}g'_1(u_1) + \sum_{j=2}^{k-1}(k-j)g'_1\big(U_j(u_1)\big)U'_j(u_1)\Big) > 1.$

Demostración: Sea $k = 2$. Entonces, de (3.5), tenemos

$$U_2(u_1) = u_1 + h^2 g_1(u_1)/2,$$

$$U'_2(u_1) = 1 + h^2 g'_1(u_1)/2,$$

de donde deducimos inmediatamente las afirmaciones del enunciado para $k = 2$. Ahora, suponemos nuestro enunciado verdadero para $k \geq 2$ y argumentamos inductivamente. De (3.5) tenemos

$$(U_{k+1} - U_k)(u_1) = (U_k - U_{k-1})(u_1) + h^2 g_1(U_k(u_1)),$$

$$(U'_{k+1} - U'_k)(u_1) = (U'_k - U'_{k-1})(u_1) + h^2 g'_1(U_k(u_1))U'_k(u_1).$$

Combinando estas identidades con la hipótesis inductiva, deducimos que

$$(U_{k+1} - U_k)(u_1) = h^2\Big(g_1(u_1)/2 + \sum_{j=2}^{k} g_1\big(U_j(u_1)\big)\Big) > 0,$$

$$(U'_{k+1} - U'_k)(u_1) = h^2\Big(g'_1(u_1)/2 + \sum_{j=2}^{k} g'_1\big(U_j(u_1)\big)U'_j(u_1)\Big) > 0.$$

A partir de estas identidades, usando la hipótesis inductiva para las afirmaciones 2 y 4, concluimos que

$$U_{k+1}(u_1) = u_1 + h^2\Big(\frac{k}{2}g_1(u_1) + \sum_{j=2}^{k}(k+1-j)g_1\big(U_j(u_1)\big)\Big) > 0,$$

$$U'_{k+1}(u_1) = 1 + h^2\Big(\frac{k}{2}g'_1(u_1) + \sum_{j=2}^{k}(k+1-j)g'_1\big(U_j(u_1)\big)U'_j(u_1)\Big) > 1.$$

Así quedan demostradas las afirmaciones del enunciado para $k + 1$. ■

Ahora demostramos un resultado técnico que utilizamos en el próximo lema.

Observación 3.3 *Sean $f_1, f_2, f_3 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_{>0})$ funciones positivas tales que*

- $f'_i(x) > 0$ *para todo* $x > 0$ *y* $1 \leq i \leq 3$,
- $f''_1(x) > 0$ *para todo* $x > 0$,

- *$f_2(x) > f_3(x)$ para todo $x > 0$.*

Sea $F : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$F(x) := \frac{f_1\big(f_2(x)\big) - f_1\big(f_3(x)\big)}{f_2(x) - f_3(x)}.$$

Entonces $F'(x) > 0$ para todo $x > 0$.

Demostración: Derivando F obtenemos

$$\begin{aligned} F'(x)\big(f_2(x) - f_3(x)\big) &= \Big(f_1'\big(f_2(x)\big)f_2'(x) - f_1'\big(f_3(x)\big)f_3'(x)\Big) \\ &\quad -F(x)\big(f_2'(x) - f_3'(x)\big). \end{aligned}$$

Por el Teorema del valor medio, existe $\xi \in \big(f_3(x), f_2(x)\big)$ tal que $F(x) = f_1'(\xi)$. Combinando esta afirmación con la identidad anterior, deducimos que

$$F'(x)\big(f_2(x)-f_3(x)\big) = \Big(f_1'\big(f_2(x)\big)-f_1'(\xi)\Big)f_2'(x)+\Big(f_1'(\xi)-f_1'\big(f_3(x)\big)\Big)f_3'(x).$$

Como f_1' es estrictamente creciente, tenemos que $f_1'\big(f_2(x)\big) - f_1'(\xi) > 0$ y $f_1'(\xi) - f_1'\big(f_3(x)\big) > 0$. Además, por hipótesis, $f_2'(x) > 0$, $f_3'(x) > 0$ y $f_2(x) - f_3(x) > 0$ para $x > 0$. Por lo tanto, $F'(x) > 0$ para todo $x > 0$. ■

Ahora estamos en condiciones de demostrar el siguiente lema que utilizamos en las demostraciones de existencia y unicidad de las soluciones de (3.1).

Lema 3.4 *Sea $u_1 > 0$. Entonces, para $2 \leq k \leq n$, se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

1. $\left(\frac{U_k - U_{k-1}}{g_1(U_k)}\right)'(u_1) < 0$,

2. $\left(\frac{U_k - U_1}{g_1(U_k)}\right)'(u_1) < 0$,

3. $\left(\frac{U_k - U_{k-1}}{U_k - U_1}\right)'(u_1) \geq 0$,

4. $\left(\frac{g_1(U_k)}{g_1(U_1)}\right)'(u_1) > 0$.

Demostración: Notamos por $L_{j,i}(u_1)$ a la siguiente expresión:

$$L_{j,i}(u_1) := \frac{g_1(U_j) - g_1(U_i)}{U_j - U_i}(u_1),$$

donde $1 \leq i, j \leq n$ e $i \neq j$. Por la Observación 3.3 y el Lema 3.2, deducimos que

$$L'_{j,i}(u_1) = \Big(\frac{g_1(U_j) - g_1(U_i)}{U_j - U_i}\Big)'(u_1) > 0. \tag{3.6}$$

De las relaciones (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{U_2 - U_1}{g_1(U_2)}(u_1) &= \Big(\frac{2}{h^2} + L_{2,1}(u_1)\Big)^{-1}, \\ \frac{g_1(U_2)}{g_1(U_1)}(u_1) &= 1 + \frac{h^2}{2} L_{2,1}(u_1). \end{aligned}$$

Combinando estas identidades con (3.6) deducimos las afirmaciones del enunciado para $k = 2$. Ahora, supongamos que las afirmaciones son ciertas para $k \geq 2$. De las relaciones (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \Big(\frac{U_{k+1} - U_k}{U_{k+1} - U_1}\Big)(u_1) &= \Big(1 + \frac{U_k - U_1}{U_{k+1} - U_k}\Big)^{-1}(u_1) \\ &= \Big(1 + \Big(\frac{U_k - U_{k-1}}{U_k - U_1} + \frac{g_1(U_k)h^2}{U_k - U_1}\Big)^{-1}\Big)^{-1}(u_1). \end{aligned}$$

Aplicando la hipótesis inductiva queda demostrada la afirmación 3 para $k+1$. Por otro lado, del Lema 3.2 y de (3.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{U_{k+1} - U_k}{g_1(U_{k+1})}(u_1) &= \Big(\frac{g_1(U_k)}{U_{k+1} - U_k} + L_{k+1,k}\Big)^{-1}(u_1) \\ &= \Big(\Big(\frac{U_k - U_{k-1}}{g_1(U_k)} + h^2\Big)^{-1} + L_{k+1,k}\Big)^{-1}(u_1), \\ \frac{U_{k+1} - U_1}{g_1(U_{k+1})}(u_1) &= \Big(\frac{g_1(U_k)}{U_{k+1} - U_1} + L_{k+1,k}\frac{U_{k+1} - U_k}{U_{k+1} - U_1}\Big)^{-1}(u_1) \\ &= \Big(\Big(\frac{U_k - U_{k-1}}{g_1(U_k)} + \frac{U_k - U_1}{g_1(U_k)} + h^2\Big)^{-1} + L_{k+1,k}\frac{U_{k+1} - U_k}{U_{k+1} - U_1}\Big)^{-1}(u_1), \\ \frac{g_1(U_{k+1})}{g_1(U_1)}(u_1) &= \Big(L_{k+1,1}\frac{U_{k+1} - U_1}{g_1(U_1)}\Big)(u_1) + 1 \\ &= h^2\Big(L_{k+1,1}\Big(\frac{k-1}{2} + \sum_{j=2}^{k}(k-j)\frac{g_1(U_j)}{g_1(U_1)}\Big)\Big)(u_1) + 1. \end{aligned}$$

Combinando la hipótesis inductiva con 3.6 y la afirmación 3, para $k+1$, concluimos que las afirmaciones 1, 2 y 4 se cumplen para $k+1$. ∎

Finalmente, enunciamos el siguiente resultado de monotonía de las funciones de la Definición 3.1.

Lema 3.5 *Sean g, G y G_1 las funciones de la Definición 3.1. Si $x > 0$, entonces:*

1. $\left(\frac{g_1^2}{G_1}\right)'(x) > 0$.

2. *Si $G'(x) > 0$, entonces $g'(x) > 0$.*

3. *Si existe $d \in [0, 1)$ tal que $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' \geq 0$, entonces $G'(x) > 0$.*

Demostración: Como g_1 es una función positiva y estrictamente convexa en $\mathbb{R}_{>0}$ y $g_1(0) = 0$, tenemos que

$$\frac{g_1^2(x)}{2} = \int_0^x g_1(t)g_1'(t)dt < g_1'(x)\int_0^x g_1(t)dt = g_1'(x)G_1(x). \tag{3.7}$$

Multiplicando ambos lados por $g_1(x)$ y despejando obtenemos

$$\frac{g_1(x)}{G_1(x)} < \frac{2g_1(x)g_1'(x)}{g_1^2(x)},$$

de donde se deduce la afirmación 1.

Ahora supongamos que $G'(x) > 0$, entonces

$$\frac{2g_2(x)g_2'(x)}{g_2^2(x)} < \frac{g_1(x)}{G_1(x)}.$$

Combinando esta última desigualdad con la desigualdad (3.7) obtenemos

$$\frac{g_2'(x)}{g_2(x)} < \frac{g_1^2(x)}{2G_1(x)g_1'(x)}\frac{g_1'(x)}{g_1(x)} \leq \frac{g_1'(x)}{g_1(x)},$$

o equivalentemente, $g'(x) > 0$, lo que demuestra la afirmación 2.

Finalmente, suponiendo que se satisface la hipótesis de la afirmación 3 deducimos que

$$\begin{aligned} 0 \leq \big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' &= d\big(\ln(G_1(x))\big)' - \big(\ln(g_2^2(x))\big)' \\ &= \big(\ln(G_1(x))\big)'\Big(d - \frac{\big(\ln(g_2^2(x))\big)'}{\big(\ln(G_1(x))\big)'}\Big). \end{aligned}$$

Como $\big(\ln(G_1(x))\big)' = g_1(x)/G_1(x) > 0$, tenemos que

$$\frac{\big(\ln(g_2^2(x))\big)'}{\big(\ln(G_1(x))\big)'} \leq d < 1.$$

De la desigualdad anterior, obtenemos que

$$\frac{2g_2'(x)g_2(x)}{g_2^2(x)} = \big(\ln(g_2^2(x))\big)' < \big(\ln(G_1(x))\big)' = \frac{g_1(x)}{G_1(x)}, \tag{3.8}$$

que es equivalente a la condición $G'(x) > 0$. De esta forma queda demostrada la afirmación 3. ■

3.1.1. Analogías entre las soluciones discretas y continuas

Sea $u_k := U_k(u_1)$ para $2 \leq k \leq n$. El primer paso en el análisis de las soluciones positivas de (3.1) es la estimación de la versión discreta de la derivada de la solución u de (3.2). Multiplicando la identidad $u'' = g_1(u)$ por u' e integrando en el intervalo $[0, x]$ se deduce que

$$\frac{1}{2}u'(x)^2 = \int_0^x u'(s)u''(s)ds = \int_0^x u'(s)g_1(u(s))ds = G_1(u(x)) - G_1(u(0)) \tag{3.9}$$

vale para todo $x \in (0,1)$, donde G_1 es la función de la Definición 3.1. El siguiente resultado muestra que $\frac{1}{2}(\frac{u_m - u_{m-1}}{h})^2$, el análogo discreto de $\frac{1}{2}u'(x)^2$, se puede expresar como la regla de los trapecios aplicada a la integral $\int_0^x g_1(u(s))u'(s)ds$ más cierto término de error.

Lema 3.6 *Para todo $u_1 > 0$ y $2 \leq m \leq n$, tenemos:*

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(\frac{u_m - u_{m-1}}{h}\Big)^2 \quad &= \quad \sum_{k=1}^{m-1} \frac{g_1(u_{k+1}) + g_1(u_k)}{2}(u_{k+1} - u_k) \\ &\quad -\frac{g_1(u_1)}{4}(u_2 - u_1) - \frac{g_1(u_m)}{2}(u_m - u_{m-1}).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Demostración: Fijemos $u_1 > 0$ y $2 \leq m \leq n$. Para $m = 2$ el enunciado vale por la definición de $U_2(u_1)$ en (3.5). Si $m > 2$, entonces, de (3.5), deducimos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{2(u_2 - u_1)}{h^2} \quad &= \quad g_1(u_1), \\ \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2} \quad &= \quad g_1(u_k), \quad (2 \leq k \leq m-1).\end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por $(u_2 - u_1)/4h$ y la k-ésima ecuación por $(u_{k+1} - u_{k-1})/2h$, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h}\Big(\frac{u_2 - u_1}{h}\Big)^2 &= \frac{1}{4}\Big(\frac{u_2 - u_1}{h}\Big)g_1(u_1), \\ \frac{1}{2h}\Big(\Big(\frac{u_{k+1} - u_k}{h}\Big)^2 - \Big(\frac{u_k - u_{k-1}}{h}\Big)^2\Big) &= \frac{1}{2}\Big(\frac{u_{k+1} - u_k}{h} + \frac{u_k - u_{k-1}}{h}\Big)g_1(u_k),\end{aligned}$$

para $2 \leq k \leq m-1$. Notemos que $(u_{k+1} - u_{k-1})/2h$ es la aproximación centrada de $u'((k-1)h)$ para $2 \leq k \leq m-1$. Multiplicando estas ecuaciones por h y sumándolas, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Big(\frac{u_m - u_{m-1}}{h}\Big)^2 &= \frac{g_1(u_1)}{4}(u_2 - u_1) + \sum_{k=2}^{m-1} \frac{g_1(u_k)}{2}(u_{k+1} - u_k + u_k - u_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{g_1(u_k) + g_1(u_{k+1})}{2}(u_{k+1} - u_k) - \frac{g_1(u_1)}{4}(u_2 - u_1) \\ &\qquad - \frac{g_1(u_m)}{2}(u_m - u_{m-1}).\end{aligned}$$

De esta forma queda demostrado el lema. ■

Sustituyendo x por 1 en (3.9) obtenemos la siguiente identidad (ver [CFQ91, §3]):

$$\frac{1}{2}\alpha^2 g_2^2(u(1)) = G_1(u(1)) - G_1(u(0)). \tag{3.11}$$

A partir de esta identidad se puede expresar a $u(1)$ en función de $\nu_0 := u(0)$. En ciertos casos $u(1)$ queda unívocamente determinado; por ejemplo, en el contexto del sistema (3.4), la identidad (3.11) es la siguiente:

$$\frac{1}{2}\alpha^2 u^{2q}(1) = \frac{u^{p+1}}{p+1}(1) - \frac{u^{p+1}}{p+1}(0). \tag{3.12}$$

Aplicando de la regla de los signos de Descartes a (3.12) deducimos que existe un único valor positivo para $u(1)$ para cada valor fijo de $u(0)$ cuando $p+1 > 2q$.

La identidad (3.11) permite reescribir (3.2) como el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} u_{xx} &= g_1(v) \quad \text{in } (0,1), \\ u(0) &= \nu_0, \\ u_x(0) &= 0, \end{cases}$$

donde $\nu_0 > 0$ es una solución de la ecuación $u_x(1) = \alpha g_2(f(\nu_0))$. Nuestra intención es obtener un análogo discreto de esta identidad, que será importante para determinar cotas de los valores de la coordenada u_1 de las soluciones positivas de (3.1).

Sea $(\alpha, u) := (\alpha, u_1, \ldots, u_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (3.1). De la última ecuación de (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Big(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\Big)^2 &= \frac{1}{2}\Big(\alpha g_2(u_n) - \frac{h}{2} g_1(u_n)\Big)^2 \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2 g_2^2(u_n) + \frac{h}{2} g_1(u_n)\Big(\frac{h}{2} g_1(u_n) - \alpha g_2(u_n)\Big) - \frac{h^2}{8} g_1^2(u_n) \\ &= \frac{1}{2}\alpha^2 g_2^2(u_n) - \frac{h}{2} g_1(u_n)\Big(\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\Big) - \frac{h^2}{8} g_1^2(u_n). \end{aligned}$$

Combinando esta igualdad con el Lema 3.6 obtenemos

$$\frac{1}{2}\alpha^2 g_2^2(u_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g_1(u_k) + g_1(u_{k+1})}{2}(u_{k+1} - u_k) - \frac{g_1(u_1)}{4}(u_2 - u_1) + \frac{h^2}{8} g_1^2(u_n).$$

Usando la identidad $g_1(u_1)(u_2 - u_1) = \frac{h^2}{2} g_1^2(u_1)$, deducimos la siguiente igualdad:

$$\frac{1}{2}\alpha^2 g_2^2(u_n) - \big(G_1(u_n) - G_1(u_1)\big) = E + \frac{h^2}{8}\big(g_1^2(u_n) - g_1^2(u_1)\big),$$

donde G_1 es la función de la Definición 3.1 y E se define de la siguiente forma:

$$E := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g_1(u_k) + g_1(u_{k+1})}{2}(u_{k+1} - u_k) - \big(G_1(u_n) - G_1(u_1)\big). \tag{3.13}$$

Claramente E es el error de aproximación de la integral de la función g_1 por la regla de trapecios compuesta en el intervalo $[u_1, u_n]$, considerando la subdivisión de $[u_1, u_n]$ definida por los nodos $u_1, , \ldots, u_n$. Teniendo en cuenta que g_1 es una función convexa en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, deducimos que $E \geq 0$. Por lo tanto, de las consideraciones anteriores deducimos la siguiente proposición, que es la versión discreta de (3.11).

Proposición 3.7 *Sea* $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ *una solución de* (3.1). *Entonces*

$$\frac{1}{2}\alpha^2 g_2^2(u_n) - \big(G_1(u_n) - G_1(u_1)\big) = E + \frac{h^2}{8}\big(g_1^2(u_n) - g_1^2(u_1)\big), \tag{3.14}$$

donde G_1 es la función primitiva de g_1 que cumple la identidad $G_1(0) = 0$, y E se define como en (3.13). *Además, si consideramos E como una función de u_1, donde $u_k := U_k(u_1)$ está definida como en* (3.5) *para $2 \leq k \leq n$, entonces E es una función creciente sobre $\mathbb{R}_{\geq}0$.*

Demostración: Por las deducciones hechas antes del enunciado de la proposición, solo nos resta demostrar que E es una función creciente sobre $\mathbb{R}_{\geq}0$.

Consideremos E como una función de u_1, donde $u_k := U_k(u_1)$ están definidas como en (3.5) para $2 \leq k \leq n$. Si reescribimos a E de la siguiente forma

$$E = \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\frac{g_1(u_k) + g_1(u_{k+1})}{2}(u_{k+1} - u_k) - \big(G_1(u_{k+1}) - G_1(u_k)\big)\Big), \tag{3.15}$$

alcanza con demostrar que cada término de la sumatoria anterior es una función creciente sobre $\mathbb{R}_{\geq}0$. En efecto, fijemos k entre 1 y $n-1$; la derivada en función de u_1 del k-ésimo término de (3.15) es

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u_1}\Big(\frac{g_1(u_k) + g_1(u_{k+1})}{2}(u_{k+1} - u_k) - \big(G_1(u_{k+1}) - G_1(u_k)\big)\Big) = \\
&= \frac{g_1'(u_k)v_k' + g_1'(u_{k+1})v_{k+1}'}{2}(u_{k+1} - u_k) + \frac{g_1(u_k) + g_1(u_{k+1})}{2}(v_{k+1}' - v_k') \\
&\quad -\big(g_1(u_{k+1})v_{k+1}' - g_1(u_k)v_k'\big),
\end{aligned}$$

donde v_k' y v_{k+1}' son las derivadas de U_k y U_{k+1} evaluadas en $U_1 = u_1$ respectivamente. Sumando y restando v_k' en cada aparición de v_{k+1}' obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u_1}\Big(\frac{g_1(u_k)+g_1(u_{k+1})}{2}(u_{k+1}-u_k)-\big(G_1(u_{k+1})-G_1(u_k)\big)\Big)=\\
&=\Big(\frac{g_1'(u_k)+g_1'(u_{k+1})}{2}(u_{k+1}-u_k)-\big(g_1(u_{k+1})-g_1(u_k)\big)\Big)v_k'\\
&\quad+\Big(\frac{g_1'(u_{k+1})}{2}(u_{k+1}-u_k)-\frac{g_1(u_{k+1})-g_1(u_k)}{2}\Big)(v_{k+1}'-v_k')\\
&=\Big(\frac{g_1'(u_k)+g_1'(u_{k+1})}{2}(u_{k+1}-u_k)-\big(g_1(u_{k+1})-g_1(u_k)\big)\Big)v_k'\\
&\quad+\Big(\frac{g_1'(u_{k+1})}{2}-\frac{g_1'(\xi_k)}{2}\Big)(u_{k+1}-u_k)(v_{k+1}'-v_k'),
\end{aligned}$$

donde $\xi_k \in (u_k, u_{k+1})$ se obtiene luego de aplicar el Teorema del valor medio a $g_1(u_{k+1}) - g_1(u_k)$. Claramente, la resta

$$\frac{g_1'(u_k)+g_1'(u_{k+1})}{2}(u_{k+1}-u_k)-\big(g_1(u_{k+1})-g_1(u_k)\big)$$

es el error de la aproximación de la integral de g_1' por la regla de los trapecios en el intervalo $[u_k, u_{k+1}]$, y la convexidad de g_1' nos garantiza su positividad. Por otro lado, como g_1' es creciente, tenemos que $g_1'(u_{k+1}) - g_1'(\xi_k) \geq 0$. Finalmente, por el Lema 3.2, las cantidades $(v_{k+1}' - v_k')$, $(u_{k+1} - u_k)$ y v_k' son positivas para $u_1 \in \mathbb{R}_{\geq}0$. Por lo tanto, el k-ésimo término de la expresión (3.15) de E es creciente en $\mathbb{R}_{\geq}0$ para todo $1 \leq k \leq n-1$, de donde deducimos que E es creciente como función de u_1 en $\mathbb{R}_{\geq}0$. ∎

3.2. Estimaciones generales

En esta sección mostramos cotas para las soluciones positivas de (3.1). Más precisamente, encontramos un intervalo que contiene a las soluciones positivas de (3.1) y cuyos extremos solo dependen de α. Estas cotas nos permiten establecer resultados de existencia y unicidad de las soluciones positivas de ciertas instancias de (3.1), y juegan un papel clave en el diseño y cálculo del costo de nuestro algoritmo de aproximación.

Lema 3.8 *Sea* $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ *una solución de* (3.1)*. Entonces*

$$\alpha g_2(u_n) < g_1(u_n).$$

Demostración: De la última ecuación de (3.1) y el Lema 3.2(1), obtenemos la igualdad

$$\alpha g_2(u_n) = h\Big(\frac{1}{2}g_1(u_1) + g_1(u_2) + \cdots + g_1(u_{n-1}) + \frac{1}{2}g_1(u_n)\Big).$$

De esta igualdad y el Lema 3.2(1) deducimos que

$$\alpha g_2(u_n) < g_1(u_n),$$

quedando demostrado el lema. ∎

A partir del Lema 3.8 deducimos de forma inmediata los siguientes corolarios.

Corolario 3.9 *Sea* $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ *una solución de* (3.1)*. Supongamos que la función* g *de la Definición 3.1 es sobreyectiva. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si* $g'(x) > 0$ *para todo* $x > 0$*, entonces* $u_n > g^{-1}(\alpha)$*.*
- *Si* $g'(x) < 0$ *para todo* $x > 0$*, entonces* $u_n < g^{-1}(\alpha)$*.*

Corolario 3.10 *Sea* $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ *una solución de* (3.1)*. Si existe* $c > 0$ *tal que* $g(x) = c$ *para todo* $x > 0$*, entonces* $\alpha < c$*.*

En el caso del sistema particular (3.3), las condiciones de crecimiento y decrecimiento de g del Corolario 3.9 son equivalentes a las condiciones $p > q$ y $q < p$ respectivamente. Por lo tanto, los corolarios anteriores se traducen de la siguiente forma.

Corolario 3.11 *Sea* $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ *una solución de* (3.3)*. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si* $p > q$*, entonces* $u_n > \alpha^{1/(p-q)}$*.*
- *Si* $p < q$*, entonces* $u_n < \alpha^{1/(p-q)}$*.*

Corolario 3.12 *Sea* $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ *una solución de* (3.3)*. Si* $p = q$*, entonces* $\alpha < 1$*.*

A continuación demostramos un resultado que nos proporciona cotas de u_n en función de u_1.

Lema 3.13 *Sea* $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ *una solución de* (3.1) *y sea* G *la función de la Definición 3.1. Entonces*

$$G(u_n) < G(u_1) + \frac{\alpha^2}{2}.$$

Demostración: Por la Proposición 3.7 y el Lema 3.2 deducimos que $E > 0$ y $g_1^2(u_n) - g_1^2(u_1) > 0$. Esto nos muestra que la parte izquierda de la identidad (3.14) es estrictamente positiva. Entonces obtenemos la siguiente desigualdad

$$G_1(u_n) - \frac{\alpha^2}{2} g_2^2(u_n) < G_1(u_1),$$

donde G_1 es la función de la Definición 3.1. Dividiendo esta desigualdad por $g_2^2(u_n)$ y usando que g_2^2 es creciente, concluimos que

$$G(u_n) - \frac{\alpha^2}{2} < \frac{G_1(u_1)}{g_2^2(u_n)} \leq G(u_1).$$

Por lo tanto, queda demostrado el enunciado del lema. ∎

A partir del lema anterior obtenemos el siguiente resultado que nos permite obtener una cota superior de u_1 en función de α para algunas instancias de (3.1).

Proposición 3.14 *Sea* $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ *una solución de* (3.1) *y sean* G, g *y* G_1 *las funciones de la Definición 3.1. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

- *existe* $d \in [0, 1)$ *tal que* $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' \geq 0$ *para todo* $x > 0$,
- $G''(x) \geq 0$ *para todo* $x > 0$.

Entonces

$$g^2(u_1) < \frac{\alpha^2}{1-d}.$$

Más aun, si g *es sobreyectiva, entonces*

$$u_1 < g^{-1}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{1-d}}\Big).$$

Demostración: Por el Lema 3.13 y el Teorema del valor medio, existe $\xi > 0$ entre u_1 y u_n tal que

$$G'(\xi)(u_n - u_1) = G(u_n) - G(u_1) < \frac{\alpha^2}{2}.$$

Por el Lema 3.2(2),

$$(u_n - u_1) = h^2\Big(\frac{n-1}{2} g_1(u_1) + \sum_{j=2}^{n-1} (n-j) g_1(u_j)\Big) > \frac{g_1(u_1)}{2} > 0.$$

Combinando esta desigualdad con la desigualdad anterior obtenemos que

$$G'(\xi)\frac{g_1(u_1)}{2} < G'(\xi)(u_n - u_1) < \frac{\alpha^2}{2}.$$

Dado que G' es creciente, vemos que

$$\begin{aligned}\alpha^2 > G'(u_1)g_1(u_1) &= \Big(\frac{g_1(u_1)g_2^2(u_1) - G_1(u_1)2g_2(u_1)g_2'(u_1)}{g_2^4(u_1)}\Big)g_1(u_1)\\ &= \Big(1 - \frac{G_1(u_1)2g_2(u_1)g_2'(u_1)}{g_1(u_1)g_2^2(u_1)}\Big)\frac{g_1^2(u_1)}{g_2^2(u_1)}\\ &= \Big(1 - \frac{\big(\ln(g_2^2(u_1))\big)'}{\big(\ln(G_1(u_1))\big)'}\Big)\frac{g_1^2(u_1)}{g_2^2(u_1)}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Teniendo en cuenta la primera condición del enunciado deducimos que

$$\begin{aligned}0 \le \big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' &= d\big(\ln(G_1(x))\big)' - \big(\ln(g_2^2(x))\big)'\\ &= \big(\ln(G_1(x))\big)'\Big(d - \frac{\big(\ln(g_2^2(x))\big)'}{\big(\ln(G_1(x))\big)'}\Big).\end{aligned}$$

Dado que $\big(\ln(G_1(x))\big)' = g_1(x)/G_1(x) > 0$, concluimos que

$$\frac{\big(\ln(g_2^2(x))\big)'}{\big(\ln(G_1(x))\big)'} \le d. \tag{3.17}$$

Combinando las desigualdades (3.16) y (3.17) obtenemos

$$\alpha^2 > (1-d)\frac{g_1^2(u_1)}{g_2^2(u_1)} = (1-d)g^2(u_1),$$

de donde se deduce la primera afirmación del enunciado.

Ahora, supongamos que g es sobreyectiva. Combinando las afirmaciones 3 y 2 del Lema 3.5, obtenemos que $g'(x) > 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$, de donde deducimos la segunda afirmación del enunciado. ■

Observemos que la primera condición de la Proposición 3.14 nos permite obtener una cota superior no trivial de u_1. Esta condición, como muestra el Lema 3.5, es más fuerte que pedir que $G'(x) > 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$. Por lo tanto, combinando la Proposición 3.14 con el Lema 3.13 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.15 *Con las notaciones e hipótesis de la Proposición 3.14, si g es sobreyectiva, entonces*

$$G(u_n) < G\Big(g^{-1}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{1-d}}\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}.$$

Más aun, si G es sobreyectiva, entonces

$$u_n < G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{1-d}}\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big).$$

En el contexto del sistema (3.3), si $p+1 > 2q$ deducimos que la función $G(x) := x^{p+1-2q}$ es estrictamente creciente y que $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' \geq 0$, con $d := 2q/(p+1)$. Por lo tanto, el corolario anterior se traduce de la siguiente forma:

Corolario 3.16 *Sea $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de* (3.3). *Si $p+1 > 2q$, entonces*

$$u_n < \Big(\Big(\alpha^2 \frac{p+1}{p+1-2q}\Big)^{(p+1-2q)/2(p-q)} + \alpha^2 \frac{p+1}{2}\Big)^{1/(p+1-2q)}.$$

Sea $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (3.1). En el siguiente lema obtenemos una cota superior para u_n en función de u_1 y α, que nos permitirá obtener una cota inferior de u_1 en función de α.

Lema 3.17 *Sean $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (3.1) y $C(\alpha)$ una cota superior de u_n en función de α. Entonces $u_n < e^M u_1$, donde $M := g_1'\big(C(\alpha)\big)$.*

Demostración: Del Lema 3.2(1) obtenemos las siguientes identidades

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + h^2\Big(\frac{g_1(u_1)}{2} + g_1(u_2) + \cdots + g_1(u_k)\Big) \\ &= u_k + h^2\Big(\frac{g_1'(\xi_1)u_1}{2} + g_1'(\xi_2)u_2 + \cdots + g_1'(\xi_k)u_k\Big), \end{aligned}$$

para $1 \leq k \leq (n-1)$, donde $\xi_i \in [0, u_i]$ es un punto que se obtiene por el Teorema del valor medio para $1 \leq i \leq k$. Teniendo en cuenta que g_1' es creciente, del Lema 3.2(1), obtenemos que

$$\begin{aligned} u_{k+1} &\leq u_k + h^2(g_1'(u_1)u_1 + \cdots + g_1'(u_k)u_k) \\ &\leq (1 + hg_1'\big(C(\alpha)\big))u_k = (1 + hM)u_k, \end{aligned}$$

para $1 \leq k \leq (n-1)$. Argumentando recursivamente, deducimos que

$$u_n < (1 + Mh)^{n-1}u_1 < e^M u_1,$$

quedando demostrado el enunciado del lema. ∎

El siguiente lema muestra una cota inferior de u_1 en función de α.

Lema 3.18 *Sean $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (3.1), $C(\alpha)$ una cota superior de u_n en función de α y $M := g_1'\big(C(\alpha)\big)$. Supongamos que la función g de la Definición 3.1 es sobreyectiva. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si $g'(x) > 0$ para todo $x > 0$, entonces $u_1 > g^{-1}(\alpha)/e^M$.*

- *Si* $g'(x) < 0$ *para todo* $x > 0$ *y*

$$\lim_{\alpha \to 0^+} C(\alpha) = 0,$$

entonces $u_1 > g^{-1}\big(\alpha \widetilde{C}(\alpha)\big)$*, donde* $\widetilde{C}(\alpha)$ *es una constante mayor o igual a 1 tal que*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \widetilde{C}(\alpha) = 1.$$

Demostración: Primero supongamos que $g'(x) > 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$. Combinando el Lema 3.17 con el Corolario 3.9 deducimos que

$$g^{-1}(\alpha) < u_n < e^M u_1,$$

de donde se desprende la primera afirmación del enunciado.

Ahora supongamos que $g'(x) < 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$. Del Lema 3.17 y del Lema 3.2(1) deducimos las siguientes desigualdades

- $g_2(u_n) < g_2(e^M u_1)$,
- $g_1(u_1) < h\Big(\frac{1}{2} g_1(u_1) + g_1(u_2) + \cdots + g_1(u_{n-1}) + \frac{1}{2} g_1(u_n)\Big) = \alpha g_2(u_n)$.

Combinando ambas desigualdades obtenemos

$$g_1(u_1) < \alpha g_2(e^M u_1) = \alpha \frac{g_2(e^M u_1)}{g_2(u_1)} g_2(u_1). \tag{3.18}$$

Dado que $e^M \geq 1$ y g_2 es creciente, sabemos que $g_2(e^M x)/g_2(x) \geq 1$ para todo $x > 0$. Como la función g_2 es analítica en $x = 0$ y no nula, existe $k \geq 1$ tal que $g_2^{(k)}(0) \neq 0$ y $g_2^{(j)}(0) = 0$ para todo $0 \leq j \leq k-1$, donde $g_2^{(j)}(0)$ representa la j-ésima derivada de g_2 evaluada en cero. Utilizando esta propiedad y la regla de L'Hôpital deducimos que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{g_2(e^M x)}{g_2(x)} = e^{kM}.$$

Por lo tanto, como $u_1 \in \big(0, C(\alpha)]$, existe una constante $\widetilde{C}(\alpha) > 0$ tal que

$$1 \leq \frac{g_2(e^M u_1)}{g_2(u_1)} \leq \widetilde{C}(\alpha).$$

Es más, podemos elegir $\widetilde{C}(\alpha)$ de forma tal que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \widetilde{C}(\alpha) = 1.$$

Combinando este resultado con la desigualdad (3.18) obtenemos que

$$g_1(u_1) < \alpha \widetilde{C}(\alpha) g_2(u_1),$$

lo que demuestra la segunda afirmación del enunciado. ∎

Este último resultado, en el contexto del sistema (3.3), se puede expresar de la siguiente forma.

Lema 3.19 *Sean $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (3.3), $C(\alpha)$ una cota superior de u_n en función de α y $M := pC(\alpha)^{p-1}$. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si $p > q$, entonces*
$$u_1 > \frac{\alpha^{1/(p-q)}}{e^M}.$$
- *Si $p < q$ y*
$$\lim_{\alpha \to 0^+} C(\alpha) = 0,$$
entonces
$$u_1 > \left(\alpha e^{qM}\right)^{1/(p-q)}.$$

Combinando el Corolario 3.15 y el Lema 3.18 obtenemos el siguiente resultado.

Lema 3.20 *Sea $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (3.1) y sean G, g y G_1 las funciones de la Definición 3.1. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones*

- *G y g son sobreyectivas,*
- *existe $d \in [0, 1)$ tal que $\left(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\right)' \geq 0$ para todo $x > 0$,*
- *$G''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$.*

Entonces
$$u_1 < g^{-1}\big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\big),$$
donde
$$\widehat{C}(\alpha) := 1 + \frac{g_2'\big(C_1(\alpha)\big)\alpha^2}{2g_2\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)G'\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)},$$
con
$$C_1(\alpha) := G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{1-d}}\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big),$$
y $M := g_1'(C_1(\alpha))$. Asimismo,
$$u_n < G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big).$$

Demostración: Sea $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (3.1). A partir de los Lemas 3.2 y 3.13 deducimos las siguientes desigualdades:

- $g_1(u_1) < h\Big(\frac{1}{2}g_1(u_1) + g_1(u_2) + \cdots + g_1(u_{n-1}) + \frac{1}{2}g_1(u_n)\Big) = \alpha g_2(u_n)$,
- $u_n < G^{-1}\Big(G(u_1) + \frac{\alpha^2}{2}\Big)$.

Combinando ambas desigualdades obtenemos

$$g(u_1) < \alpha\frac{g_2(u_n)}{g_2(u_1)} < \alpha\frac{g_2\Big(G^{-1}\Big(G(u_1) + \frac{\alpha^2}{2}\Big)\Big)}{g_2(u_1)}.$$

Dado que g_2' es creciente en $\mathbb{R}_{>0}$ y $(G^{-1})'$ es decreciente en $\mathbb{R}_{>0}$, aplicando el Teorema del valor medio, obtenemos las siguientes estimaciones

$$\begin{aligned} g(u_1) &< \alpha\frac{g_2(u_1) + g_2'\Big(G^{-1}\Big(G(u_1) + \frac{\alpha^2}{2}\Big)\Big)\Big(G^{-1}\Big(G(u_1) + \frac{\alpha^2}{2}\Big) - u_1\Big)}{g_2(u_1)} \\ &< \alpha\frac{g_2(u_1) + g_2'\Big(G^{-1}\Big(G(u_1) + \frac{\alpha^2}{2}\Big)\Big)(G^{-1})'(G(u_1))\frac{\alpha^2}{2}}{g_2(u_1)} \\ &< \alpha\Big(1 + \frac{g_2'\Big(G^{-1}\Big(G(u_1) + \frac{\alpha^2}{2}\Big)\Big)\alpha^2}{2g_2(u_1)G'(u_1)}\Big). \end{aligned}$$

Combinando esta estimación con las cotas para u_1 obtenidas en la Proposición 3.14 y el Lema 3.18 concluimos que

$$u_1 < g^{-1}\big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\big),$$

donde

$$\widehat{C}(\alpha) := 1 + \frac{g_2'\big(C_1(\alpha)\big)\alpha^2}{2g_2\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)G'\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)},$$

con $M := g_1'(C_1(\alpha))$ y

$$C_1(\alpha) := G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{1-d}}\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big).$$

Combinando este resultado con el Lema 3.13 concluimos que

$$u_n < G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big),$$

quedando demostrado el lema. ∎

Finalmente, el siguiente teorema resume los resultados obtenidos en este capítulo.

Teorema 3.21 *Sea* $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ *una solución de* (3.1). *Supongamos que las funciones* g *y* G *de la Definición 3.1 son sobreyectivas. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si G cumple las siguientes condiciones:*
  - *existe $d \in [0,1)$ tal que $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' > 0$ para todo $x > 0$,*
  - *$G''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$,*

  entonces
  $$u_k \in \left[\frac{g^{-1}(\alpha)}{e^M}, \text{mín}\{C_1(\alpha), C_2(\alpha)\}\right]$$
  para todo $1 \leq k \leq n$, donde
  $$C_1(\alpha) := G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{1-d}}\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big),$$
  $$C_2(\alpha) := G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big),$$
  con
  $$\widehat{C}(\alpha) := 1 + \frac{g_2'\big(C_1(\alpha)\big)\alpha^2}{2g_2\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)G'\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)},$$
  y $M := g_1'(C_1(\alpha))$.
- *Si $g'(x) < 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$, entonces existe una constante $\widetilde{C}(\alpha) > 1$ tal que*
  $$u_k \in [g^{-1}\big(\alpha\widetilde{C}(\alpha)\big), g^{-1}(\alpha)]$$
  para todo $1 \leq k \leq n$, y se cumple la siguiente condición límite
  $$\lim_{\alpha \to +\infty} \widetilde{C}(\alpha) = 1.$$

Demostración: Supongamos que se cumplen las condiciones de la primera afirmación del enunciado. Por el Corolario 3.15 y el Lema 3.18 tenemos que

$$\frac{g^{-1}(\alpha)}{e^M} < u_1 < \cdots < u_n \leq C_1(\alpha) := G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{1-d}}\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big)$$

donde $M := g_1'(C_1(\alpha))$. Además, por el Lema 3.20, tenemos que

$$\frac{g^{-1}(\alpha)}{e^M} < u_1 < \cdots < u_n \leq C_2(\alpha) := G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big),$$

donde

$$\widehat{C}(\alpha) := 1 + \frac{g_2'\big(C_1(\alpha)\big)\alpha^2}{2g_2\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)G'\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{g^{-1}(\alpha)}{e^M} < u_1 < \cdots < u_n \leq \text{mín}\{C_1(\alpha), C_2(\alpha)\}.$$

Ahora, supongamos $g'(x) < 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$. Por el Corolario 3.9 y el Lema 3.18 tenemos que

$$g^{-1}\big(\alpha \widetilde{C}(\alpha)\big) < u_1 < \cdots < u_n \leq g^{-1}(\alpha),$$

donde $\widetilde{C}(\alpha)$ es una constante mayor o igual a 1 tal que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \widetilde{C}(\alpha) = 1.$$

De esta forma queda demostrado el teorema. ■

Vemos ahora cómo se traduce este resultado al sistema particular (3.3).

Teorema 3.22 *Sea* $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ *una solución de* (3.3). *Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si* $p + 1 > 2q$*, entonces*

$$u_k \in \Big[\frac{\alpha^{1/(p-q)}}{e^M}, \min\{C_1(\alpha), C_2(\alpha)\}\Big]$$

  para $1 \leq k \leq n$*, donde*

$$C_1(\alpha) := \left(\left(\alpha^2 \frac{p+1}{p+1-2q}\right)^{(p+1-2q)/2(p-q)} + \alpha^2 \frac{p+1}{2}\right)^{1/(p+1-2q)},$$

$$C_2(\alpha) := \left(\left(\alpha \widehat{C}(\alpha)\right)^{(p+1-2q)/(p-q)} + \alpha^2 \frac{p+1}{2}\right)^{1/(p+1-2q)},$$

  con $M := pC_1(\alpha)^{p-1}$ *y*

$$\widehat{C}(\alpha) := 1 + \frac{(p+1)q\big(C_1(\alpha)\big)^{q-1}\alpha e^{(p-q)M}}{2(p+1-2q)}.$$

- *Si* $p < q$ *entonces*

$$u_k \in \Big[\big(\alpha e^{qM}\big)^{1/(p-q)}, C(\alpha)\Big]$$

  para $1 \leq k \leq n$*, donde* $C(\alpha) := \alpha^{1/(p-q)}$ *y* $M := pC(\alpha)^{p-1}$.

Capítulo 4

Resultados de existencia y unicidad

En este capítulo estudiamos la existencia y unicidad de soluciones de los sistemas en consideración, que recordamos aquí junto a algunas definiciones de utilidad. Sean g_1 y g_2 funciones de clase $\mathcal{C}^3$ en $\mathbb{R}$ y analíticas en $x = 0$ tales que $g_i(0) = 0$, $g_i'(x) > 0$, $g_i''(x) > 0$ y $g_i'''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$ con $i = 1, 2$. Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 &= -\big(U_2 - U_1\big) + \frac{h^2}{2} g_1(U_1), \\ 0 &= -\big(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}\big) + h^2 g_1(U_k), \qquad (2 \leq k \leq n-1), \\ 0 &= -\big(U_{n-1} - U_n\big) - hA g_2(U_n) + \frac{h^2}{2} g_1(U_n). \end{cases} \tag{4.1}$$

Recordamos que, dejando variar a U_1, podemos considerar a $U_2, \ldots, U_n$, A como funciones de U_1, que resultan definidas recursivamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} U_1(u_1) &:= u_1, \\ U_2(u_1) &:= u_1 + \frac{h^2}{2} g_1(u_1), \\ U_{k+1}(u_1) &:= 2U_k(u_1) - U_{k-1}(u_1) + h^2 g_1(U_k(u_1)), \quad (2 \leq k \leq n-1), \\ A(u_1) &:= \Big(\frac{1}{h}(U_n - U_{n-1})(u_1) + \frac{h}{2} g_1(U_n(u_1))\Big) / g_2(U_n(u_1)). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Del mismo modo que en el Capítulo 3, vamos a utilizar reiteradamente las siguientes funciones auxiliares

Definición 4.1

- *Llamamos* $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *a la función* $g(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$.
- *Llamamos* $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a la función primitiva de* g_1 *que cumple* $G_1(0) = 0$.

- *Llamamos $G : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ a la función $G(x) := G_1(x)/g_2^2(x)$.*

4.1. Existencia

Sea $P : (\mathbb{R}_{>0})^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$P(\alpha, u_1) := \tfrac{1}{h}\big(U_{n-1}(u_1) - U_n(u_1)\big) - \tfrac{h}{2} g_1\big(U_n(u_1)\big) + \alpha g_2\big(U_n(u_1)\big). \quad (4.3)$$

Observamos que la ecuación $P(A, U_1) = 0$ tiene como soluciones a las coordenadas (α, u_1) de cualquier solución (compleja) del sistema (4.1). Por lo tanto, para $\alpha > 0$ fijo, las soluciones positivas de $P(\alpha, U_1)$ son los valores de u_1 que queremos obtener. Es más, de las parametrizaciones (4.2) de las coordenadas $u_2, \dots, u_n$ de una solución $(\alpha, u_1, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ de (4.1) en términos de u_1, concluimos que la cantidad de raíces positivas de $P(\alpha, U_1)$ determina la cantidad de soluciones positivas del sistema (4.1) para cada valor de α.

Por lo tanto, analizamos la existencia de raíces positivas de la función $P(\alpha, U_1)$ para valores $\alpha > 0$. Por el Lema 3.2(1) tenemos que

$$\begin{aligned} P(\alpha, u_1) &= \alpha g_2\big(U_n(u_1)\big) - h\big(\tfrac{1}{2} g_1(u_1) + \textstyle\sum_{j=2}^{n-1} g_1\big(U_j(u_1)\big) + \tfrac{1}{2} g_1\big(U_n(u_1)\big)\big) \\ &\geq \alpha g_2\big(U_n(u_1)\big) - g_1\big(U_n(u_1)\big) = g_2\big(U_n(u_1)\big)\Big(\alpha - g\big(U_n(u_1)\big)\Big) \end{aligned}$$

para cualquier $u_1 > 0$, donde g es la función de la Definición 4.1.

Supongamos que g es sobreyectiva y estrictamente monótona en $\mathbb{R}_{>0}$. Del Lema 3.2 deducimos que $g(U_n)$, considerada como una función de u_1, es biyectiva en $\mathbb{R}_{>0}$. Por lo tanto, existen $u_1^*, u_1^{**} > 0$ tales que $g\big(U_n(u_1^*)\big) = \alpha$ y $g\big(U_n(u_1^{**})\big) = 2\alpha/h$. Usando esta elección de u_1^* y u_1^{**} y la desigualdad anterior deducimos que

$$\begin{aligned} P(\alpha, u_1^*) &\geq g_2\big(U_n(u_1^*)\big)\Big(\alpha - g\big(U_n(u_1^*)\big)\Big) = 0, \\ P(\alpha, u_1^{**}) &= \tfrac{1}{h}\big(U_{n-1}(u_1^{**}) - U_n(u_1^{**})\big) + g_2\big(U_n(u_1^{**})\big)\Big(\alpha - \tfrac{h}{2} g\big(U_n(u_1^{**})\big)\Big) \\ &= \tfrac{1}{h}\big(U_{n-1}(u_1^{**}) - U_n(u_1^{**})\big) \leq 0. \end{aligned}$$

Dado que $P(A, U_1)$ es una función continua en $\mathbb{R}^2$, de las consideraciones previas deducimos el siguiente resultado:

Proposición 4.2 *Sea $\alpha > 0$. Si la función g de la Definición* 4.1 *es sobreyectiva y estrictamente monótona en $\mathbb{R}_{>0}$, entonces el sistema* (4.1) *tiene una solución positiva con $A = \alpha$.*

Para ejemplificar este último resultado, en el caso en que las funciones g_1 y g_2 son $g_1(x) := x^p$ y $g_2(x) := x^q$ respectivamente, reescribimos el sistema

(4.1) de la siguiente forma:

$$\begin{cases} 0 &=& -(U_2 - U_1) + \frac{h^2}{2} U_1^p, \\ 0 &=& -(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}) + h^2 U_k^p, \quad (2 \leq k \leq n-1) \\ 0 &=& -(U_{n-1} - U_n) + \frac{h^2}{2} U_n^p - AhU_n^q. \end{cases} \tag{4.4}$$

La Proposición 4.2 garantiza la existencia de soluciones positivas del sistema (4.4) en los casos $p > q$ y $q > p$, por lo que tenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.3 *Sean $p \neq q$ y $\alpha > 0$. Entonces el sistema* (4.4) *tiene una solución positiva con $A = \alpha$.*

Ahora supongamos que existe $c > 0$ tal que $g(x) = c$. Por el Corolario 3.10 no existen soluciones positivas del sistema (4.1) con $\alpha \geq c$. Por lo tanto, consideramos el caso $\alpha < c$. En esta situación, para todo $u_1 > 0$ podemos reescribir a la función $P(\alpha, u_1)$ de la siguiente forma:

$$P(\alpha, u_1) = -g_1\big(U_n(u_1)\big)\Big(\frac{\big(U_n(u_1) - U_{n-1}(u_1)\big)}{hg_1\big(U_n(u_1)\big)} + \frac{h}{2} - \frac{\alpha}{c}\Big).$$

Como $g_1(0) = 0$ y $g_1'(x) > 0$ para todo $x > 0$, entonces g_1 no tiene raíces en $\mathbb{R}_{>0}$ y las soluciones positivas de $P(\alpha, U_1) = 0$ son las soluciones positivas de la ecuación $\tilde{P}(\alpha, U_1) = 0$, donde

$$\tilde{P}(\alpha, U_1) := \frac{\big(U_n(U_1) - U_{n-1}(U_1)\big)}{hg_1\big(U_n(U_1)\big)} + \frac{h}{2} - \frac{\alpha}{c}. \tag{4.5}$$

Afirmamos que

$$\lim_{u_1 \to 0^+} \tilde{P}(\alpha, u_1) = 1 - \frac{\alpha}{c} > 0 \text{ y } \lim_{u_1 \to +\infty} \tilde{P}(\alpha, u_1) = \frac{h}{2} - \frac{\alpha}{c} < 0,$$

si $h < 2\alpha/c$. En efecto, reescribamos $\tilde{P}(\alpha, u_1)$ para $u_1 > 0$ de la siguiente forma:

$$\tilde{P}(\alpha, u_1) = \frac{h}{2} \frac{g_1(u_1)}{g_1\big(U_n(u_1)\big)} + \sum_{k=2}^{n-1} h \frac{g_1\big(U_k(u_1)\big)}{g_1\big(U_n(u_1)\big)} + \frac{h}{2} - \frac{\alpha}{c}. \tag{4.6}$$

Por el Lema 3.2,

$$\lim_{u_1 \to 0^+} U_k(u_1) = 0 \text{ y } \lim_{u_1 \to 0^+} U_k'(u_1) = 1,$$

para $1 \leq k \leq n$. Además, como la función g_1 es analítica en $x = 0$ y no nula, existe $p \geq 1$ tal que $g_1^{(p)}(0) \neq 0$ y $g_1^{(j)}(0) = 0$ para todo $0 \leq j \leq p-1$, donde

$g_1^{(j)}(0)$ representa la j-ésima derivada de g_1 evaluada en cero. Utilizando estas propiedades y la regla de L'Hôpital deducimos que

$$\lim_{u_1\to 0^+} \frac{g_1\big(U_k(u_1)\big)}{g_1\big(U_n(u_1)\big)} = 1$$

para $1 \leq k \leq n$. Combinando estos límites con la expresión (4.6) obtenemos que

$$\lim_{u_1\to 0^+} \tilde{P}(\alpha, u_1) = 1 - \frac{\alpha}{c} > 0.$$

Por otro lado, utilizando las relaciones (4.2) y el Teorema del valor medio vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{U_2(u_1) - u_1}{g_1\big(U_2(u_1)\big)} &= \Big(\frac{2}{h^2} + g_1'(\xi_1)\Big)^{-1}, \\
\frac{U_{k+1}(u_1) - U_k(u_1)}{g_1\big(U_{k+1}(u_1)\big)} &= \bigg(\Big(\frac{U_k(u_1) - U_{k-1}(u_1)}{g_1\big(U_k(u_1)\big)} + h^2\Big)^{-1} + g_1'(\xi_k)\bigg)^{-1} \ (k \geq 2),
\end{aligned}$$

donde $\xi_j \in (U_j(u_1), U_{j+1}(u_1))$ para $1 \leq j \leq n-1$. Teniendo en cuenta que $g_1'(x) \to +\infty$ cuando $x \to +\infty$, con un argumento inductivo deducimos que

$$\lim_{u_1\to +\infty} \frac{U_k(u_1) - U_{k-1}(u_1)}{g_1\big(U_k(u_1)\big)} = 0,$$

para $2 \leq k \leq n$. Combinando este límite con la expresión (4.5) para $k = n$ deducimos que, si $h < 2\alpha/c$, entonces

$$\lim_{u_1\to +\infty} \tilde{P}(\alpha, u_1) = \frac{h}{2} - \frac{\alpha}{c} < 0,$$

Dado que α/c es constante como función de u_1, por el Lema 3.4 la función $\tilde{P}(\alpha, U_1)$ es derivable y estrictamente decreciente en $\mathbb{R}_{>0}$. Por lo tanto, de las consideraciones anteriores deducimos la siguiente proposición.

Proposición 4.4 *Sean $\alpha > 0$ y g la función de la Definición* 4.1*. Si existe $c > 0$ tal que $g(x) = c$ para todo $x > 0$, entonces el sistema* (4.1) *tiene una solución positiva con $A = \alpha$ si y solo si $\alpha < c$ y $h < 2\alpha/c$.*

Al igual que en el caso de la Proposición 4.2, traducimos la Proposición 4.4 al contexto del sistema particular (4.4).

Proposición 4.5 *Sea $\alpha > 0$. Si $p = q$, entonces el sistema* (4.4) *tiene una solución positiva con $A = \alpha$ si y solo si $\alpha < 1$ y $h < 2\alpha$.*

4.2. Unicidad

En esta sección estudiamos la unicidad de las soluciones positivas del sistema (4.1). Con este objetivo, consideramos la homotopía que se obtiene moviendo el parámetro α en $\mathbb{R}_{>0}$ y mostramos que la función racional $A(U_1)$, implícitamente definida por la ecuación $P(A, U_1) = 0$, es estrictamente monótona, donde $P(A, U_1)$ es la función definida en (4.3). A partir de la monotonía de $A(U_1)$ demostramos que para cada valor $\alpha > 0$ de A existe un único valor positivo de u_1. Finalmente, utilizando las relaciones (4.2) deducimos que existen únicos $u_2, \ldots, u_n$ para cada valor de α fijo.

Suponiendo que la función g de la Definición 4.1 es decreciente en $\mathbb{R}_{>0}$, obtenemos el primer resultado de esta sección.

Teorema 4.6 *Sea $A(U_1)$ la función definida en (4.2). Si g es decreciente en $\mathbb{R}_{>0}$, entonces $A'(u_1) < 0$ para todo $u_1 > 0$.*

Demostración: Sean $U_1, U_2, \ldots, U_n, A$ las funciones definidas en (4.2). Observamos que A se puede reescribir de la siguiente forma:

$$A = g(U_n)\Big(\frac{U_n - U_{n-1}}{hg_1(U_n)} + \frac{h}{2}\Big).$$

Derivando A en función de U_1, obtenemos la siguiente identidad

$$A' = g'(U_n)U_n'\Big(\frac{U_n - U_{n-1}}{hg_1(U_n)} + \frac{h}{2}\Big) + g(U_n)\Big(\frac{U_n - U_{n-1}}{hg_1(U_n)}\Big)'.$$

Sea $u_1 > 0$. Por el Lema 3.2, $U_i(u_1)$ es positiva para $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, de la definición de g inferimos que $g(U_n)(u_1) > 0$. Además, por el Lema 3.4, tenemos que

$$\Big(\frac{U_n - U_{n-1}}{hg_1(U_n)}\Big)'(u_1) < 0.$$

A partir de estas desigualdades deducimos la siguiente cota superior de $A'(u_1)$:

$$A'(u_1) < \Big(g'(U_n)U_n'\Big(\frac{U_n - U_{n-1}}{hg_1(U_n)} + \frac{h}{2}\Big)\Big)(u_1) = \Big(g'(U_n)U_n'\frac{A}{g(U_n)}\Big)(u_1). \tag{4.7}$$

Por el Lema 3.2, tenemos que $U_i'(u_1)$ es positivo para $1 \leq i \leq n$. Combinando esta afirmación con la condición de monotonía de g queda demostrado el teorema. ■

Además de demostrar la monotonía de A', a partir de la inecuación (4.7) deducimos la cota superior para A' que enunciamos en el siguiente corolario.

Corolario 4.7 *Con las hipótesis y notaciones del Teorema 4.6, si g es decreciente en $\mathbb{R}_{>0}$, entonces*

$$A'(u_1) < \Big(\frac{g'(U_n)U_n'A}{g(U_n)}\Big)(u_1),$$

para todo $u_1 > 0$.

Este resultado es importante en el Capítulo 6 para la estimación del número de condición de la homotopía que se obtiene al mover α en el sistema (4.1), homotopía que utilizaremos para la aproximación de las soluciones positivas de (4.1).

El Corolario 4.7 se traduce de la siguiente forma al contexto del sistema (4.4).

Corolario 4.8 *Sea $A(U_1)$ la función definida en (4.2). Si $p < q$, entonces*

$$A'(u_1) < \Big(\frac{(p-q)U_n'A}{U_n}\Big)(u_1),$$

para todo $u_1 > 0$.

Ahora supongamos que se cumple la siguiente condición:

- Existe $d \in [0, 1)$ tal que $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' > 0$ para todo $x > 0$.

Notemos que, por el Lema 3.5, la condición pedida implica que $g'(x) > 0$ y $G'(x) > 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$, donde g, G y G_1 son las funciones de la Definición 4.1. Por lo tanto, las funciones que cumplen esta condición no han sido consideradas en las hipótesis del Teorema 4.6. Al igual que en el caso anterior, demostramos que la función racional A definida en (4.2) es estrictamente monótona.

Teorema 4.9 *Sean $\mathcal{A}$ una constante positiva y $A = A(U_1)$ la función definida en (4.2). Sean g, G_1 y G las funciones de la Definición 4.1. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones*

- *existe $d \in [0, 1)$ tal que $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' \geq 0$ para todo $x > 0$,*
- *$G''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$.*

Si g y G son sobreyectivas, entonces existe $M(\mathcal{A}) > 0$ tal que $A'(u_1) > 0$ para todo $n \geq 1 + M(\mathcal{A})/(2 - 2d)$ y $u_1 \in A^{-1}\big((0, \mathcal{A}]\big) \cap \mathbb{R}_{>0}$.

Demostración: Sean $U_1, U_2, \ldots, U_n, A$ las funciones definidas en (4.2). Para cada $u_1 > 0$ llamamos $I(u_1) := G_1(U_n(u_1)) - G_1(U_1(u_1))$ a la integral de la función g_1 en el intervalo $[U_1(u_1), U_n(u_1)]$, y $T(u_1)$ a la aproximación de $I(u_1)$ por la regla de trapecios compuesta en el intervalo $[U_1(u_1), U_n(u_1)]$, considerando la subdivisión de $[U_1(u_1), U_n(u_1)]$ definida por los nodos $U_1(u_1)$, $U_2(u_1), \ldots, U_n(u_1)$. Más precisamente, T se define de la siguiente forma:

$$T := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g_1(U_{k+1}) + g_1(U_k)}{2}(U_{k+1} - U_k).$$

Por último, sea $E := T - I$ el error de aproximación de I por T. Por la Proposición 3.7 y la convexidad de g_1, deducimos que $E > 0$ y $E' > 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$, donde E' representa la derivada de E.

En estas condiciones demostramos la positividad de $A'(u_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande y $u_1 \in A^{-1}\big((0, \mathcal{A}]\big) \cap \mathbb{R}_{>0}$. De acuerdo a la Proposición 3.7, las funciones $U_1, U_2, \ldots, U_n, A$ satisfacen la versión discreta (3.14) de la ley de conservación de la energía (3.9). Dividiendo ambos lados de la ecuación (3.14) por $G_1(U_n)$ obtenemos la siguiente identidad:

$$\frac{1}{2}A^2 \frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)} = \frac{T}{G_1(U_n)} + \frac{h^2}{8}\frac{g_1^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big(1 - \frac{g_1^2(U_1)}{g_1^2(U_n)}\Big). \tag{4.8}$$

Derivando con respecto a U_1 en ambos lados de (4.8), tenemos que

$$\begin{aligned} AA' \frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)} + \frac{A^2}{2}\Big(\frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)' &= \\ = \Big(\frac{T}{G_1(U_n)}\Big)' + \frac{h^2}{8}\Big(\frac{g_1^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)'\Big(1 - \frac{g_1^2(U_1)}{g_1^2(U_n)}\Big) &- \frac{h^2}{8}\frac{g_1^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big(\frac{g_1^2(U_1)}{g_1^2(U_n)}\Big)'. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Sea $u_1 \in A^{-1}\big((0, \mathcal{A}]\big) \cap \mathbb{R}_{>0}$. Notemos que, por el Lema 3.2, los valores $U_i(u_1)$ y $U_i'(u_1)$ son positivos para $1 \leq i \leq n$. Además, las funciones g_1, g_2, g, G y G_1 son crecientes en $\mathbb{R}_{>0}$ y sus imágenes están contenidas en $\mathbb{R}_{>0}$. En lo que sigue de la demostración usamos estas condiciones de positividad. De los Lemas 3.5 y 3.4 deducimos que $(g_1^2(U_n)/G_1(U_n))'(u_1) > 0$ y $(g_1^2(U_1)/g_1^2(U_n))'(u_1) < 0$. Combinando estas observaciones con (4.9) obtenemos que

$$\Big(AA' \frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)(u_1) > \Big(\Big(\frac{T}{G_1(U_n)}\Big)' - \frac{A^2}{2}\Big(\frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)'\Big)(u_1).$$

Reescribiendo la desigualdad anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \Big(AA' \frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)(u_1) \quad > \quad & \Big(\frac{I^2}{G_1^2(U_n)}\Big(\frac{T}{I}\Big)' + \frac{G_1^2(U_1)}{G_1^2(U_n)}\Big(\frac{T}{G_1(U_1)}\Big)'\Big)(u_1) \\ & - \Big(\frac{A^2}{2}\Big(\frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)'\Big)(u_1). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Afirmamos que $\big(T/G_1(U_1)\big)'(u_1) > 0$. En efecto, por el Lema 3.2 y el Lema 3.4 se cumple que

$$\Big(\frac{T}{g_1^2(U_1)}\Big)'(u_1) = \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{g_1(U_{k+1}) + g_1(U_k)}{2g_1(U_1)} h^2 \Big(\frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{k} \frac{g_1(U_j)}{g_1(U_1)}\Big)\Big)'(u_1) > 0.$$

Combinando este resultado con el Lema 3.5, concluimos que

$$\Big(\frac{T}{G_1(U_1)}\Big)'(u_1)=\Big(\frac{g_1^2(U_1)}{G_1(U_1)}\frac{T}{g_1^2(U_1)}\Big)'(u_1)>0.$$

A partir de esta afirmación y de la desigualdad (4.10) deducimos que

$$\Big(AA'\frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)(u_1)>\Bigg(\frac{I^2}{G_1^2(U_n)}\Big(\frac{T}{I}\Big)'-\frac{A^2}{2}\Big(\frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)'\Bigg)(u_1). \tag{4.11}$$

Con el fin de obtener condiciones para garantizar la positividad de $A'(u_1)$, desarrollamos la parte derecha de la desigualdad anterior.

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{I^2}{G_1^2(U_n)}\Big(\frac{T}{I}\Big)'-\frac{A^2}{2}\Big(\frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)'\Big)(u_1)=\\ &=\Bigg(\frac{T'I-TI'}{G_1^2(U_n)}+\frac{A^2}{2}\frac{g_2^2(U_n)\big(G_1(U_n)\big)'-\big(g_2^2(U_n)\big)'G_1(U_n)}{G_1^2(U_n)}\Bigg)(u_1)\\ &=\Bigg(\frac{E'I-EI'}{G_1^2(U_n)}+\frac{A^2g_2^2(U_n)\big(G_1(U_n)\big)'}{2G_1^2(U_n)}\Bigg(1-\frac{\big(g_2^2(U_n)\big)'G_1(U_n)}{g_2^2(U_n)\big(G_1(U_n)\big)'}\Bigg)\Bigg)(u_1).\end{aligned}$$

De las hipótesis del enunciado se deduce que

$$\Bigg(1-\frac{\big(g_2^2(U_n)\big)'G_1(U_n)}{g_2^2(U_n)\big(G_1(U_n)\big)'}\Bigg)(u_1)>1-d.$$

Además, por la positividad de $E'(u_1)$ y la definición de $I(u_1)$, tenemos que $\big(E'I-EI'\big)(u_1)>-E(u_1)\big(G(U_n)\big)'(u_1)$. A partir de estas desigualdades deducimos que

$$\begin{aligned}&\Big(\frac{I^2}{G_1^2(U_n)}\Big(\frac{T}{I}\Big)'-\frac{A^2}{2}\Big(\frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)'\Big)(u_1)>\\ &\qquad>\Big(\frac{\big(G_1(U_n)\big)'}{G_1^2(U_n)}\Big((1-d)\frac{A^2g_2^2(U_n)}{2}-E\Big)\Big)(u_1).\end{aligned}$$

Volviendo a la desigualdad (4.11), concluimos que

$$\Big(AA'\frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)(u_1)>\Bigg(\frac{\big(G_1(U_n)\big)'}{G_1^2(U_n)}\Big((1-d)\frac{A^2g_2^2(U_n)}{2}-E\Big)\Bigg)(u_1).$$

Por la identidad (3.14), podemos reescribir la última desigualdad de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Big(AA'\frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)(u_1)>&\Bigg(\frac{\big(G_1(U_n)\big)'}{G_1^2(U_n)}\frac{(1-d)A^2g_2^2(U_n)}{4}\Bigg)(u_1)\\ &+\Bigg(\frac{\big(G_1(U_n)\big)'}{G_1^2(U_n)}\Big(\frac{1-d}{2}T+\frac{1-d}{2}\frac{h^2}{8}(g_1^2(U_n)-g_1^2(U_1))-E\Big)\Bigg)(u_1).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Si mostramos que el segundo término de la parte derecha de (4.12) es positivo obtenemos que

$$\Big(AA'\frac{g_2^2(U_n)}{G_1(U_n)}\Big)(u_1) > \left(\frac{\big(G_1(U_n)\big)'}{G_1^2(U_n)}\frac{(1-d)A^2g_2^2(U_n)}{4}\right)(u_1) > 0, \qquad (4.13)$$

quedando demostrada la positividad de $A'(u_1)$. Por lo tanto, vamos a demostrar que

$$\left(\frac{\big(G_1(U_n)\big)'}{G_1^2(U_n)}\Big(\frac{1-d}{2}T + \frac{1-d}{2}\frac{h^2}{8}(g_1^2(U_n) - g_1^2(U_1)) - E\Big)\right)(u_1) > 0.$$

Como g_1 es creciente, alcanza con mostrar que

$$\frac{1-d}{2}T(u_1) - E(u_1) = \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\frac{1-d}{2}T_k(u_1) - E_k(u_1)\Big) > 0,$$

donde

$$\begin{aligned} T_k &:= \frac{g_1(U_{k+1}) + g_1(U_k)}{2}(U_{k+1} - U_k), \\ E_k &:= T_k - I_k, \end{aligned}$$

con $I_k := G_1(U_{k+1}) - G_1(U_k)$. Notemos que, para cada $u_1 > 0$, el valor $I_k(u_1)$ resulta la integral de la función g_1 en el intervalo $[U_k(u_1), U_{k+1}(u_1)]$, $T_k(u_1)$ es la aproximación de $I_k(u_1)$ por la regla de trapecios en el intervalo $[U_k(u_1), U_{k+1}(u_1)]$ y $E_k(u_1)$ es el error de dicha aproximación.

Para demostrar que $(1-d)T(u_1)/2 - E(u_1) > 0$, vamos a ver que

$$\frac{1-d}{2}T_k(u_1) - E_k(u_1) > 0 \qquad (4.14)$$

se cumple para $1 \le k \le n-1$. Por [DA98], tenemos que

$$E_k(u_1) \le \Big(\frac{g_1'(U_{k+1}) + g_1'(U_k)}{8}(U_{k+1} - U_k)^2\Big)(u_1).$$

Del Lema 3.2 y de la monotonía de g_1' deducimos que

$$\begin{aligned} E_k(u_1) &\le \Big(\frac{g_1'(U_n)}{4}(U_{k+1} - U_k)^2\Big)(u_1) \\ &\le \left(h^2\frac{g_1'(U_n)}{4}\sum_{j=1}^{k}\frac{g_1(U_{j+1}) + g_1(U_j)}{2}(U_{k+1} - U_k)\right)(u_1) \\ &\le \left(h\frac{g_1'(U_n)}{4}\frac{g_1(U_{k+1}) + g_1(U_k)}{2}(U_{k+1} - U_k)\right)(u_1) \\ &= \Big(h\frac{g_1'(U_n)}{4}T_k\Big)(u_1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que (4.14) se satisface si se cumple la desigualdad

$$h\frac{g_1'(U_n)(u_1)}{4} \leq \frac{1-d}{2}. \tag{4.15}$$

Del Corolario 3.15 y la monotonía de g_1' deducimos que existe una constante $M(\mathcal{A}) > 0$ independiente de h tal que $g_1'(U_n)(u_1) \leq M(\mathcal{A})$ para todo $u_1 \in A^{-1}((0,\mathcal{A}]) \cap \mathbb{R}_{>0}$. Entonces una condición suficiente para que valga (4.15) es que $n-1 \geq M(\mathcal{A})/(2-2d)$, lo que demuestra el teorema. ∎

La ecuación (4.13) nos permite obtener la siguiente cota para A', que vamos a usar más adelante.

Corolario 4.10 *Con las hipótesis y notaciones del Teorema 4.9, si g y G son sobreyectivas, entonces existe $M(\mathcal{A}) > 0$ tal que*

$$A'(u_1) > \Big(\frac{(1-d)g_1(U_n)U_n'A}{4G_1(U_n)}\Big)(u_1),$$

para todo $n \geq 1 + M(\mathcal{A})/(2-2d)$ y $u_1 \in A^{-1}\big((0,\mathcal{A}]\big) \cap \mathbb{R}_{>0}$.

El Corolario 4.10 se traduce de la siguiente forma en el contexto del sistema (4.4).

Corolario 4.11 *Sean $\mathcal{A}$ una constante positiva y $A = A(U_1)$ la función definida en (4.2). Si $p+1 > 2q$, entonces*

$$A'(u_1) > \Big(\frac{(p+1-2q)U_n'A}{4U_n}\Big)(u_1)$$

para todo $n \geq 1 + M(\mathcal{A})/(2-2d)$ y $u_1 \in A^{-1}\big((0,\mathcal{A}]\big) \cap \mathbb{R}_{>0}$, donde

$$d := \frac{2q}{p+1},\ M(\mathcal{A}) := p\Big(\Big(\frac{\mathcal{A}^2}{1-d}\Big)^{\frac{p+1-2q}{2(p-q)}} + \mathcal{A}^2\frac{p+1}{2}\Big)^{\frac{p-1}{p+1-2q}}.$$

Para demostrar la unicidad de las soluciones de (4.1) necesitamos un resultado sobre la estructura de la imagen inversa de A en el intervalo que estamos considerando.

Lema 4.12 *Sean $\mathcal{A}$ una constante positiva y $A = A(U_1)$ la función definida en (4.2). Sean g, G_1 y G las funciones de la Definición 4.1. Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

- *existe $d \in [0,1)$ tal que $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' \geq 0$ para todo $x > 0$,*
- *$G''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$.*

Si g y G son sobreyectivas, entonces existe $M(\mathcal{A}) > 0$ con la siguiente propiedad: para todo $n \geq 1 + M(\mathcal{A})/(2-2d)$ existe $c := c(n,\mathcal{A}) > 0$ tal que $A^{-1}((0,\mathcal{A}]) \cap \mathbb{R}_{>0} = (0,c]$.

Demostración: Fijemos $n \geq 1 + M(\mathcal{A})/(2-2d)$. Por el Teorema 4.9 sabemos que se satisface la condición $A'(u_1) > 0$ para todo $u_1 \in A^{-1}((0, \mathcal{A}]) \cap \mathbb{R}_{>0}$. Del Lema 3.2 deducimos que $U_n(u_1)$ define una función biyectiva en $\mathbb{R}_{>0}$ y que

$$A(u_1) = \Big(\frac{h}{2} g_1(U_1(u_1)) + \sum_{k=2}^{n-1} h g_1(U_k(u_1)) + \frac{h}{2} g_1(U_n(u_1))\Big) / g_2(U_n(u_1)).$$

Como $0 < U_1(u_1) < \cdots < U_n(u_1)$, se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\frac{h}{2} g\big(U_n(u_1)\big) \leq A(u_1) \leq g\big(U_n(u_1)\big).$$

Dado que $\lim_{u_1 \to 0^+} g\big(U_n(u_1)\big) = 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $(0, \epsilon] \subset A^{-1}((0, \mathcal{A}]) \cap \mathbb{R}_{>0}$. Afirmamos que

$$(0, c_0] = A^{-1}((0, \mathcal{A}]) \cap \mathbb{R}_{>0}$$

con

$$c_0 := \sup\{\epsilon : (0, \epsilon] \subset A^{-1}((0, \mathcal{A}]) \cap \mathbb{R}_{>0}\}.$$

En efecto, por la definición de c_0 inferimos que $(0, c_0) \subset A^{-1}((0, \mathcal{A}]) \cap \mathbb{R}_{>0}$ y que $\lim_{u_1 \to c_0^-} A(u_1) = A(c_0) \leq \mathcal{A}$. Por lo tanto, deducimos que

$$(0, c_0] \subset A^{-1}((0, \mathcal{A}]) \cap \mathbb{R}_{>0}.$$

Ahora veamos que esta inclusión es en realidad una igualdad. Supongamos que existe $\delta > c_0$ tal que $A(\delta) \leq \mathcal{A}$. Sea $c_1 := \inf\{\delta : \delta > c_0, A(\delta) \leq \mathcal{A}\}$. Por la definición de c_0, el intervalo (c_0, c_1) no es vacío. Como $A(x) > \mathcal{A}$ para todo $x \in (c_0, c_1)$, tenemos que $A'(c_1) \leq 0$, que contradice el hecho de que $A'(u_1) > 0$ para todo $u_1 \in A^{-1}((0, \mathcal{A}]) \cap \mathbb{R}_{>0}$. ∎

Ahora enunciamos y demostramos el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.13 *Sea $\alpha > 0$ y sean g, G_1 y G las funciones de la Definición 4.1. Entonces valen las siguiente afirmaciones*

- *Si g es sobreyectiva y $g'(x) < 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$, entonces el sistema* (4.1) *tiene una única solución positiva con $A = \alpha$.*
- *Si existe $c > 0$ tal que $g(x) = c$ para todo $x > 0$, entonces el sistema* (4.1) *tiene una única solución positiva con $A = \alpha$ si y solo si $\alpha < c$ y $h < 2\alpha/c$.*
- *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*
  - *existe $d \in [0, 1)$ tal que $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' \geq 0$ para todo $x > 0$,*
  - *$G''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$.*

Si g y G son sobreyectivas, entonces existe $M(\alpha) > 0$ tal que el sistema (4.1) *tiene una única solución positiva con $A = \alpha$ para todo $n \geq 1 + M(\alpha)/(2 - 2d)$.*

Demostración: Las Proposiciones 4.2 y 4.4 muestran que (4.1) tiene soluciones en $(\mathbb{R}_{>0})^n$. Por lo tanto, solo nos queda demostrar la unicidad de dichas soluciones.

Primero demostramos simultáneamente las dos primeras afirmaciones del enunciado. Sea A la función definida en (4.2). Por el Teorema 4.6, tenemos que $A'(u_1) < 0$ para todo $u_1 > 0$. Supongamos que existen dos soluciones distintas $(u_1, \ldots, u_n)$, $(\widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_n) \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ de (4.1) con $A = \alpha$. Usando las relaciones (4.2) se deduce que $u_1 \neq \widehat{u}_1$ y $A(u_1) = A(\widehat{u}_1)$. Pero esto contradice el hecho de que $A'(u_1) < 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$, de donde se concluye la validez de las dos primeras afirmaciones.

Ahora demostramos la afirmación restante. Por el Teorema 4.9, existe $M(\alpha) > 0$ tal que si $n \geq 1 + M(\alpha)/(2 - 2d)$, entonces $A'(u_1) > 0$ para todo $u_1 \in A^{-1}((0, \alpha]) \cap \mathbb{R}_{>0}$. Por el Lema 4.12, existe $c = c(n, \alpha)$ tal que $A^{-1}((0, \alpha]) \cap \mathbb{R}_{>0} = (0, c]$. Suponiendo, como en la demostración de las afirmaciones anteriores, la existencia de dos soluciones distintas de (4.1) con $A = \alpha$, obtenemos una contradicción. Por lo tanto, queda demostrado el teorema. ∎

Finalmente, veamos cómo se traduce este resultado en el contexto del sistema particular (4.4).

Teorema 4.14 *Sea $\alpha > 0$. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si $p < q$, entonces el sistema* (4.4) *tiene una única solución positiva con $A = \alpha$.*
- *Si $p = q$, entonces el sistema* (4.4) *tiene una única solución positiva con $A = \alpha$ si y solo si $\alpha < 1$ y $h < 2\alpha$.*
- *Si $p + 1 > 2q$, entonces el sistema* (4.4) *tiene una única solución positiva con $A = \alpha$ para todo $n \geq 1 + M(\alpha)/(2 - 2d)$, donde*

$$d := \frac{2q}{p+1},\ M(\alpha) := p\Big(\Big(\frac{\alpha^2}{1-d}\Big)^{\frac{p+1-2q}{2(p-q)}} + \alpha^2 \frac{p+1}{2}\Big)^{\frac{p-1}{p+1-2q}}.$$

4.3. Casos en los que existen soluciones espurias

Por el Teorema 4.13 tenemos que existe una única solución del sistema (4.1) para ciertas instancias de g y G, donde g y G son las funciones de la Definición 4.1. Supongamos que g es sobreyectiva y estrictamente creciente y G es sobreyectiva y estrictamente decreciente. Claramente g y G

no cumplen las hipótesis del Teorema 4.13. En esta sección mostramos la existencia de *soluciones espurias* de (4.1). Más precisamente, mostramos familias de funciones g_1 y g_2 para las que existen soluciones del sistema (4.1) cuyas coordenadas tienden a infinito cuando h tiende a cero.

Fijemos $\alpha > 0$ y sea P la función definida en (4.3), es decir,

$$P(\alpha, u_1) := \tfrac{1}{h}\big(U_{n-1}(u_1) - U_n(u_1)\big) - \tfrac{h}{2} g_1\big(U_n(u_1)\big) + \alpha g_2\big(U_n(u_1)\big).$$

Recordamos que la coordenada u_1 de cualquier solución de (4.1) es solución de la ecuación $P(\alpha, U_1) = 0$, y por las parametrizaciones (4.2) vale la afirmación recíproca. Como en la Sección 4.1, siguiendo las técnicas de [BR01] vamos a mostrar que existen $u_1^* > 0$ y $u_1^{**} > 0$ tales que u_1^* y u_1^{**} tienden a infinito cuando h tiende a cero y $P(\alpha, u_1^*) \geq 0 \geq P(\alpha, u_1^{**})$.

Como g es sobreyectiva y estrictamente creciente en $\mathbb{R}_{>0}$, del Lema 3.2 deducimos que $g(U_n)$, considerada como una función de u_1, es biyectiva en $\mathbb{R}_{>0}$. Por lo tanto, existen $u_1^*, u_1^{**} > 0$ tales que $g\big(U_n(u_1^*)\big) = \alpha/h$ y $g\big(U_n(u_1^{**})\big) = 2\alpha/h$. Más aun, como $g(U_n)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_{>0}$, se cumple que u_1^* y u_1^{**} tienden a infinito cuando h tiende a cero. Por el Lema 3.2 deducimos que

$$\begin{aligned}
P(\alpha, u_1^{**}) &= \tfrac{1}{h}\big(U_{n-1}(u_1^{**}) - U_n(u_1^{**})\big) + g_2\big(U_n(u_1^{**})\big)\Big(\alpha - \tfrac{h}{2} g\big(U_n(u_1^{**})\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{h}\big(U_{n-1}(u_1^{**}) - U_n(u_1^{**})\big) \leq 0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si evaluamos P en (α, u_1^*) obtenemos

$$\begin{aligned}
P(\alpha, u_1^*) &= \tfrac{1}{h}\big(U_{n-1}(u_1^*) - U_n(u_1^*)\big) + g_2\big(U_n(u_1^*)\big)\Big(\alpha - \tfrac{h}{2} g\big(U_n(u_1^*)\big)\Big) \\
&= \tfrac{1}{h}\big(U_{n-1}(u_1^*) - U_n(u_1^*)\big) + \tfrac{\alpha}{2} g_2\big(U_n(u_1^*)\big) \\
&= \tfrac{1}{h} U_{n-1}(u_1^*) - \tfrac{1}{\alpha} g\big(U_n(u_1^*)\big) U_n(u_1^*) + \tfrac{\alpha}{2} g_2\big(U_n(u_1^*)\big) \\
&\geq g_2\big(U_n(u_1^*)\big)\Big(\tfrac{\alpha^2}{2} - U_n(u_1^*)\frac{g_1\big(U_n(u_1^*)\big)}{g_2^2\big(U_n(u_1^*)\big)}\Big).
\end{aligned}$$

Como G es estrictamente decreciente y sobreyectiva, tenemos que

$$\lim_{h \to 0} G\big(U_n(u_1^*)\big) = 0.$$

Supongamos que g_1 es una función polinomial en $\mathbb{R}_{>0}$. Como G_1 es la función primitiva de g_1, deducimos que

$$\lim_{h \to 0} -U_n(u_1^*)\frac{g_1\big(U_n(u_1^*)\big)}{g_2^2\big(U_n(u_1^*)\big)} = \lim_{h \to 0} -U_n(u_1^*)\frac{g_1\big(U_n(u_1^*)\big)}{G_1\big(U_n(u_1^*)\big)} G\big(U_n(u_1^*)\big) = 0.$$

Supongamos ahora que g_2 es una función polinomial en $\mathbb{R}_{>0}$ y g_1 no es una función polinomial en $\mathbb{R}_{>0}$. Como G es estrictamente decreciente, tenemos que

$$\frac{g_1\big(U_n(u_1^*)\big)}{g_2^2\big(U_n(u_1^*)\big)} < \frac{(g_2^2)'\big(U_n(u_1^*)\big)}{g_2^2\big(U_n(u_1^*)\big)} G\big(U_n(u_1^*)\big).$$

A partir de esta última desigualdad, deducimos que

$$\lim_{h\to 0} -U_n(u_1^*)\frac{g_1\big(U_n(u_1^*)\big)}{g_2^2\big(U_n(u_1^*)\big)} \geq \lim_{h\to 0} -U_n(u_1^*)\frac{(g_2^2)'\big(U_n(u_1^*)\big)}{g_2^2\big(U_n(u_1^*)\big)}G\big(U_n(u_1^*)\big) = 0.$$

Por lo tanto, en ambas situaciones tenemos que, si h es suficientemente chico, entonces $P(\alpha, u_1^*) \geq 0 \geq P(\alpha, u_1^{**})$, de donde deducimos el siguiente resultado.

Teorema 4.15 *Sea $\alpha > 0$ y sean G y g las funciones de la Definición 4.1. Supongamos que g_i es una función polinomial en $\mathbb{R}_{>0}$ para $i = 1$ o $i = 2$. Si G y g cumplen las condiciones:*

- *g es sobreyectiva y estrictamente creciente,*
- *G es sobreyectiva y estrictamente decreciente,*

entonces el sistema (4.1) tiene una solución espuria para $A = \alpha$.

Capítulo 5

Condicionamiento simbólico

Al igual que en los otros capítulos recordamos los sistemas en consideración. Sean g_1 y g_2 funciones de clase $\mathcal{C}^3$ en $\mathbb{R}$ y analíticas en $x = 0$ tales que $g_i(0) = 0$, $g_i'(x) > 0$, $g_i''(x) > 0$ y $g_i'''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$ con $i = 1, 2$. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = \big(U_2 - U_1\big) - \frac{h^2}{2} g_1(U_1), \\ 0 = \big(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}\big) - h^2 g_1(U_k), \qquad (2 \leq k \leq n-1), \\ 0 = \big(U_{n-1} - U_n\big) + hAg_2(U_n) - \frac{h^2}{2} g_1(U_n). \end{cases} \tag{5.1}$$

En particular, en este capítulo vamos a suponer que g_1 y g_2 son polinomios de grados p y q respectivamente.

En el Capítulo 4 hemos determinado cuantas soluciones positivas tiene el sistema (5.1). A partir de ahora vamos a considerar el problema de calcularlas o aproximarlas. En particular, en este capítulo estudiamos el costo de hacerlo con algoritmo simbólicos. Más precisamente, demostramos que todos los algoritmos simbólicos conocidos para "resolver" el sistema polinomial (5.1) necesitan una cantidad de operaciones aritméticas en $\mathbb{Q}$ del orden $D^{\Omega(1)}$, donde $D := \mathrm{gr}(g_1)^{n-1} \max\{\mathrm{gr}(g_1), \mathrm{gr}(g_2)\}$ es el número de Bézout de (5.1). Es importante destacar que, por "resolver", vamos a entender calcular el polinomio minimal de una proyección lineal arbitraria del conjunto de soluciones del sistema que estamos considerando. Este es un problema central en la teoría de eliminación efectiva, y es utilizado por la mayoría de los procedimientos simbólicos. Por ejemplo:

- El polinomio minimal de la proyección definida por una forma lineal Y_1 es parte de la base de Gröbner reducida del ideal generado por los polinomios que definen el sistema en consideración con respecto al orden lexicográfico definido por $Y_n > \cdots > Y_1$, donde $Y_1, \ldots, Y_n$ es un cambio de coordenadas adecuado (ver, por ejemplo, [CLO98], [Stu02]).

- En muchas ocasiones la resolución por bases de Gröbner se complementa con el cálculo de una Representación Racional Univariada (ver [Ren92], [ABRW96], [Rou97], [GLS01]), cuya "salida" incluye el polinomio minimal M_ℓ de una forma lineal genérica $\ell := \lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_n U_n$.

- Calcular U–resultantes, es decir, el polinomio minimal de una forma lineal $L := \Lambda_1 U_1 + \cdots + \Lambda_n U_n \in \mathbb{Q}[\Lambda, U]$, es una tarea fundamental de los algoritmos de eliminación que utilizan el cálculo de resultantes (ver [CLO98], [Stu02]).

- Un polinomio minimal M_ℓ es la salida de los llamados procedimientos de eliminación tipo Kronecker (ver [Par95], [CGH$^+$03], [DL06], [BP06]).

En estos términos, vamos a analizar el costo de calcular el polinomio minimal M_ℓ de la proyección del conjunto de soluciones complejas del sistema (5.1) definida por una forma lineal $\ell := \lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_n U_n$. En la sección 5.3.2 describimos la noción de robustez, característica que comparten todos los algoritmos que consideramos para el calculo de M_ℓ. Con esta terminología, el resultado principal de este capítulo es el siguiente: todo algoritmo "robusto" que calcula el polinomio minimal M_ℓ de una proyección arbitraria requiere al menos $\Omega(p^{n-1})$ operaciones aritméticas.

5.1. Algunas nociones de geometría algebraica

Dado que en el presente capítulo vamos a utilizar el lenguaje de geometría algebraica, en esta sección resumimos las nociones que necesitamos.

Un conjunto $W \subset \mathbb{C}^n$ se dice *algebraico* ($\mathbb{Q}$-definible) si existe un conjunto finito de polinomios $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{Q}[U_1, \ldots, U_n]$ tal que

$$W = \{u \in \mathbb{C}^n : f_1(u) = \cdots = f_m(u) = 0\}.$$

Definimos el *ideal* $I(V)$ de un conjunto algebraico $V \subset \mathbb{C}^n$ como el conjunto de todos los polinomios $f \in \mathbb{Q}[U_1, \ldots, U_n]$ que se anulan en todos los puntos del conjunto V.

Un conjunto algebraico $V \subset \mathbb{C}^n$ se dice *irreducible* si no se puede expresar como una descomposición irredundante $V = V_1 \cup V_2$, donde V_1, V_2 son conjuntos algebraicos. Todo conjunto algebraico tiene una única (salvo reordenamientos) descomposición irredundante como unión finita de conjuntos algebraicos irreducibles $V = C_1 \cup \cdots \cup C_h$ (ver por ejemplo [BCR98]). $C_1, \ldots, C_h$ se denominan las *componentes irreducibles* de V.

Para un conjunto algebraico dado $V \subset \mathbb{C}^n$, definimos el *anillo de coordenadas* $\mathbb{Q}[V]$ de V como el anillo cociente $\mathbb{Q}[V] := \mathbb{Q}[U_1, \ldots, U_n]/I(V)$. Si V es un conjunto algebraico irreducible, la *dimensión* de V se define como el máximo $m > 0$ tal que existe una cadena $V_0 \subset \ldots \subset V_m = V$ con V_i

algebraico irreducible para $1 \leq i \leq m$. Equivalentemente, la dimensión de V puede definirse como el grado de trascendencia de la extensión de cuerpos $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}(V)$, donde $\mathbb{Q}(V)$ denota el cuerpo de fracciones de $\mathbb{Q}[V]$. La dimensión de un conjunto algebraico real arbitrario $V \subset \mathbb{C}^n$ se define como el máximo de la dimensión de todas sus componentes irreducibles. Un conjunto algebraico se dice *equidimensional* si todas sus componentes irreducibles tienen la misma dimensión. Una *curva algebraica* es un conjunto algebraico equidimensional $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}^n$ de dimensión 1.

Sean $V \subset \mathbb{C}^n$ un conjunto algebraico e $I(V) = (f_1, \ldots, f_m)$ el ideal de V. Sea $u \in V$. El *espacio tangente* $T_u(V)$ de V en el punto u es el subespacio de $\mathbb{C}^n$ definido por

$$T_u(V) := \{z \in \mathbb{C}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial U_i}(u) z_i = 0 \text{ para } 1 \leq j \leq m\}.$$

Un punto $u \in V$ de un conjunto algebraico irreducible $V \subset \mathbb{C}^n$ se dice *no singular* si satisface la condición $dim\big(T_u(V)\big) = dim(V)$. Asimismo, un punto $u \in V$ de un conjunto algebraico arbitrario $V \subset \mathbb{C}^n$ se dice no singular si existe una componente irreducible V' de V tal que V' es la única componente irreducible de V que contiene a u y u es un punto no singular de V'. Un conjunto algebraico se dice no singular si todos sus puntos son no singulares.

Sean $V_1 \subset \mathbb{C}^n$, $V_2 \subset \mathbb{C}^m$ dos conjuntos algebraicos. Una función $f : V_1 \longrightarrow V_2$ es un *morfismo algebraico ($\mathbb{Q}$-definible)* si su gráfico es un conjunto algebraico de $\mathbb{C}^{n+m}$. En particular, los morfismos polinomiales ($\mathbb{Q}$-definibles) son algebraicos (ver por ejemplo [BCR98]). Sean $u \in V_1$ e $v := f(u)$. El *morfismo diferencial* asociado al morfismo f en el punto $u \in V_1$ es el morfismo lineal $d_u f : T_u(V_1) \longrightarrow T_v(V_2)$ inducido por la matriz Jacobiana $Df(u)$ de f en u. Un elemento $u \in V_1$ es un *punto crítico* de f si el rango del morfismo diferencial $d_u f : T_u(V_1) \longrightarrow T_v(V_2)$ es menor que la dimensión de V_1. Un *valor crítico* de f es la imagen por f de un punto crítico.

El *grado* de un conjunto algebraico irreducible $W \subset \mathbb{C}^n$ de dimensión r se define como

$$\sup \{\#(W \cap L);\ L \text{ es subespacio afín de dimensión } n - r \text{ tal que } \#(W \cap L) < \infty\}$$

(ver [Hei83]). El grado de un conjunto algebraico arbitrario se define como la suma de los grados de sus componentes irreducibles.

Todo morfismo $f : V_1 \longrightarrow V_2$ entre dos conjuntos algebraicos $V_1 \subset \mathbb{C}^n$, $V_2 \subset \mathbb{C}^m$ induce un homomorfismo de anillos $f^* : \mathbb{Q}[V_2] \longrightarrow \mathbb{Q}[V_1]$. Un morfismo $f : V_1 \longrightarrow V_2$ se dice *finito* si el homomorfismo de anillos correspondiente $f^* : \mathbb{Q}[V_2] \longrightarrow \mathbb{Q}[V_1]$ es inyectivo y define una extensión entera de anillos, es decir, si cualquier elemento de $\mathbb{Q}[V_1]$ satisface una ecuación polinomial mónica con coeficientes en $\mathbb{Q}[V_2]$. Si un morfismo $f : V_1 \longrightarrow V_2$ es finito, entonces la *fibra* $f^{-1}(y)$ de todo punto $y \in V_2$ es un conjunto finito no vacío (ver por ejemplo [Sha94]).

Sean $F_1, \dots, F_n$ polinomios de $\mathbb{Q}[U_1, \dots, U_n, T]$ y $W \subset \mathbb{C}^{n+1}$ el conjunto algebraico que definen. Supongamos que W es equidimensional. Sea J_F la matriz Jacobiana de $F := (F_1, \dots, F_n)$ con respecto a las variables $U_1, \dots, U_n$, y $\pi : W \longrightarrow \mathbb{C}$ el morfismo inducido por la proyección en la última coordenada. Supongamos que π es finito. Diremos que una fibra $\pi^{-1}(t)$ es *no ramificada* si J_F es no singular para todo punto en la fibra. Además, diremos que el morfismo π es *genéricamente no ramificado* si existe un abierto Zariski no vacío $\mathcal{U}$ de $\mathbb{C}$ (es decir, el complemento de un conjunto algebraico de $\mathbb{C}$) tal que para todo $t \in \mathcal{U}$ la fibra $\pi^{-1}(t)$ es no ramificada, o equivalentemente, si el ideal generado por $F_1, \dots, F_n$ en $\mathbb{Q}(T)[U_1, \dots, U_n]$ es radical.

En estas condiciones, tenemos que $\mathbb{Q}[T] \hookrightarrow \mathbb{Q}[W]$ es una extensión entera de anillos que transforma $\mathbb{Q}[W]$ en un $\mathbb{Q}[T]$-módulo libre cuyo rango $rank_{\mathbb{Q}[T]}\mathbb{Q}[W]$ se acota por $\deg W$ (ver [GHS93], [AS95]). Una *solución geométrica* del sistema $F_1 = 0, \dots, F_n = 0$ (o del conjunto algebraico W definido por $F_1, \dots, F_n$) consiste de los siguientes elementos:

- Una forma lineal $L \in \mathbb{Q}[U]$ que induce un elemento primitivo de la extensión $\mathbb{Q}[T] \hookrightarrow \mathbb{Q}[W]$, es decir, un elemento $\ell \in \mathbb{Q}[W]$ cuyo polinomio minimal $Q \in \mathbb{Q}[T, Y]$ sobre $\mathbb{Q}[T]$ satisface $\mathrm{gr}_Y Q = \mathrm{rango}_{\mathbb{Q}[T]}\mathbb{Q}[W]$.
- El polinomio Q.
- Una "parametrización" genérica de W por los ceros de Q, dada por polinomios $V_1, \dots, V_n \in \mathbb{Q}[T, Y]$. Estos polinomios satisfacen las condiciones $\frac{\partial Q}{\partial Y}(T, L)U_i - V_i(L) \in (F_1, \dots, F_n)$ y $\mathrm{gr}_T V_i < \mathrm{gr}_T Q$ para $i = 1, \dots, n$.

En particular, para cada $t \in \mathbb{Q}$ tal que $q := Q(t, Y)$ es libre de cuadrados en $\mathbb{Q}[Y]$, los polinomios $L, q, v_1 := V_1(t, Y), \dots, v_n := V_n(t, Y)$ definen una solución geométrica del conjunto algebraico cero-dimensional $\pi^{-1}(t)$, es decir, cumplen las condiciones:

- $\pi^{-1}(t) = \{u \in \mathbb{C}^n : q(L(u)) = 0,\ q'(L(u))u_i = v_i(L(u))\ i = 1, \dots, n\}$.
- El polinomio q es mónico de grado $\#\pi^{-1}(t)$, y los polinomios $v_1, \dots, v_n$ tienen grado estrictamente menor que $\#\pi^{-1}(t)$.

5.2. Una familia de sistemas

En esta sección introducimos una sub–familia de sistemas de ecuaciones polinomiales de la familia de sistemas (5.1) y analizamos su estructura. En las próximas secciones vamos a obtener una cota inferior exponencial, con respecto a la cantidad n de indeterminadas, sobre la complejidad de resolverla. Esto implica que la resolución de la familia de sistemas definida por (5.1) resulta inviable desde el punto de vista simbólico.

Sean $n, p, q \geq 2$ fijos. Sean $A, B, T, U_1, \ldots, U_n$ indeterminadas sobre $\mathbb{Q}$, $\Xi := (A, B)$ y $U := (U_1, \ldots, U_n)$. Consideramos los siguientes polinomios de $\mathbb{Q}[\Xi, T, U]$:

$$F_1 := U_2 - U_1 - B\tfrac{T^2}{2}U_1^p,$$

$$F_k := U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1} - BT^2U_k^p \quad (2 \leq k \leq n-1),$$

$$F_n := U_{n-1} - U_n - B\tfrac{T^2}{2}U_n^p + ATU_n^q.$$

Para $t \neq 0$, $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$, los polinomios $F_1(\xi, t, U), \ldots, F_n(\xi, t, U)$ definen un sistema polinomial $SP_{n,p,q}(\xi, t)$, donde $\xi := (\alpha, \beta)$. Para poder obtener una cota inferior de la complejidad de resolver la familia de sistemas $(SP_{n,p,q}(\xi, t))_{n,p,q\geq 2}$ necesitamos algunos resultados técnicos sobre la estructura del polinomio minimal de cierta proyección lineal del conjunto de soluciones $V\big(SP_{n,p,q}(\xi, t)\big) \subset \mathbb{C}^n$.

En lo que sigue usamos la notación $N_k := (p^{k-1} - p)/(p-1)$ para $2 \leq k \leq n$.

Lema 5.1 *Para $2 \leq k \leq n$ y $-1 \leq j \leq N_k$, existen racionales $c_{j,k}, \widetilde{c}_{j,k} > 0$ tales que las identidades*

$$U_k - U_{k-1} = P_k(\Xi, T, U_1) := \sum_{j=0}^{N_k} c_{j,k}B^{j+1}T^{2(j+1)}U_1^{(p-1)j+p}, \qquad (5.2)$$

$$U_k = \widetilde{P}_k(\Xi, T, U_1) := \sum_{j=-1}^{N_k} \widetilde{c}_{j,k}B^{j+1}T^{2(j+1)}U_1^{(p-1)j+p}, \qquad (5.3)$$

son válidas en $\mathbb{Q}[\Xi, T, U]/(F_1, \ldots, F_n)$.

Demostración: Utilizamos inducción en k. Para $k = 2$ tenemos $N_2 = 0$ y

$$U_2 - U_1 = B\frac{T^2}{2}U_1^p \quad \text{mód } (F_1, \ldots, F_n).$$

Esto prueba (5.2) y (5.3) para $k = 2$.

Ahora, supongamos que valen (5.2) y (5.3) para $k - 1 \geq 2$. Tenemos que

$$U_k - U_{k-1} = U_{k-1} - U_{k-2} + BT^2U_{k-1}^p \quad \text{mód } (F_1, \ldots, F_n). \qquad (5.4)$$

Combinando la hipótesis inductiva con (5.4) concluimos que $U_k - U_{k-1}$ y U_k pueden parametrizarse en función de U_1, B y T módulo $(F_1, \ldots, F_n)$, es decir, existen polinomios $P_k, \widetilde{P}_k \in \mathbb{Q}[\Xi, T, U_1]$ tales que

$$U_k - U_{k-1} = P_k(\Xi, T, U_1) \text{ y } U_k = \widetilde{P}_k(\Xi, T, U_1) \quad \text{mód } (F_1, \ldots, F_n).$$

Nos queda demostrar que $P_k, \widetilde{P}_k$ tienen una expansión monomial como en (5.2) y (5.3). Sea $\epsilon := (a, b, c) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^3$ el exponente correspondiente a un coeficiente no nulo en la representación densa de P_k.

Afirmación 5.2 *Existe* $0 \le j \le N_k$ *tal que* $a = j+1$, $b = 2(j+1)$ *y* $c = (p-1)j + p$.

Demostración de la afirmación: Si $(BTX_1)^\epsilon := B^a T^b U_1^c$ aparece en la representación densa de $U_{k-1} - U_{k-2}$ y no en la de $BT^2U_{k-1}^p$, entonces la afirmación vale por la hipótesis inductiva. En caso contrario, por (5.4) el monomio $(BTU_1)^\epsilon$ debe aparecer en la representación densa de la parametrización de $BT^2U_{k-1}^p$ en términos de B, T y U_1. Esto quiere decir que existen exponentes $\epsilon_1 := (a_1, b_1, c_1), \ldots, \epsilon_p := (a_p, b_p, c_p)$ tales que

$$\epsilon = (1,2,0) + \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_p.$$

Por la hipótesis inductiva vemos que para $1 \le i \le p$ existe $-1 \le j_i \le N_{k-1}$ tal que $a_i = j_i + 1$, $b_i = 2(j_i+1)$ y $c_i = (p-1)j_i + p$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \epsilon &= \Big(1 + \sum_{i=1}^p a_i, 2 + \sum_{i=1}^p b_i, \sum_{i=1}^p c_i\Big) \\ &= \Big(p + 1 + \sum_{i=1}^p j_i, 2(p+1) + 2\sum_{i=1}^p j_i, p^2 + (p-1)\sum_{i=1}^p j_i\Big) \\ &= \Big(p + \sum_{i=1}^p j_i + 1, 2\Big(p + \sum_{i=1}^p j_i + 1\Big), (p-1)\Big(p + \sum_{i=1}^p j_i\Big) + p\Big). \end{aligned}$$

Dado que $-1 \le j_i \le N_{k-1}$ para $1 \le i \le d$, concluimos que $0 \le p + j_1 + \cdots + j_p \le p + pN_{k-1} = N_k$. Esto finaliza la demostración de la afirmación.

De la afirmación y de la hipótesis deducimos que existen racionales $c_{j,k}, \widetilde{c}_{j,k}$ tales que P_k y $\widetilde{P}_k$ tiene una expansión monomial como en (5.2) y (5.3). Es más, inductivamente concluimos fácilmente que todos los coeficientes de dicha expansión son racionales positivos.

Afirmación 5.3 *Todos los racionales* $c_{j,k}, \widetilde{c}_{j,k}$ *son estrictamente positivos.*

Demostración de la afirmación: La afirmación se deduce fácilmente de (5.4) y la hipótesis inductiva para todo $c_{j,k}$ y $\widetilde{c}_{j,k}$ con $-1 \le j \le N_{k-1}$. Por otro lado, si $N_{k-1} < j \le N_k$, tenemos que $pN_{k-2} = N_{k-1} - p < j - p \le N_k - p = pN_{k-1}$. Por lo tanto, existen $N_{k-2} < j_1, \ldots, j_p \le N_{k-1}$ tales que $j - p = j_1 + \cdots + j_p$. Cada monomio en la representación densa del segundo término $T^2U_{k-1}^d$ de (5.4) consiste de la suma de monomios con coeficiente racional positivo. En particular, para $j = j_1 + \cdots + j_p + p$ como antes, un término en dicha suma proviene del monomio

$$T^2 \prod_{i=1}^p c_{j_i,k-1} T^{2(j_i+1)} U_1^{(p-1)j_i+p} = \Big(\prod_{i=1}^p c_{j_i,k-1}\Big) T^{2(j+1)} U_1^{(p-1)j+p}.$$

Dado que $c_{j_i,k-1} > 0$ para $1 \leq i \leq p$, concluimos que $c_{j,k} > 0$. La afirmación para $\widetilde{c}_{j,k}$ se deduce combinando la desigualdad $c_{j,k} > 0$ con (5.4) y la hipótesis inductiva. Esto finaliza la demostración de la afirmación.

De las afirmaciones anteriores se deduce inmediatamente el enunciado del lema. ■

Observemos que $F_1, \ldots, F_n$ forman una base de Gröbner reducida del ideal que generan en $\mathbb{Q}(\Xi, T)[U]$ con respecto a cualquier orden graduado. Sean $\det(J) := \det(\partial F/\partial U)$ el determinante Jacobiano de $F := (F_1, \ldots, F_n)$ respecto a las variables U e $\mathcal{I} := (F_1, \ldots, F_n) \subset \mathbb{Q}[\Xi, T, U]$ el ideal generado por $F_1, \ldots, F_n$. Entonces el ideal $\mathcal{I}^e := (F_1, \ldots, F_n) \subset \mathbb{Q}(\Xi, T)[U]$ tiene dimensión cero y, por lo tanto, la proyección $\pi : V(\mathcal{I} : \det(J)^\infty) \longrightarrow \mathbb{C}^3$ definida por $\pi(\xi, t, u) := (\xi, t)$ es dominante. En particular, π induce una extensión algebraica de cuerpos $\mathbb{Q}(\Xi, T) \hookrightarrow \mathbb{Q}(\Xi, T)[U]/\mathcal{I}^e$. Sea Y una indeterminada sobre $\mathbb{Q}(\Xi, T)$ y sea $L := \lambda_1 U_1 + \cdots + \lambda_n U_n \in \mathbb{Q}[U]$ una forma lineal. Un polinomio no nulo $Q \in \mathbb{Q}(\Xi, T)[Y]$ tal que $Q(\Xi, T, L) = 0$ en $\mathbb{Q}(\Xi, T)[U]/\mathcal{I}^e$ se denomina un *polinomio de eliminación* para L módulo $\mathcal{I}^e$. Análogamente, un polinomio no nulo $Q \in \mathbb{Q}[\Xi, T, Y]$ tal que $Q(\Xi, T, L) = 0$ en $\mathbb{Q}[\Xi, T, U]/(\mathcal{I} : \det(J)^\infty)$ se denomina un *polinomio de eliminación* para x módulo $(\mathcal{I} : \det(J)^\infty)$. Observamos que un polinomio $Q \in \mathbb{Q}[\Xi, T, Y]$ eliminante para L módulo $\mathcal{I}^e$ es también un polinomio eliminante para L módulo $(\mathcal{I} : \det(J)^\infty)$, y la recíproca es consecuencia del Lema 5.5 que enunciamos y demostramos más adelante.

Como consecuencia del Lema 5.1 obtenemos una expresión explícita de un polinomio de eliminación para U_1 módulo $\mathcal{I}$.

Corolario 5.4 *Sean $N^{(p)} := (p^n - p)/(p-1)$ y $N^{(q)} := q(p^{n-1} - 1)/(p-1)$. Existen racionales $c_j > 0$ $(0 \leq j \leq N^{(p)})$ y $\widetilde{c}_i > 0$ $(0 \leq i \leq N^{(q)})$ tales que se cumple la siguiente identidad en $\mathbb{Q}[\Xi, T, U]/\mathcal{I}$:*

$$\sum_{j=0}^{N^{(p)}} c_j B^{j+1} T^{2(j+1)} U_1^{(p-1)j+p} = \sum_{j=0}^{N^{(q)}} \widetilde{c}_j A B^j T^{2j+1} U_1^{(p-1)j+q}. \tag{5.5}$$

Demostración: Reescribimos la identidad $F_n = 0$ de $\mathbb{Q}[\Xi, T, U]/\mathcal{I}$ de la siguiente forma:

$$U_n - U_{n-1} + B\frac{T^2}{2} U_n^p = A T U_n^q.$$

Reemplazando U_n y $U_n - U_{n-1}$ por las correspondientes parametrizaciones $\widetilde{P}_n(\Xi, T, U_1)$ y $P_n(\Xi, T, U_1)$ de acuerdo a las igualdades (5.3) y (5.2) para $k = n$, obtenemos la siguiente igualdad en $\mathbb{Q}[\Xi, T, U]/\mathcal{I}$:

$$P_n(\Xi, T, U_1) + B\frac{T^2}{2} \widetilde{P}_n(\Xi, T, U_1)^p = A T \widetilde{P}_n(\Xi, T, U_1)^q. \tag{5.6}$$

Argumentando como en la demostración del Lema 5.1 vemos que existen racionales $c_j > 0$ $(0 \leq j \leq N^{(p)})$ tales que

$$P_n(\Xi, T, U_1) + B\frac{T^2}{2}\widetilde{P}_n(\Xi, T, U_1)^p = \sum_{j=0}^{N^{(p)}} c_j B^{j+1} T^{2(j+1)} U_1^{(p-1)j+p}.$$

Argumentando como en la demostración de la primera afirmación del Lema 5.1 vemos que existen $\widetilde{c}_i \geq 0$ $(0 \leq i \leq N^{(q)})$ tales que

$$\widetilde{P}_n(\Xi, T, U_1)^q = \sum_{j=0}^{N^{(q)}} \widetilde{c}_j B^j T^{2j} U_1^{(p-1)j+q}.$$

Escribimos $\widetilde{P}_n = U_1 \sum_{j=0}^{N_n+1} \widetilde{c}_{j-1,n} B^j T^{2j} U_1^{(p-1)j}$. Sea $0 \leq j \leq N := q(N_n+1)$ fijo. Entonces existen $0 \leq j_1, \ldots, j_q \leq N_n + 1$ tales que $j = j_1 + \cdots + j_q$. Por lo tanto, al igual que en la demostración de la segunda afirmación del Lema 5.1, vemos que el monomio

$$U_1^q \Big(\prod_{i=1}^q \widetilde{c}_{j_i-1,n} T^{2j_i} U_1^{(p-1)j_i} \Big) = U_1^q \Big(\prod_{i=1}^q \widetilde{c}_{j_i-1,n} \Big) T^{2j} U_1^{(p-1)j}$$

es un sumando en la expansión monomial de $\widetilde{P}_n(\Xi, T, U_1)^q$. Esto muestra que $\widetilde{c}_j > 0$ para $0 \leq j \leq N^{(q)}$ y prueba que la identidad (5.5) tiene la forma deseada. ■

Definimos

$$\begin{array}{rcl} P^{(1)}(\Xi, T, U_1) & := & \sum_{j=0}^{N^{(p)}} c_j B^{j+1} T^{2j+1} U_1^{(p-1)j+p-r}, \\ P^{(2)}(\Xi, T, U_1) & := & A \sum_{j=0}^{N^{(q)}} \widetilde{c}_j B^j T^{2j} U_1^{(p-1)j+q-r}, \\ P(\Xi, T, U_1) & := & U_1^r T (P^{(2)}(\Xi, T, U_1) - P^{(1)}(\Xi, T, U_1)), \end{array}$$

donde $r := \text{mín}\{p, q\}$. El Corolario 5.4 asegura que P es un polinomio de eliminación para U_1 módulo $\mathcal{I}$. Consideremos una factorización

$$P = \rho(\Xi, T) \prod_{i=1}^N (U_1 - \rho_i(\Xi, T))$$

de P sobre una clausura algebraica de $\mathbb{Q}(\Xi, T)$, donde $N := \text{máx}\{N^{(p)}, N^{(q)}\}$. Cada factor de P puede identificarse con una componente irreducible de $V := V(\mathcal{I} : \det(J)^\infty) \subset \mathbb{C}^{n+3}$. En particular, el factor U_1^r de P representa la componente irreducible $C := \{U_1 = \cdots = U_n = 0\}$ de V para los polinomios $F_1, \ldots, F_n$.

Consideramos a V como la familia paramétrica de variedades cero–dimensionales definidas por la proyección $\pi : V \longrightarrow \mathbb{C}^3$ dada por $\pi(\xi, t, u) :=$

(α, β, t). Desde este punto de vista, dejando de lado la componente irreducible obvia C, vamos a calcular el polinomio

$$P^*(\Xi, T, U_1) := P^{(2)}(\Xi, T, U_1) - P^{(1)}(\Xi, T, U_1).$$

Notamos $V^* := \overline{V \setminus C}$ a la clausura Zariski de $V \setminus C$ y como $I(V^*) \subset \mathbb{Q}[\Xi, T, U]$ el ideal de V^*. Sea $I(V^*)^e := \mathbb{Q}(\Xi, T) \otimes I(V^*)$. En el siguiente resultado damos una caracterización de la familia de polinomios de eliminación que vamos a considerar:

Lema 5.5 *El polinomio $P^*(\Xi, T, Y)$ es irreducible en $\mathbb{C}[\Xi, T, Y]$. En particular, $P^*(\Xi, T, U_1)$ es el polinomio minimal (primitivo) de U_1 en la extensión de cuerpos $\mathbb{Q}(\Xi, T) \hookrightarrow \mathbb{Q}(\Xi, T)[U]/I(V^*)^e$.*

Demostración: Por construcción, es claro que $P^*(\Xi, T, Y)$ es un polinomio de eliminación para U_1 módulo el ideal $I(V^*)^e \subset \mathbb{Q}(\Xi, T)[U]$.

De acuerdo a las identidades (5.2), (5.3) y $F_n = 0$, tenemos que

$$P(\Xi, T, Y) = T\widetilde{P}_n^q(\Xi, T, Y)A - \Big(\widetilde{P}_n(\Xi, T, Y) - \widetilde{P}_{n-1}(\Xi, T, Y) + \frac{1}{2}BT^2\widetilde{P}_n^p(\Xi, T, Y)\Big).$$

Esta identidad prueba que podemos considerar a $P(\Xi, T, Y)$ como un polinomio en A con coeficientes en $\mathbb{Q}[B, T, Y]$. Sea $Q(B, T, Y) \in \mathbb{Q}[B, T, Y]$ un divisor primo de los coeficientes de $P(\Xi, T, Y) \in \mathbb{Q}[B, T, Y][A]$. Como Q divide a $T\widetilde{P}_n^q(\Xi, T, Y)$, entonces $Q = T$ o Q divide a $\widetilde{P}_n(\Xi, T, Y)$. En caso que Q divida a $\widetilde{P}_n(\Xi, T, Y)$, usando que Q divide a $\widetilde{P}_n(\Xi, T, Y) - \widetilde{P}_{n-1}(\Xi, T, Y) + BT^2\widetilde{P}_n^p(\Xi, T, Y)/2$ deducimos que Q divide a $\widetilde{P}_{n-1}(\Xi, T, Y)$. Argumentando recursivamente concluimos que Q divide a $\widetilde{P}_1(\Xi, T, Y) = Y$. Por lo tanto, $Q = T$ o $Q = Y$. Teniendo en cuenta que TY^r es el monomio de mayor grado en Y y T que divide a P, vemos que $P^*(\Xi, T, Y)$ es un elemento primitivo de $\mathbb{C}[B, T, Y][A]$. Más aun, como P^* es un elemento de $\mathbb{Q}[B, T, Y][A]$ de grado 1 en A concluimos que es irreducible en $\mathbb{C}(B, T, Y)[A]$. Entonces el Lema de Gauss asegura que $P^*(\Xi, T, Y)$ es irreducible en $\mathbb{C}[\Xi, T, Y]$. ■

5.3. La complejidad del cálculo de proyecciones lineales

Considerando a V^* como la familia de variedades cero–dimensionales de $\mathbb{C}^n$ definida por la proyección $\pi : V^* \longrightarrow \mathbb{C}^3$, nos concentramos en el problema de calcular el polinomio $P^*(\xi, t, Y)$ para $\xi \in \mathbb{C}^2$ y $t \in \mathbb{C}^1$ dados. Más precisamente, nos concentramos en el problema del cálculo del polinomio minimal

$$M(\xi, t, \ell, Y) := P^*(\alpha t^{(p+1)(q-r)+1}, \beta t^{(p-1)^2}, \ell t^{p-1}, t^{-(p+1)}Y) \qquad (5.7)$$

de la proyección de $\pi^{-1}(\alpha t^{(p+1)(q-r)+1}, \beta t^{(p-1)^2}, \ell t^{p-1})$ determinada por la forma lineal $t^{p+1}U_1$ para $\ell \in \mathbb{C}^1$ dado. Con el objetivo de calcular complejidad de resolver este problema, vamos a usar un modelo de algoritmos robustos de eliminación simbólica presente en [CGH+03].

5.3.1. Un modelo para algoritmos de eliminación simbólica

En esta sección exhibimos un modelo de los algoritmos simbólicos que calculan el polinomio $M(\xi, t, \ell, Y)$ de (5.7) para valores de α, β, t y ℓ arbitrarios. En tal sentido, nuestra *estructura de datos* $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^4$ es el siguiente conjunto de valores "admisibles":

$$\mathcal{D} := \{(\alpha t^{(p+1)(q-r)+1}, \beta t^{(p-1)^2}, \ell t^{p-1}, t^{p+1}) : (\xi_1, \xi_2, t, \ell) \in \mathbb{C}^4\}.$$

Cada instancia admisible $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \in \mathcal{D}$, o *código de entrada*, determina o *codifica* un problema de eliminación, u *objeto de entrada*, es decir, el vector de representación densa

$$\big(F_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, U), \ldots, F_n(\tau_1, \tau_2, \tau_3, U), \tau_4 U_1\big).$$

El conjunto de todos los objetos de entrada $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^R$ se denomina la *clase de objetos de entrada* y se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{O} := \{\big(F_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, U), \ldots, F_n(\tau_1, \tau_2, \tau_3, U), \tau_4 U_1\big) \in \mathbb{C}^R : (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \in \mathcal{D}\},$$

donde $R := (n-1)\binom{p+n+1}{n+1} + \binom{\text{máx}\{p,q\}+n+1}{n+1} + 1$. En este sentido, tenemos un morfismo de conjuntos construibles

$$\begin{array}{rccl} \omega : & \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathcal{O} \\ & (\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) & \mapsto & \big(F_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, U), \ldots, F_n(\tau_1, \tau_2, \tau_3, U), \tau_4 U_1\big) \end{array}$$

que intuitivamente representa el conjunto de problemas de entrada admisibles con su correspondiente codificación. Remarcamos que toda codificación considerada aquí está dada por una restricción de un morfismo polinomial del correspondiente espacio ambiente de la estructura de datos y de la clase de objetos que consideramos. En particular, ω es la restricción de un morfismo polinomial $\mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^R$.

Como indicamos anteriormente, la salida de cada problema de eliminación $\omega(\alpha t^{(p+1)(q-r)+1}, \beta t^{(p-1)^2}, \ell t^{p-1}, t^{p+1}) \in \mathcal{O}$ es la representación densa del polinomio de eliminación $M(\xi, t, \ell, Y) \in \mathbb{C}[Y]$, esto es, el vector de coeficientes de dicho polinomio. Todos estos *objetos de salida* constituyen la *clase de objetos de salida* $\mathcal{O}^*$ de la familia de problemas de eliminación dados por $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$, que está definida de la siguiente forma:

$$\mathcal{O}^* := \{M(\xi, t, \ell, Y) \in \mathbb{C}^{\text{máx}\{p,q\}p^{n-1}} : (\alpha t^{(p+1)(q-r)+1}, \beta t^{(p-1)^2}, \ell t^{p-1}, t^{p+1}) \in \mathcal{D}\}.$$

Más aun, tenemos un morfismo de conjuntos construibles que asocia los objetos de entrada con los correspondientes objetos de salida (en su representación densa), es decir,

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{O}^* \\ & \omega(\alpha t^{(p+1)(q-r)+1}, \beta t^{(p-1)^2}, \ell t^{p-1}, t^{p+1}) & \mapsto & M(\xi, t, \ell, Y). \end{array}$$

En estos términos, ahora podemos decir lo que entendemos por un procedimiento de eliminación tipo Kronecker.

Definición 5.6 *Un* procedimiento de eliminación tipo Kronecker *que resuelve la familia de problemas de eliminación determinada por* $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$ *está dado por un conjunto construible* $\mathcal{D}^* \subset \mathbb{C}^S$*, llamado la* estructura de datos de salida*, con una codificación (polinomial)* $\omega^* : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{O}^*$ *de* $\mathcal{O}^*$*, y un morfismo polinomial* $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^*$ *tal que* $\Psi(\tau)$ *resuelve el problema de eliminación* $\omega(\tau)$ *para todo* $\tau := (\alpha t^{(p+1)(q-r)+1}, \beta t^{(p-1)^2}, \ell t^{p-1}, t^{p+1}) \in \mathcal{D}$*, es decir, la codificación de* $M(\xi, t, \ell, Y) = \Phi \circ \omega(\tau)$ *está representada por* $\Psi(\tau)$*. En otras palabras, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\omega"'] & \mathcal{D}^* \arrow[d, "\omega^*"] \\ \mathcal{O} \arrow[r, "\Phi"'] & \mathcal{O}^* \end{tikzcd}$$

5.3.2. La noción de robustez

Todo los procedimientos de eliminación conocidos poseen una propiedad, vamos a denominar *robustez* ([HMPW98], [Par00], [GH01], [CGH+03]). Por esta razón, en lo que sigue restringimos nuestra atención a algoritmos de eliminación robustos.

La familia de problemas de eliminación $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$ depende de cuatro parámetros continuos: α, β, t y ℓ. Como es habitual en la teoría de eliminación efectiva, nuestros objetos de salida dependen de forma racional de los parámetros de entrada. Dado que todos los algoritmos de eliminación conocidos poseen versiones libres de ramificaciones del mismo orden de complejidad, solo consideramos algoritmos libres de ramificaciones para resolver la familia de problemas de eliminación $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$. Pero en este caso, ciertos objetos de entrada admisibles pueden producir objetos de salida mal definidos. Con el objetivo de evitar esta dificultad, admitimos en lo que sigue ciertos procesos límites (algebraicos) que modelamos usando la noción de *places* (ver, por ejemplo, [ZS60]).

Más precisamente, admitimos un morfismo racional $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^*$, junto con la correspondiente codificación polinomial $\omega^* : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{O}^*$, como una solución de nuestra familia de problemas de eliminación $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$, si el valor $\Psi(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4)$ puede determinarse en el espíritu de la *regla de l'Hôpital* para todo $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) \in \mathcal{D}$. Estos algoritmos de eliminación se definen de la forma:

Definición 5.7 *Un algoritmo de eliminación* $\omega^* : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{O}^*$, $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^*$ *se llama* robusto *si, para todo* $\tau \in \mathcal{D}$ *y para todo place* $\varphi : \mathbb{C}(\overline{\mathcal{D}}) \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *que es finito sobre el anillo local* $\mathbb{C}[\overline{\mathcal{D}}]_{\mathfrak{M}_\tau}$*, el valor* $\varphi(\Psi_j)$ *de la* j*-ésima coordenada* Ψ_j *de* $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_S)$ *es finito y solo depende de* τ *para* $1 \leq j \leq S$.

Remarcamos que la definición anterior se puede expresar equivalentemente de la siguiente forma: para todo $\tau \in \mathcal{D}$, tenemos que

$$\mathbb{C}[\overline{\mathcal{D}}]_{\mathfrak{M}_\tau} \hookrightarrow \mathbb{C}[\overline{\mathcal{D}}]_{\mathfrak{M}_\tau}[\Psi_1, \ldots, \Psi_S]$$

es una extensión integral de anillos.

Una clase importante de ejemplos de procedimientos de eliminación robustos es la de los *procedimientos de eliminación invariantes* (ver [HMPW98], [CGH$^+$03]). En nuestro contexto, a dos puntos $\tau := (\alpha t^{(p+1)(q-r)+1}, \beta t^{(p-1)^2}, \ell t^{p-1}, t^{p+1})$, $\tau' := (\alpha' t'^{(p+1)(q-r)+1}, \beta' t'^{(p-1)^2}, \ell' t'^{p-1}, t'^{p+1}) \in \mathbb{C}^4$ los llamamos *equivalentes* (en símbolos: $\tau \sim \tau'$) si $\omega(\tau) = \omega(\tau')$. Observemos que $\tau \sim \tau'$ implica $M(\xi, t, \ell, Y) = M(\xi', t', \ell', Y)$. Llamamos a polinomios $\Gamma_1 \in k[\Theta, U]$, $\Gamma_2 \in k[\Theta, Y]$ y $\Gamma_3 \in k[\Theta]$ *invariantes* (con respecto a $\sim$) si para todo par de puntos equivalentes $\tau, \tau' \in \mathbb{C}^4$ se cumplen las identidades $\Gamma_1(\tau, U) = \Gamma_1(\tau', U)$, $\Gamma_2(\tau, Y) = \Gamma_2(\tau', Y)$ y $\Gamma_3(\tau) = \Gamma_3(\tau')$.

Supongamos que el procedimiento de eliminación $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^*$ es *totalmente libre de divisiones* (es decir, la solución general $M(\xi, t, \ell, Y)$ de un problema de eliminación dado está en $\mathbb{Q}[\tau][Y]$). Llamamos a Ψ *invariante* (con respecto a la relación de equivalencia $\sim$) si $\Psi_1, \ldots, \Psi_S$ son polinomios invariantes. Que el procedimiento de eliminación Ψ sea invariante significa que para cualquier código de entrada $\tau \in \mathbb{C}^4$ el código $\omega(\tau) \in \mathcal{D}^*$ del correspondiente objeto de salida $M(\xi, t, \ell, Y)$ depende solo del *objeto de entrada*, y no de una representación particular τ. En otras palabras, un procedimiento de eliminación invariante produce la solución de una instancia particular del problema de una forma independiente de las diferentes representaciones de dicha instancia.

Dado que todos procedimientos de eliminación tipo Kronecker conocidos producen representaciones libres de ramificaciones y totalmente libres de divisiones del polinomio de salida, y dado que se basan en la manipulación del objeto de entrada (y no en su representación particular) con técnicas de álgebra lineal o de bases de Gröbner, concluimos que dichos algoritmos son procedimientos de eliminación invariantes y robustos.

5.3.3. La complejidad de los algoritmos de eliminación robustos

Para un procedimiento de eliminación $\omega^* : \mathcal{D}^* \subset \mathbb{C}^S \longrightarrow \mathcal{O}^*$, $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^*$, la dimensión S del espacio ambiente $\mathcal{D}^*$ se llama la *complejidad del procedimiento de eliminación* ω^*, Ψ, y se denota por $\mu(\mathcal{D}, \mathcal{O}^*, \Psi)$. La mínima complejidad $\mu(\mathcal{D}, \mathcal{O}^*, \Psi)$ de todos los procedimientos de eliminación que resuelven la familia de problemas de eliminación $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$, $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$ se llama la *complejidad de la familia de problemas de eliminación* $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$, $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$, y se denota por $\mu_{min}(\mathcal{D}, \mathcal{O}^*)$. En símbolos, $\mu_{min}(\mathcal{D}, \mathcal{O}^*) := \min_\Psi \mu(\mathcal{D}, \mathcal{O}^*, \Psi)$.

Remarcamos que esta noción de complejidad es una generalización de tres medidas de complejidad estándar en la teoría de eliminación efectiva: el tamaño de la representación densa o rala y la longitud (no escalar) de la representación por medio de *straight–line programs*. De hecho, es claro que el tamaño mínimo de la representación rala o densa de una familia "continua" $\mathcal{F} := \{Q_j : j \in \mathcal{J}\} \subset \mathbb{C}[U_1, \ldots, U_n]$ de polinomios de grado acotado es una cota inferior para la complejidad del cálculo de dicha representación de un miembro genérico de $\mathcal{F}$. En otras palabras, el costo de un algoritmo cuya salida es la representación densa o rala de los miembros de $\mathcal{F}$ se acota inferiormente por la dimensión del menor espacio ambiente $\mathbb{C}^S$ que contiene a $\mathcal{F}$. Por otro lado, para un polinomio $F \in \mathbb{C}[U_1, \ldots, U_n]$ dado, consideramos la mínima longitud no escalar $L(F)$ de un *straight–line program* que evalúa a F. Sean $L \in \mathbb{N}$ y $W_L := \{F \in \mathbb{C}[U_1, \ldots, U_n] : L(F) \leq L\}$. De [BCS97, Exercise 9.18] (ver también [HS82, Theorem 3.2]) deducimos que W_L es un subconjunto construible de $\mathbb{C}^{(L+n+1)^2}$ y la dimensión $(L+n+1)^2$ del espacio ambiente de W_L refleja la complejidad (no escalar) de un *straight–line program* para un polinomio genérico $F \in W_L$.

5.4. La cota inferior

En esta sección probamos que cualquier algoritmo robusto que resuelve la familia de problemas de eliminación $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$ tiene complejidad $\Omega(qp^{n-2})$, esto es, $\Omega(D)$ salvo términos polinomiales en p y q.

Más precisamente, vamos a mostrar que, dado un procedimiento de eliminación robusto $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^*$, $\omega^* : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{O}^*$ que resuelve nuestra familia de problemas de eliminación $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$, $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$, la dimensión S del espacio ambiente $\mathbb{C}^S$ de $\mathcal{D}^*$ es al menos $N^{(q)} + 1 = \Omega(qp^{n-2})$. Esto es una consecuencia del hecho de que el espacio tangente de $\mathcal{D}^*$ en $\mathbf{0}$ tiene dimensión al menos $N^{(q)} + 1$. Con el objetivo de probar este hecho, vamos a exhibir $N^{(q)} + 1$ curvas contenidas en $\mathcal{D}^*$ que pasan por $\mathbf{0}$ con vectores tangentes $\mathbb{C}$–linealmente independientes. Estas curvas se obtienen fijando $\alpha, \beta, \ell \in \mathbb{C}^1 \setminus \{0\}$ y variando t.

Ahora enunciamos y probamos nuestro resultado principal.

Teorema 5.8 *Con las notaciones e hipótesis anteriores, tenemos la siguiente cota inferior:*

$$\mu_{min}(\mathcal{D}, \mathcal{O}^*) \geq N^{(q)} + 1 = \Omega(qp^{n-2}).$$

Demostración: Sea $\omega^* : \mathcal{D}^* \subset A^S \longrightarrow \mathcal{O}^*$, $\Psi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}^*$, un procedimiento de eliminación robusto que resuelve la familia de problemas de eliminación $\omega : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$, $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$.

Dado que

$$\mathcal{D} = \{(\alpha t^{(p+1)(q-r)+1}, \beta t^{(p-1)^2}, \ell t^{p-1}, t^{p+1}) : (\xi, t, \ell) \in \mathbb{C}^4\},$$

identificamos $\mathbb{C}[\mathcal{D}]$ con

$$\mathbb{C}[AT^{(p+1)(q-r)+1}, BT^{(p-1)^2}, LT^{p-1}, T^{p+1}] \subset \mathbb{C}[T, \Xi, L],$$

el ideal maximal $\mathfrak{M}_\mathbf{0} \subset \mathbb{C}[\mathcal{D}]$ con

$$(AT^{(p+1)(q-r)+1}, BT^{(p-1)^2}, LT^{p-1}, T^{p+1}) \subset \mathbb{C}[T, \Xi, L],$$

el cuerpo de funciones racionales $\mathbb{C}(\mathcal{D})$ con el cuerpo de funciones racionales

$$\mathbb{C}(AT^{(p+1)(q-r)+1}, BT^{(p-1)^2}, LT^{p-1}, T^{p+1}) \subset \mathbb{C}(T, \Xi, L)$$

y el anillo local $\mathbb{C}[\mathcal{D}]_{\mathfrak{M}_\mathbf{0}}$ con $\mathcal{S}^{-1}\mathbb{C}[AT^{(p+1)(q-r)+1}, BT^{(p-1)^2}, LT^{p-1}, T^{p+1}]$, donde $\mathcal{S}$ es el conjunto multiplicativo

$$\mathcal{S} := \{\rho(AT^{(p+1)(q-r)+1}, BT^{(p-1)^2}, LT^{p-1}, T^{p+1}) : \rho \in \mathbb{C}[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4], \rho(0,0,0,0) \neq 0\}.$$

Consideramos las coordenadas $\Psi_1, \ldots, \Psi_S \in \mathbb{C}(\mathcal{D})$ de Ψ como elementos de $\mathbb{C}(\Xi_1 T^{(p+1)(q-r)+1}, \Xi_2 T^{(p-1)^2}, LT^{p-1}, T^{p+1}) \subset \mathbb{C}(T, \Xi, L)$. De la definición de robustez vemos que $\Psi_1, \ldots, \Psi_S$ son integrales sobre $\mathbb{C}[\mathcal{D}]_{\mathfrak{M}_\mathbf{0}}$, o equivalentemente, sobre $\mathcal{S}^{-1}\mathbb{C}[AT^{(p+1)(q-r)+1}, BT^{(p-1)^2}, LT^{p-1}, T^{p+1}] \subset \mathcal{S}^{-1}\mathbb{C}[T, \Xi, L]$. Dado que $\mathcal{S}^{-1}\mathbb{C}[T, \Xi, L]$ es integralmente cerrado en su cuerpo de fracciones, deducimos que $\Psi_1, \ldots, \Psi_S$ pertenecen a $\mathcal{S}^{-1}\mathbb{C}[T, \Xi, L]$.

Fijamos $1 \leq j \leq S$ y escribimos $\Psi_j = a_j/b_j$ con $a_j \in \mathbb{C}[T, \Xi, L]$ y $b_j \in \mathcal{S}$. Tenemos una ecuación de dependencia entera

$$\Big(\frac{a_j}{b_j}\Big)^{m_j} + \frac{p_{j,m_j-1}}{q_{j,m_j-1}}\Big(\frac{a_j}{b_j}\Big)^{m_j-1} + \cdots + \frac{p_{j,0}}{q_{j,0}} = 0,$$

con $p_{j,i}, q_{j,i} \in \mathbb{C}[AT^{(p+1)(q-r)+1}, BT^{(p-1)^2}, LT^{p-1}, T^{p+1}]$ y $q_{j,i} \in \mathcal{S}$ para $0 \leq i \leq m_j - 1$. La condición $p_{j,i}, q_{j,i} \in \mathbb{C}[AT^{(p+1)(q-r)+1}, BT^{(p-1)^2}, LT^{p-1}, T^{p+1}]$ para $0 \leq i \leq m_j - 1$ implica que $p_{j,i}(0, \Xi, L) \in \mathbb{C}$ y $q_{j,i}(0, \Xi, L) \in \mathbb{C}$. Además, como $q_{j,i} \in \mathcal{S}$, tenemos que $q_{j,i}(0, \Xi, L) \neq 0$ para $0 \leq i \leq m_j - 1$. En consecuencia, tenemos que

$$\Psi_j(0, \Xi, L) \in \mathbb{C} \quad \text{para } 1 \leq j \leq S. \tag{5.8}$$

Por la definición de robustez se deduce que $\Psi(t,\xi,\ell)$ está bien definida para todo $(\xi,t,\ell)\in\mathbb{C}^4$. En particular, para todo $(\xi',\ell')\in\mathbb{C}^3$ en un entorno del $(0,0,0)\in\mathbb{C}^3$ tenemos que $\Psi(0,\xi',\ell')$ está bien definida.

Fijemos $\xi\in(\mathbb{Q}\setminus\{0\})^2$ y consideremos $N^{(q)}+1$ números racionales distintos $\ell_0,\ldots,\ell_{N^{(q)}}\in\mathbb{Q}$. Sea $\gamma_j:\mathbb{C}^1\dashrightarrow\mathbb{C}^4$ el morfismo definido por $\gamma_j(t):=(t,\xi,\ell_j)$ para $0\le j\le N^{(q)}$. Los argumentos previos muestran que el morfismo $\sigma_j:\mathbb{C}^1\dashrightarrow\mathcal{O}^*$ dado por $\sigma_j(t):=\omega^*\circ(\Psi_1,\ldots,\Psi_S)\circ\gamma_j(t)$ está bien definido y es holomorfo en un entorno de $T=0$ en $\mathbb{C}^1$. Además, de (5.7) se deduce la identidad

$$\sigma_j(t)=\Phi\circ\omega\circ\gamma_j(t)=tP^{(2)}(\xi,\ell_j,Y)-t^{p(r-2)+r}P^{(1)}(\xi,\ell_j,Y)\qquad(5.9)$$

en un entorno de $T=0$ en $\mathbb{C}^1$ para $0\le j\le N^{(q)}$, donde, con abuso de notación, por $P^{(i)}(\xi,\ell_j,Y)$ nos referimos en realidad a la representación densa de dicho polinomio para $i=1,2$. Si $r\ge 2$, entonces, aplicando la regla de la cadena a (5.9), obtenemos

$$D\sigma_j(0)=P^{(2)}(\xi,\ell_j,Y)=D\omega^*\big(\Psi(0,\xi,\ell_j)\big)\cdot D(\Psi\circ\gamma_j)(0).$$

Por (5.8) tenemos que $\Psi(0,\xi,\ell_j)\in\mathbb{C}^S$ es un vector complejo independiente de ℓ_j. Por lo tanto, $\mathcal{M}:=D\omega^*(\Psi(0,\xi,\ell_j))$ es una matriz compleja de tamaño $(\text{máx}\{p,q\}p^{n-1})\times S$ independiente de ℓ_j. Dado que $D\sigma_j(0)=\mathcal{M}\cdot D(\Psi\circ\gamma_j)(0)$ para $0\le j\le N^{(q)}$, concluimos que el vector $D\sigma_j(0)=P^{(2)}(\xi,\ell_j,Y)$ se encuentra en la imagen de $\mathcal{M}$ para $0\le j\le N^{(q)}$.

De la representación densa de $P^{(2)}$ deducimos que, para elecciones genéricas de $\ell_0,\ldots,\ell_{N^{(q)}}\in\mathbb{Q}$, los vectores $D\sigma_j(0)$ son linealmente independientes. Efectivamente, descartando los coeficientes nulos, estos vectores forman una matriz de Vandermonde $V(\ell_0^2,\ldots,\ell_{N^{(q)}}^2)$ de tamaño $(N^{(q)}+1)\times(N^{(q)}+1)$. Por lo tanto, para una elección de $\ell_0,\ldots,\ell_{N^{(q)}}\in\mathbb{Q}$ con $\ell_i^2\neq\ell_j^2$ para $0\le i<j\le N^{(q)}$, deducimos que $\{D\sigma_j(0):0\le j\le N^{(q)}\}$ es un conjunto $\mathbb{Q}$–linealmente independiente. Esto muestra que $S\ge\operatorname{rank}\mathcal{M}\ge N^{(q)}+1$ y finaliza la demostración del teorema. ∎

El Teorema 5.8 demuestra que, independientemente de la estructura de datos y del procedimiento de eliminación (robusto) usado para resolver (5.1), un factor del orden $D^{\Omega(1)}$ necesariamente aparece en la estimación de complejidad en el peor caso, donde D es el número de Bézout del sistema (5.1). Por otro lado, observamos que la magnitud de la constante subyacente en la notación $\Omega(1)$ sí depende de la estructura de datos en consideración. En el caso de la representación rala y la representación por medio de *straight–line programs*, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.9 *Sea $\omega^*:\mathcal{D}^*\longrightarrow\mathcal{O}^*$, $\Psi:\mathcal{D}\dashrightarrow\mathcal{D}^*$ un procedimiento de eliminación que resuelve la familia de problemas de eliminación $\omega:\mathcal{D}\dashrightarrow\mathcal{O}$, $\Phi:\mathcal{O}\dashrightarrow\mathcal{O}^*$. Entonces:*

1. *Si la estructura de datos de salida* $\omega^* : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{O}^*$ *corresponde a la representación rala del polinomio minimal* $M(\xi, t, \ell, Y)$*, entonces* Ψ *realiza* $\Omega(qp^{n-2})$ *operaciones aritméticas en* $\mathbb{Q}$.

2. *Si la estructura de datos de salida* $\omega^* : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{O}^*$ *corresponde a la representación por medio de straight–line programs del polinomio minimal* $M(\xi, t, \ell, Y)$*, entonces* Ψ *realiza* $\Omega(\sqrt{qp^{n-2}})$ *operaciones aritméticas en* $\mathbb{Q}$.

Demostración: Supongamos primero que la codificación $\omega^* : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{O}^*$ es la codificación rala de los polinomios $M(\xi, t, \ell, Y)$. Entonces por el Teorema 5.8 concluimos que deben calcularse al menos $\Omega(qp^{n-2})$ coeficientes de los polinomios $M(\xi, t, \ell, Y)$. Esto muestra que el correspondiente algoritmo debe realizar al menos $\Omega(qp^{n-2})$ operaciones aritméticas en $\mathbb{Q}$ y demuestra la primera afirmación.

Ahora supongamos que la codificación $\omega^* : \mathcal{D}^* \longrightarrow \mathcal{O}^*$ es la codificación *straight–line program* de los polinomios $M(\xi, t, \ell, Y)$, es decir, el correspondiente algoritmo Ψ calcula los parámetros de un *straight–line program* que evalúa los polinomios $M(\xi, t, \ell, Y)$ para una entrada admisible. Del Teorema 5.8 concluimos que este *straight–line program* no puede describirse con menos de $N^{(q)} + 1$ parámetros. Teniendo en cuenta que la variedad formada por todos los polinomios en $\mathbb{C}[Y]$ que se evalúan por un *straight–line program* de longitud al menos L pertenecen a un subconjunto construible de $\mathbb{C}^{(L+2)^2}$ (ver, por ejemplo, [BCS97, Theorem 9.9] o [HS82, Theorem 3.2]), concluimos que el *straight–line program* construido por el algoritmo Ψ tiene longitud al menos $\Omega(\sqrt{qp^{n-2}})$. Esto finaliza la demostración del corolario. ∎

Observamos que las cotas inferiores del corolario son casi optimales para cada codificación. En efecto, la cota inferior $\Omega(qp^{n-2})$ de la primera afirmación del corolario está cerca de la cota inferior optima, $\max\{p, q\}p^{n-1} + 1$, para la codificación rala de polinomios univariados de grado $\max\{p, q\}p^{n-1}$. Por otro lado, la cota inferior de la segunda afirmación está cercana a la cota inferior optima de Paterson–Stockmeyer, $\Omega(\sqrt{\max\{p, q\}p^{n-1}})$, para los *straight–line program* que codifica los polinomios univariados de grado como mucho $\max\{p, q\}p^{n-1}$ (ver, por ejemplo, [BCS97, Proposition 9.2]).

Finalmente, cabe destacar que, de acuerdo con [DDM05, Theorem 13], tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.10 *Existe un algoritmo simbólico que calcula la representación densa del polinomio minimal de una proyección lineal arbitraria del conjunto de soluciones complejas del sistema (5.1) con* $O(D^2)$ *operaciones aritméticas, salvo términos logarítmicos.*

A partir del Corolario 5.9(1) deducimos que el algoritmo del Teorema 5.10 tiene complejidad “cercana” a la óptima.

Capítulo 6

Condicionamiento numérico

Sean g_1 y g_2 funciones de clase $\mathcal{C}^3$ en $\mathbb{R}$ y analíticas en $x = 0$ tales que $g_i(0) = 0$, $g_i'(x) > 0$, $g_i''(x) > 0$ y $g_i'''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$ con $i = 1, 2$. Consideramos nuevamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0 &= -\big(U_2 - U_1\big) + \frac{h^2}{2} g_1(U_1), \\ 0 &= -\big(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}\big) + h^2 g_1(U_k), \qquad (2 \leq k \leq n-1), \\ 0 &= -\big(U_{n-1} - U_n\big) - hAg_2(U_n) + \frac{h^2}{2} g_1(U_n). \end{cases} \tag{6.1}$$

En el Capítulo 5 mostramos que los métodos simbólicos que calculan la solución positiva de (6.1) para un valor dado de A requieren una cantidad exponencial en n de operaciones aritméticas, de lo cual deducimos que (6.1) está mal condicionado para su resolución por medio de algoritmos simbólicos. Por lo tanto, en este capítulo analizamos la factibilidad de resolver (6.1) utilizando métodos numéricos.

Más precisamente, fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha^* > 0$. Con el fin de calcular en forma aproximada la solución positiva de (6.1) para estos valores de n y $A := \alpha^*$, partiendo de un valor α_* de A donde se pueda aproximar la solución correspondiente con buena precisión, vamos a seguir la curva determinada por las soluciones positivas de (6.1) cuando A recorre el intervalo cuyos extremos son α_* y α^*. El costo de esta estrategia queda esencialmente determinado por el número de condición de la curva en consideración, cuyo análisis es el objetivo central de este capítulo.

Sea $F := F(A, U) : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la función definida por la parte derecha de (6.1). La matriz Jacobiana de F con respecto a las variables U es

$$J(A,U) := \frac{\partial F}{\partial U}(A,U) := \begin{pmatrix} \Gamma_1 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & \Gamma_n \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

con

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_1 & := & 1 + \frac{1}{2}h^2 g_1'(U_1), \\ \Gamma_i & := & 2 + h^2 g_1'(U_i), \quad (2 \le i \le n-1), \\ \Gamma_n & := & 1 + \frac{1}{2}h^2 g_1'(U_n) - hAg_2'(U_n). \end{array}$$

El número de condición que vamos a estudiar está esencialmente determinado por la inversa de la matriz Jacobiana $J(A,U)$, y el vector gradiente $(\partial F/\partial A)(A,U)$ en la curva en cuestión. En este capítulo demostramos la inversibilidad de dicha matriz Jacobiana, y obtenemos una forma explícita de su inversa. Además, obtenemos una cota superior del número de condición de dicha curva.

En primer lugar, recordamos que, a partir del sistema (6.1), se deducen las siguientes relaciones recursivas (ver (3.5) del Capítulo 3):

$$\begin{array}{rcl} U_1(u_1) & := & u_1, \\ U_2(u_1) & := & u_1 + \frac{h^2}{2} g_1(u_1), \\ U_{k+1}(u_1) & := & 2U_k(u_1) - U_{k-1}(u_1) + h^2 g_1(U_k(u_1)), \quad (2 \le k \le n-1), \\ A(u_1) & := & (\frac{1}{h}(U_n - U_{n-1})(u_1) + \frac{h}{2} g_1(U_n(u_1)))/g_2(U_n(u_1)). \end{array} \tag{6.3}$$

Además, como en los capítulos anteriores, consideramos las siguientes funciones auxiliares.

Definición 6.1

- *Llamamos* $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *a la función* $g(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$.
- *Llamamos* $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a la función primitiva de* g_1 *que cumple* $G_1(0) = 0$.
- *Llamamos* $G : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ *a la función* $G(x) := G_1(x)/g_2^2(x)$.

6.1. Inversibilidad de la matriz Jacobiana

Sea $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (6.1). Derivando respecto de U_1 en (6.3) y sustituyendo U_1 por u_1 obtenemos el siguiente sistema tridiagonal:

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1(u_1) & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & \Gamma_n(u_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ U_2'(u_1) \\ \vdots \\ U_n'(u_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ hg_2(U_n(u_1))A'(u_1) \end{pmatrix}.$$

Para $1 \leq k \leq n-1$, notamos por $\Delta_k(A,U)$ al k-ésimo menor principal de la matriz $J(A,U)$, esto es, la matriz formada por las primeras k filas y las primeras k columnas de $J(A,U)$. Por la regla de Cramer deducimos las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} hg_2(U_n(u_1))A'(u_1) &= \det\big(J(\alpha,u)\big), &(6.4)\\ \det\big(J(\alpha,u)\big)U_k'(u_1) &= hg_2(U_n(u_1))A'(u_1)\det\big(\Delta_{k-1}(\alpha,u)\big), &(6.5)\end{aligned}$$

para $2 \leq k \leq n$. A partir de estas identidades obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.2 *Sea $(\alpha,u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (6.1). Si $A'(u_1) \neq 0$, entonces la matriz $J(\alpha,u)$ es inversible y $\det\big(J(\alpha,u)\big)A'(u_1) > 0$.*

Demostración: Sea $(\alpha,u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (6.1). Dado que $hg_2(u_1) > 0$, gracias a la identidad (6.4), observamos que $A'(u_1) \neq 0$ si y solo si $\det\big(J(\alpha,u)\big) \neq 0$. Más aun, $A'(u_1) > 0$ si y solo si $\det\big(J(\alpha,u)\big) > 0$, de donde deducimos el enunciado del teorema. ■

Del Teorema 6.2 se deduce el siguiente corolario que caracteriza la estructura de $J(\alpha,u)$.

Corolario 6.3 *Sea $(\alpha,u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (6.1). Si $A'(u_1) \neq 0$ entonces el menor principal $\Delta_{n-1}(\alpha,u)$ es simétrico definido positivo. Más aún, si $A'(u_1) > 0$ entonces la matriz $J(\alpha,u)$ es simétrica definida positiva.*

Demostración: Sea $(\alpha,u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (6.1). Las matrices $J(\alpha,u)$ y $\Delta_{n-1}(\alpha,u)$ son simétricas por definición. Por lo tanto, falta demostrar que las matrices $J(\alpha,u)$ y $\Delta_{n-1}(\alpha,u)$ son definidas positivas. Supongamos que $A'(u_1) \neq 0$. Entonces, combinando (6.4) y (6.5) con el Teorema 6.2, se deducen las siguientes identidades:

$$U_k'(u_1) = \det\big(\Delta_{k-1}(\alpha,u)\big)(u_1) \quad (2 \leq k \leq n). \qquad (6.6)$$

Combinando (6.6) con el Lema 3.2 vemos que $\det\big(\Delta_k(\alpha,u)\big) > 0$ para $1 \leq k \leq n-1$. Entonces el criterio de Sylvester nos muestra que la matriz $\Delta_{n-1}(\alpha,u)$ es definida positiva. Es más, si $A'(u_1) > 0$, entonces $\det\big(J(\alpha,u)\big) > 0$ y, por el mismo criterio, la matriz $J(\alpha,u)$ es definida positiva. ■

6.2. Una factorización de la inversa de la matriz Jacobiana

Habiendo mostrado la inversibilidad de la matriz $J(\alpha,u)$ para la solución $(\alpha,u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ de (6.1) en los casos que estamos estudiando, el próximo paso consiste en obtener una expresión explícita la matriz inversa $J^{-1}(\alpha, u)$. Con este fin, enunciamos el siguiente resultado sobre la estructura de la matriz $J^{-1}(\alpha, u)$.

Proposición 6.4 *Sea $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (6.1). Si $A'(u_1) \neq 0$, entonces la matriz $J^{-1}(\alpha, u)$ tiene la siguiente factorización:*

$$J^{-1}(\alpha,u) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{u_2'} & \frac{1}{u_3'} & \cdots & \frac{1}{u_n'} \\ & 1 & \frac{u_2'}{u_3'} & \cdots & \frac{u_2'}{u_n'} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & \frac{u_{n-1}'}{u_n'} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2'} & & & & \\ \frac{1}{u_3'} & \frac{u_2'}{u_3'} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ \frac{1}{u_n'} & \frac{u_2'}{u_n'} & \cdots & \frac{u_{n-1}'}{u_n'} & \\ \frac{1}{d(J)} & \frac{u_2'}{d(J)} & \cdots & \frac{u_{n-1}'}{d(J)} & \frac{u_n'}{d(J)} \end{pmatrix},$$

donde $d(J) := \det\big(J(\alpha,u)\big)$ y $u_k' := U_k'(u_1)$ para $2 \leq k \leq n$.

Demostración: Por el Corolario 6.3, la matriz $\Delta_{n-1}(\alpha, u)$ es tridiagonal, simétrica y definida positiva. Por lo tanto, tiene una factorización de Cholesky, es decir $\Delta_{n-1}(\alpha,u) = \widetilde{L}\widetilde{D}\widetilde{L}^t$, donde las matrices $\widetilde{L} := \widetilde{L}(\alpha, u_1)$ y $\widetilde{D} := \widetilde{D}(\alpha, u_1)$ están dadas por

$$\widetilde{L} := \begin{pmatrix} L_1 & & & \\ -1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & L_{n-1} \end{pmatrix}, \ \widetilde{D}^{-1} := \begin{pmatrix} L_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & L_{n-1} \end{pmatrix},$$

con $L_1 := \Gamma_1$ y $L_k := \Gamma_k - \frac{1}{L_{k-1}}$ para $2 \leq k \leq n-1$ (ver, por ejemplo, [Meu00, §1.7]). Dado que $\Delta_k(\alpha, u)$ es el k-ésimo menor principal de $J(\alpha, u)$, se cumple que

$$\det\big(\Delta_k(\alpha,u)\big) = L_1 \cdots L_k \tag{6.7}$$

para $1 \leq k \leq n-1$, de donde se deduce que $L_k > 0$ para $1 \leq k \leq n-1$. Por lo tanto, a partir de la factorización de $\Delta_{n-1}(\alpha, u)$ obtenemos una factorización similar para $J(\alpha, u)$, es decir $J(\alpha, u) = LDL^t$, donde las matrices $L := L(\alpha, u_1)$ y $D := D(\alpha, u_1)$ son las siguientes:

$$L := \begin{pmatrix} \widetilde{L} & \\ v & L_n \end{pmatrix}, \ D^{-1} := \begin{pmatrix} \widetilde{D}^{-1} & \\ & L_n \end{pmatrix},$$

con $v := (0, \ldots, 0, -1) \in \mathbb{R}^{1\times(n-1)}$ y $L_n := \Gamma_n - \frac{1}{L_{n-1}}$. Además, tenemos que

$$L_1(u_1) \cdots L_n(u_1) = \det\big(J(\alpha,u)\big). \tag{6.8}$$

Asimismo, combinando (6.7) con (6.6) deducimos las siguientes identidades:

$$L_1(u_1)\cdots L_{k-1}(u_1) = U_k'(u_1) \quad (2 \le k \le n). \tag{6.9}$$

De acuerdo con la proposición, se trata de determinar la existencia de una factorización de la matriz inversa de $J(\alpha, u)$ como en el enunciado. A tal efecto, si invertimos la matriz L obtenemos

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} & & & \\ \frac{1}{L_1 L_2} & \frac{L_1}{L_1 L_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{L_1 \dots L_n} & \frac{L_1}{L_1 \dots L_n} & \cdots & \frac{L_1 \dots L_{n-1}}{L_1 \dots L_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{u_2'} & & & \\ \frac{1}{u_3'} & \frac{u_2'}{u_3'} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{d(J)} & \frac{u_2'}{d(J)} & \cdots & \frac{u_n'}{d(J)} \end{pmatrix},$$

con $d(J) := \det\big(J(\alpha, u)\big)$ y $u_k' := U_k'(u_1)$ para $2 \le k \le n$, donde la segunda identidad es una consecuencia de (6.9) y (6.8). Como se cumple la identidad $J^{-1}(\alpha, u) = \big((L^{-1})^t D^{-1}\big) \cdot L^{-1}$, la segunda matriz de la factorización de $J^{-1}(\alpha, u)$ del enunciado de la proposición es L^{-1}. Por otro lado, la primera matriz de la factorización de $J^{-1}(\alpha, u)$ del enunciado se obtiene fácilmente multiplicando $(L^{-1})^t$ por la matriz diagonal $D^{-1} = \operatorname{diag}(L_1, \dots, L_n) = \operatorname{diag}\big(u_2', u_3'/u_2', \dots, d(J)/u_n'\big)$. ■

Combinando los resultados de este capítulo con los del Capítulo 4 podemos enunciar un teorema de inversibilidad y factorización de $J(A, U)$ en las soluciones de (6.1).

Teorema 6.5 *Sea $(\alpha, u) \in (\mathbb{R}_{>0})^{n+1}$ una solución de (6.1) y sean g, G_1 y G las funciones de la Definición 6.1. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si g es decreciente en $\mathbb{R}_{>0}$, entonces la matriz $J(\alpha, u)$ es inversible y $\det\big(J(\alpha, u)\big) < 0$.*
- *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones*
  - *existe $d \in [0, 1)$ tal que $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' \ge 0$ para todo $x > 0$,*
  - *$G''(x) \ge 0$ para todo $x > 0$.*

  Si g y G son sobreyectivas, entonces existe $M(\alpha) > 0$ tal que la matriz $J(\alpha, u)$ es inversible y $\det\big(J(\alpha, u)\big) > 0$ para todo $n \ge 1 + M(\alpha)/(2 - 2d)$. Más aun, la matriz simétrica $J(\alpha, u)$ es definida positiva.

Además, en ambos casos $J^{-1}(\alpha, u)$ se factoriza como en la Proposición 6.4.

Demostración: Combinando el Teorema 6.2 con el Teorema 4.6 deducimos la primera afirmación del enunciado. Por otro lado, combinando el Teorema 6.2 y el Corolario 6.3 con el Teorema 4.9 obtenemos la segunda afirmación. Además, en ambos casos se cumplen las hipótesis de la Proposición 6.4, de donde obtenemos la existencia de la factorización de $J^{-1}(\alpha, u)$. ■

6.3. Cotas superiores del número de condición

A partir de la obtención de una forma explícita de la inversa de la matriz Jacobiana $J(A,U)$ en los puntos de la curva determinada por (6.1), podemos obtener estimaciones del número de condición de dicha curva.

Sean $\alpha^* > 0$ y $\alpha_* > 0$ constantes independientes de h. Entonces el Teorema 4.13 demuestra que, bajo ciertas condiciones, el sistema (6.1) tiene una única solución real positiva con $A = \alpha$, para todo α en el intervalo real $\mathcal{I} := \mathcal{I}(\alpha_*, \alpha^*)$ determinado por α_* y α^*, que notamos como $\big(u_1(\alpha), U_2\big(u_1(\alpha)\big), \ldots, U_n\big(u_1(\alpha)\big)\big)$. En lo que sigue vamos a acotar el número de condición

$$\kappa := \text{máx}\{\|\varphi'(\alpha)\|_\infty : \alpha \in \mathcal{I}\},$$

asociado a la función $\varphi : \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(\alpha) := \big(u_1(\alpha), U_2\big(u_1(\alpha)\big), \ldots, U_n\big(u_1(\alpha)\big)\big)$.

Con este propósito, por el Teorema de la función implícita tenemos que

$$\begin{aligned} \|\varphi'(\alpha)\|_\infty &= \Big\|\Big(\frac{\partial F}{\partial U}\big(\alpha, \varphi(\alpha)\big)\Big)^{-1} \frac{\partial F}{\partial A}\big(\alpha, \varphi(\alpha)\big)\Big\|_\infty \\ &= \Big\|J^{-1}\big(\alpha, \varphi(\alpha)\big)\frac{\partial F}{\partial A}\big(\alpha, \varphi(\alpha)\big)\Big\|_\infty. \end{aligned}$$

Observamos que $(\partial F/\partial A)(\alpha, \varphi(\alpha)) = \Big(0, \ldots, 0, -hg_2\big(U_n\big(u_1(\alpha)\big)\big)\Big)^t$. Por el Teorema 6.5 tenemos una factorización de $J^{-1}\big(\alpha, \varphi(\alpha)\big)$ como en la Proposición 6.4. Si multiplicamos dicha factorización por $(\partial F/\partial A)(\alpha, \varphi(\alpha))$, obtenemos la siguiente identidad:

$$\|\varphi'(\alpha)\|_\infty = \Big\|\frac{hg_2\big(U_n\big(u_1(\alpha)\big)\big)}{\det\big(J\big(\alpha, \varphi(\alpha)\big)\big)}\Big(1, U_2'\big(u_1(\alpha)\big), \ldots, U_n'\big(u_1(\alpha)\big)\Big)^t\Big\|_\infty.$$

Combinando esta identidad con (6.4) concluimos que

$$\|\varphi'(\alpha)\|_\infty = \Big\|\frac{1}{A'\big(u_1(\alpha)\big)}\Big(1, U_2'\big(u_1(\alpha)\big), \ldots, U_n'\big(u_1(\alpha)\big)\Big)^t\Big\|_\infty.$$

Por el Lema 3.2, vemos que $1 < U_2'\big(u_1(\alpha)\big) < \cdots < U_n'\big(u_1(\alpha)\big)$ y deducimos la siguiente proposición.

Proposición 6.6 *Sean $\alpha_*, \alpha^* > 0$ constantes independientes de h y sean g, G_1 y G las funciones de las Definición 6.1. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si g es sobreyectiva, $g'(x) < 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$ y $\alpha_* > \alpha^*$, entonces*

$$\|\varphi'(\alpha)\|_\infty = \frac{U_n'\big(u_1(\alpha)\big)}{|A'\big(u_1(\alpha)\big)|}$$

  para todo $\alpha \in [\alpha^*, \alpha_*]$.

- *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones*
  - *existe* $d \in [0,1)$ *tal que* $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' \geq 0$ *para todo* $x > 0$,
  - $G''(x) \geq 0$ *para todo* $x > 0$.

  Si g *y* G *son sobreyectivas, entonces existe* $M([\alpha_*, \alpha^*]) > 0$ *tal que*

  $$\|\varphi'(\alpha)\|_\infty = \frac{U_n'\big(u_1(\alpha)\big)}{A'\big(u_1(\alpha)\big)}$$

  para todo $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$ *y* $n \geq 1 + M([\alpha_*, \alpha^*])/(2-2d)$.

Combinando la Proposición 6.6 con las cotas de $A'\big(u_1(\alpha)\big)$ obtenidas en los Corolarios 4.7 y 4.10, deducimos el siguiente resultado.

Proposición 6.7 *Sean* $\alpha_*, \alpha^* > 0$ *constantes independientes de* h *y sean* g, G_1 *y* G *las funciones de la Definición 6.1. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si* g *es sobreyectiva,* $g'(x) < 0$ *en* $\mathbb{R}_{>0}$ *y* $\alpha_* > \alpha^*$, *entonces*

  $$\|\varphi'(\alpha)\|_\infty < \frac{g\big(u_n(\alpha)\big)}{\alpha |g'\big(u_n(\alpha)\big)|}$$

  para todo $\alpha \in [\alpha^*, \alpha_*]$, *donde* $u_n(\alpha) := U_n\big(u_1(\alpha)\big)$.

- *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*
  - *existe* $d \in [0,1)$ *tal que* $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' \geq 0$ *para todo* $x > 0$,
  - $G''(x) \geq 0$ *para todo* $x > 0$.

  Si g *y* G *son sobreyectivas y* $\alpha_* < \alpha^*$, *entonces existe* $M([\alpha_*, \alpha^*]) > 0$ *tal que*

  $$\|\varphi'(\alpha)\|_\infty < \frac{4G_1\big(u_n(\alpha)\big)}{(1-d)\alpha g_1\big(u_n(\alpha)\big)}$$

  para todo $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$ *y* $n \geq 1 + M([\alpha_*, \alpha^*])/(2-2d)$, *donde* $u_n(\alpha) := U_n\big(u_1(\alpha)\big)$.

A modo de ejemplo, consideramos nuevamente el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & -(U_2 - U_1) + \frac{h^2}{2} U_1^p, \\ 0 & = & -(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}) + h^2 U_k^p, \quad (2 \leq k \leq n-1) \\ 0 & = & -(U_{n-1} - U_n) + \frac{h^2}{2} U_n^p - AhU_n^q, \end{array}\right. \tag{6.10}$$

con $p > 2$ y $q > 2$. Entonces, utilizando los Corolarios 4.8 y 4.11, la Proposición 6.7 se puede reescribir de la siguiente forma.

Proposición 6.8 *Sean $\alpha_*, \alpha^* > 0$ constantes dadas independientes de h. Entonces valen las siguientes afirmaciones:*

- *Si $p < q$ y $\alpha_* > \alpha^*$, entonces*

$$\|\varphi'(\alpha)\|_\infty < \frac{1}{q-p}\frac{u_n(\alpha)}{\alpha}$$

para todo $\alpha \in [\alpha^*, \alpha_*]$, donde $u_n(\alpha) := U_n\big(u_1(\alpha)\big)$.

- *Si $p + 1 > 2q$ y $\alpha_* < \alpha^*$, entonces*

$$\|\varphi'(\alpha)\|_\infty < \frac{4}{p+1-2q}\frac{u_n(\alpha)}{\alpha}$$

para todo $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$ y $n \geq 1 + M([\alpha_*, \alpha^*])/(2-2d)$, donde $u_n(\alpha) := U_n\big(u_1(\alpha)\big)$, $d := 2q/(p+1)$ y

$$M([\alpha_*, \alpha^*]) := p\Big(\Big(\frac{(\alpha^*)^2}{1-d}\Big)^{(p+1-2q)/2(p-q)} + (\alpha^*)^2\frac{p+1}{2}\Big)^{(p-1)/(p+1-2q)}.$$

Volviendo al caso general del sistema (6.1), a partir de la Proposición 6.7 deducimos el resultado principal de este capítulo, que nos provee una cota del número de condición independiente de h, lo que refleja el buen condicionamiento de $\varphi(\alpha)$.

Teorema 6.9 *Sean $\alpha_*, \alpha^* > 0$ constantes dadas independientes de h y sean g, G_1 y G las funciones definidas en (6.1). Entonces valen las siguiente afirmaciones*

- *Si g es sobreyectiva, $g'(x) < 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$ y $\alpha_* > \alpha^*$, entonces existe una constante $\kappa_1([\alpha^*, \alpha_*]) > 0$ independiente de h tal que*

$$\kappa < \kappa_1([\alpha^*, \alpha_*]).$$

- *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones*
  - *existe $d \in [0,1)$ tal que $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' \geq 0$ para todo $x > 0$,*
  - *$G''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$.*

  Si g y G son sobreyectivas y $\alpha_* < \alpha^*$, entonces existen constantes $\kappa_2([\alpha_*, \alpha^*]) > 0$ y $M([\alpha_*, \alpha^*]) > 0$ independientes de h tales que

$$\kappa < \kappa_2([\alpha_*, \alpha^*]),$$

  para todo $n \geq 1 + M([\alpha_*, \alpha^*])/(2-2d)$.

Demostración: Por el Teorema 3.21 tenemos que $\varphi(\alpha)$ pertenece a un subconjunto compacto de $(\mathbb{R}_{>0})^n$ para todo α en el intervalo real determinado por α_* y α^*. Como todas las funciones involucradas en nuestro problema son continuas en $\mathbb{R}_{>0}$, a partir de la Proposición 6.7 deducimos la existencia de cotas para κ independientes de h. ∎

Finalmente, enunciamos el resultado correspondiente para el sistema (6.10).

Teorema 6.10 *Sean $\alpha_*, \alpha^* > 0$ constantes independientes de h. Entonces valen las siguiente afirmaciones*

- *Si $p < q$ y $\alpha_* > \alpha^*$, entonces*

$$\kappa < \frac{(\alpha^*)^{(q-p+1)/(p-q)}}{q-p}.$$

- *Si $p+1 > 2q$ y $\alpha_* < \alpha^*$, entonces*

$$\kappa < \frac{4}{p+1-2q}\frac{C_1(\alpha^*)}{\alpha_*}$$

para todo $n \geq 1 + M([\alpha_*, \alpha^*])/(2-2d)$, donde $d := 2q/(p+1)$,

$$C_1(\alpha^*) := \Big(\Big((\alpha^*)^2\frac{p+1}{p+1-2q}\Big)^{(p+1-2q)/2(p-q)} + (\alpha^*)^2\frac{p+1}{2}\Big)^{1/(p+1-2q)},$$

$$M([\alpha_*, \alpha^*]) := p\Big(\Big(\frac{(\alpha^*)^2}{1-d}\Big)^{(p+1-2q)/2(p-q)} + (\alpha^*)^2\frac{p+1}{2}\Big)^{(p-1)/(p+1-2q)}.$$

Capítulo 7

Un algoritmo de aproximación numérica

Sean g_1 y g_2 funciones de clase $\mathcal{C}^3$ en $\mathbb{R}$ y analíticas en $x=0$ tales que $g_i(0)=0$, $g_i'(x)>0$, $g_i''(x)>0$ y $g_i'''(x)\geq 0$ para todo $x>0$ con $i=1,2$. Consideremos nuevamente el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{lcll} 0 & = & -\big(U_2-U_1\big)+\frac{h^2}{2}g_1(U_1), & \\ 0 & = & -\big(U_{k+1}-2U_k+U_{k-1}\big)+h^2g_1(U_k), & (2\leq k\leq n-1), \\ 0 & = & -\big(U_{n-1}-U_n\big)-hAg_2(U_n)+\frac{h^2}{2}g_1(U_n). & \end{array}\right. \tag{7.1}$$

Fijamos $n\in\mathbb{N}$ y $\alpha^*>0$. Con el fin de calcular la solución positiva de (7.1) para estos valores de n y $A:=\alpha^*$, vamos a determinar un valor $\alpha_*>0$ de A donde se pueda aproximar la correspondiente solución de (7.1) con buena precisión y vamos a seguir la curva determinada por las soluciones positivas de (7.1) cuando A recorre el intervalo cuyos extremos son α_* y α^*. Por los resultados del Capítulo 6, en los casos que estamos estudiando, el número de condición de dicha curva admite una cota superior independiente de n. Como consecuencia de este buen condicionamiento, en este capítulo exhibimos un algoritmo que calcula las soluciones positivas de (7.1) para $A=\alpha^*$. Este algoritmo se basa en un método de homotopía (ver, por ejemplo, [OR70, §10.4], [BCSS98, §14.3]) y tiene un costo *lineal* en n.

Existen dos enfoques distintos para estimar el costo de un método de homotopía: usando estimaciones del tipo de Kantorovich, como en [OR70, §10.4], y usando estimaciones del tipo de Smale, como en [BCSS98, §14.3]. En lo que sigue, nosotros usamos el primer enfoque, ya que podemos controlar el número de condición en un entorno de la curva real determinada por las soluciones positivas de (7.1) al mover el parámetro α.

Sea $\alpha_* > 0$ una constante independiente de h. Entonces tenemos que la curva definida por las soluciones positivas de (7.1) con $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$ (o $\alpha \in [\alpha^*, \alpha_*]$) es suave, y se cumplen las estimaciones del Teorema 6.9. Sea $u^{(0)}$ una aproximación de la solución positiva $\varphi(\alpha_*)$ de (7.1) para $A = \alpha_*$. Vamos a exhibir un algoritmo que, a partir de $u^{(0)}$, calcula una aproximación de $\varphi(\alpha^*)$, siendo φ la función que asocia cada $\alpha > 0$ con la solución positiva $\big(u_1(\alpha), U_2\big(u_1(\alpha)\big), \dots, U_n\big(u_1(\alpha)\big)\big)$ de (7.1) para $A = \alpha$.

Antes de comenzar con la descripción del algoritmo introducimos algunas definiciones y notaciones. Sea $F := F(A, U) : \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ la función definida por la parte derecha de (7.1). Sea $J(A, U)$ la matriz Jacobiana de F con respecto a las variables U, es decir,

$$J(A,U) := \frac{\partial F}{\partial U}(A,U) := \begin{pmatrix} \Gamma_1 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & \Gamma_n \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

con

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &:= 1 + \tfrac{1}{2}h^2 g_1'(U_1), \\ \Gamma_i &:= 2 + h^2 g_1'(U_i), \quad (2 \le i \le n-1), \\ \Gamma_n &:= 1 + \tfrac{1}{2}h^2 g_1'(U_n) - hA g_2'(U_n). \end{aligned}$$

Asimismo, como en los capítulos anteriores, consideramos las siguientes funciones auxiliares.

Definición 7.1

- *Llamamos $g : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ a la función $g(x) := \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$.*
- *Llamamos $G_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a la función primitiva de g_1 que cumple $G_1(0) = 0$.*
- *Llamamos $G : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ a la función $G(x) := G_1(x)/g_2^2(x)$.*

7.1. El caso de absorción "lenta"

En esta sección mostramos un algoritmo para aproximar la solución del sistema (7.1) para $A = \alpha^*$, cuando se cumplen las condiciones

- g sobreyectiva,
- $g'(x) < 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$,
- $g''(x) \ge 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$,

donde g es la primera función de la Definición 7.1. De acuerdo al Teorema 3.21, las coordenadas de la solución del sistema (7.1) están contenidas en un intervalo cuyos extremos solo dependen de α y tienden a cero cuando α

tiende a infinito. En estas condiciones, para α suficientemente grande podemos obtener una buena aproximación de la solución del sistema (7.1) para $A = \alpha$ y luego recorrer la curva de soluciones hasta obtener una aproximación del sistema para $A = \alpha^*$.

En lo que sigue vamos a considerar el cambio de variables $B := 1/A$, que nos permite trabajar en el conjunto acotado $(0, \beta^*]$ en lugar del conjunto $[\alpha^*, +\infty)$. Así, se trata de aproximar la solución positiva del sistema

$$\begin{cases} 0 = -\big(U_2 - U_1\big) + \frac{h^2}{2} g_1(U_1), \\ 0 = -\big(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}\big) + h^2 g_1(U_k), \qquad (2 \leq k \leq n-1), \\ 0 = -\big(U_{n-1} - U_n\big) - hB^{-1} g_2(U_n) + \frac{h^2}{2} g_1(U_n) \end{cases} \tag{7.3}$$

para $B = \beta^*$, donde $\beta^* := 1/\alpha^*$.

Sea $0 < \beta_* < \beta^*$ una constante independiente de h a determinar. Fijemos $\beta \in [\beta_*, \beta^*]$. Del Corolario 3.9 se deduce que $\varphi(\beta)$ es un punto interior del conjunto compacto

$$K_\beta := \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|_\infty \leq 2g^{-1}(1/\beta)\},$$

donde φ es la función que asocia cada $\beta \in [\beta_*, \beta^*]$ con la solución positiva de (7.3) para $B = \beta$. Más precisamente, φ se define de la siguiente forma:

$$\varphi : [\beta_*, \beta^*] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \ \varphi(\beta) := \Big(u_1(\beta), U_2\big(u_1(\beta)\big), \ldots, U_n\big(u_1(\beta)\big)\Big).$$

En lo que sigue vamos a notar por $u_k(\beta)$ a $U_k(u_1(\beta))$ para $2 \leq k \leq n$.

Primero probamos que la matriz Jacobiana $J_\beta(u) := (\partial F/\partial U)(\beta, u)$ es inversible en un subconjunto de K_β. Sean $u \in \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$ puntos tales que

$$\|u - \varphi(\beta)\|_\infty < \delta_\beta, \ \|v - \varphi(\beta)\|_\infty < \delta_\beta,$$

donde $\delta_\beta > 0$ es una constante a determinar. Notemos que la condición $\delta_\beta \leq g^{-1}(1/\beta)$ asegura que $u \in K_\beta$ y $v \in K_\beta$. Entonces, por el Teorema del valor medio vemos que las entradas de la matriz diagonal $J_\beta(u) - J_\beta(v)$ satisfacen las estimaciones

$$\begin{aligned} \Big|\big(J_\beta(u) - J_\beta(v)\big)_{ii}\Big| &\leq 2h^2 g_1''\big(2g^{-1}(1/\beta)\big)\delta_\beta, \qquad (1 \leq i \leq n-1) \\ \Big|\big(J_\beta(u) - J_\beta(v)\big)_{nn}\Big| &\leq 2h \, \text{máx}\{g_2''\big(2g^{-1}(1/\beta)\big)/\beta, g_1''\big(2g^{-1}(1/\beta)\big)\}\delta_\beta. \end{aligned}$$

Por el Teorema 6.5 y la Proposición 6.4 tenemos que la matriz Jacobiana $J_{\varphi(\beta)} := J_\beta(\varphi(\beta)) = (\partial F/\partial U)(\beta, \varphi(\beta))$ es inversible y

$$\big(J^{-1}_{\varphi(\beta)}\big)_{ij} = \sum_{k=\text{máx}\{i,j\}}^{n-1} \frac{U_i'\big(u_1(\beta)\big)U_j'\big(u_1(\beta)\big)}{U_k'\big(u_1(\beta)\big)U_{k+1}'\big(u_1(\beta)\big)} + \frac{U_i'\big(u_1(\beta)\big)U_j'\big(u_1(\beta)\big)}{U_n'\big(u_1(\beta)\big)\det(J_{\varphi(\beta)})}$$

para $1 \leq i, j \leq n$. Por el Lema 3.2, sabemos que $U_n'\big(u_1(\beta)\big) \geq \cdots \geq U_2'\big(u_1(\beta)\big) \geq 1$. En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
&\Big\|J_{\varphi(\beta)}^{-1}\big(J_\beta(u) - J_\beta(v)\big)\Big\|_\infty \leq \\
&\leq \eta_\beta \delta_\beta \Big(2 + \frac{h^2 + \sum_{j=2}^{n-1} h^2 U_j'\big(u_1(\beta)\big) + hU_n'\big(u_1(\beta)\big)}{|\det(J_{\varphi(\beta)})|}\Big) \qquad (7.4)\\
&\leq 2\eta_\beta \delta_\beta \Big(1 + \frac{hU_n'\big(u_1(\beta)\big)}{|\det(J_{\varphi(\beta)})|}\Big),
\end{aligned}
$$

donde $\eta_\beta := 2\,\text{máx}\{g_1''\big(2g^{-1}(1/\beta)\big), g_2''\big(2g^{-1}(1/\beta)\big)/\beta\}$. Dado que $B = 1/A$, por el Teorema 4.6 deducimos que $B'(u_1) = -A'(u_1)/A^2(u_1) > 0$ para todo $x > 0$. Combinando esta afirmación con (6.4), obtenemos la siguiente identidad:

$$\frac{hU_n'\big(u_1(\beta)\big)}{|\det(J_{\varphi(\beta)})|} = \frac{U_n'\big(u_1(\beta)\big)B^2\big(u_1(\beta)\big)}{B'\big(u_1(\beta)\big)g_2\big(u_n(\beta)\big)}.$$

Por el Corolario 4.7 tenemos que

$$\frac{hU_n'\big(u_1(\beta)\big)}{|\det(J_{\varphi(\beta)})|} = \frac{U_n'\big(u_1(\beta)\big)B^2\big(u_1(\beta)\big)}{B'\big(u_1(\beta)\big)g_2\big(u_n(\beta)\big)} \leq \frac{g\big(u_n(\beta)\big)B\big(u_1(\beta)\big)}{|g'\big(u_n(\beta)\big)|g_2\big(u_n(\beta)\big)}. \qquad (7.5)$$

De la definición y la monotonía de g deducimos que

$$
\begin{aligned}
\frac{|g'(u_n(\beta))|g_2(u_n(\beta))}{g(u_n(\beta))} &= \frac{g_1(u_n(\beta))g_2'(u_n(\beta)) - g_1'(u_n(\beta))g_2(u_n(\beta))}{g_1(u_n(\beta))}\\
&= g_2'(u_n(\beta))\Big(1 - \frac{g_1'(u_n(\beta))g_2(u_n(\beta))}{g_1(u_n(\beta))g_2'(u_n(\beta))}\Big).
\end{aligned}
$$

Asimismo, como g_1 y g_2 son funciones analíticas en $x = 0$ y se anulan en dicho punto, existe $r > 0$ tal que, para todo x con $|x| < r$, tenemos que

$$g_1(x) = \sum_{k=p}^{\infty} c_k x^k, g_2(x) = \sum_{k=q}^{\infty} d_k x^k,$$

con $c_p \neq 0$ y $d_q \neq 0$, donde p y q son constantes mayores que 1. Por lo tanto, vale la siguiente identidad:

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{g_1'(x)g_2(x)}{g_1(x)g_2'(x)}\right) = 1 - \frac{p}{q}.$$

Teniendo en cuenta que $u_n(\beta) \in (0, g^{-1}(1/\beta^*)]$ para todo $\beta \in [\beta_*, \beta^*]$, concluimos que

$$\frac{|g'(u_n(\beta))|g_2(u_n(\beta))}{g(u_n(\beta))} \geq g_2'(u_n(\beta))(1 - \rho^*),$$

donde ρ^* es una constante que solo depende de β^*. Combinando la última desigualdad con (7.4) y (7.5) obtenemos

$$\begin{aligned}\Big\|J^{-1}_{\varphi(\beta)}\Big(J_\beta(u)-J_\beta(v)\Big)\Big\|_\infty &\leq 2\eta_\beta\delta_\beta\Big(1+\frac{g\big(u_n(\beta)\big)B\big(u_1(\beta)\big)}{|g'\big(u_n(\beta)\big)|g_2\big(u_n(\beta)\big)}\Big)\\ &\leq 2\eta_\beta\delta_\beta\Big(1+\frac{B\big(u_1(\beta)\big)}{g_2'(u_n(\beta))(1-\rho^*)}\Big).\end{aligned}$$

Por el Teorema 3.21, existe una constante $C(\beta)\geq 1$ tal que

$$\Big\|J^{-1}_{\varphi(\beta)}\Big(J_\beta(u)-J_\beta(v)\Big)\Big\|_\infty \leq 2\eta_\beta\Big(1+\frac{\beta}{g_2'\big(g^{-1}(C(\beta)/\beta)\big)(1-\rho^*)}\Big)\delta_\beta. \quad (7.6)$$

Además, $C(\beta)$ cumple la siguiente condición:

$$\lim_{\beta\to 0^+} C(\beta)=1.$$

Finalmente, como $g'(x)<0$ para todo $x>0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{g_2'\big(g^{-1}(C(\beta)/\beta)\big)(1-\rho^*)} &= \frac{C(\beta)}{g_2'\big(g^{-1}(C(\beta)/\beta)\big)g\big(g^{-1}(C(\beta)/\beta)\big)(1-\rho^*)}\\ &\leq \frac{C(\beta)}{g_1'\big(g^{-1}(C(\beta)/\beta)\big)(1-\rho^*)}.\end{aligned}$$

Combinando esta desigualdad con (7.6) deducimos que

$$\Big\|J^{-1}_{\varphi(\beta)}\Big(J_\beta(u)-J_\beta(v)\Big)\Big\|_\infty \leq \frac{2\eta_\beta(\theta^*+1)C(\beta)}{g_1'\big(g^{-1}(C(\beta)/\beta)\big)(1-\rho^*)}\delta_\beta, \quad (7.7)$$

con $\theta^*:=(1-\rho^*)g_1'(g^{-1}(1/\beta^*))$. Por lo tanto, si definimos

$$\delta_\beta := \min\Big\{\frac{g_1'\big(g^{-1}(C(\beta)/\beta)\big)(1-\rho^*)}{8\eta_\beta(\theta^*+1)C(\beta)}, g^{-1}(1/\beta)\Big\}, \quad (7.8)$$

obtenemos la siguiente cota:

$$\Big\|J^{-1}_{\varphi(\beta)}\Big(J_\beta(u)-J_\beta(v)\Big)\Big\|_\infty \leq \frac{1}{4}. \quad (7.9)$$

En particular, si $v=\varphi(\beta)$, esta cota nos permite considerar $J_\beta(u)$ como una perturbación de $J_{\varphi(\beta)}$. Más precisamente, utilizando un lema de perturbación estándar (ver, por ejemplo, [OR70, Lemma 2.3.2]) deducimos que la matriz Jacobiana $J_\beta(u)$ es inversible para todo $u\in\mathcal{B}_{\delta_\beta}(\varphi(\beta))$ y obtenemos la siguiente cota superior:

$$\Big\|J_\beta(u)^{-1}J_{\varphi(\beta)}\Big\|_\infty \leq \frac{4}{3}. \quad (7.10)$$

Con el objetivo de describir nuestro método necesitamos una condición suficiente de convergencia de la iteración de Newton estándar asociada a (7.3) para todo $\beta \in [\beta_*, \beta^*]$. Argumentando inductivamente como en [OR70, 10.4.2] deducimos la siguiente observación, que en particular implica que la iteración de Newton que estamos considerando es convergente.

Observación 7.2 *Sea $\delta := \text{mín}\{\delta_\beta : \beta \in [\beta_*, \beta^*]\}$. Fijemos $\beta \in [\beta_*, \beta^*]$ y consideremos la iteración de Newton*

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - J_\beta(u^{(k)})^{-1} F(\beta, u^{(k)}) \quad (k \geq 0),$$

comenzando con $u^{(0)} \in K_\beta$. Si $\|u^{(0)} - \varphi(\beta)\|_\infty < \delta$, entonces tenemos que

$$\|u^{(k)} - \varphi(\beta)\|_\infty < \left(\frac{1}{3}\right)^k \delta$$

para todo $k \geq 0$.

Ahora podemos describir nuestro método de homotopía. Sea $\beta_0 := \beta_* < \beta_1 < \cdots < \beta_N := \beta^*$ una partición uniforme del intervalo $[\beta_*, \beta^*]$, con N a definir. Consideraremos la siguiente iteración:

$$\begin{aligned} u^{(k+1)} &= u^{(k)} - J_{\beta_k}(u^{(k)})^{-1} F(\beta_k, u^{(k)}) \quad (0 \leq k \leq N-1), && (7.11) \\ u^{(N+k+1)} &= u^{(N+k)} - J_{\beta^*}(u^{(N+k)})^{-1} F(\beta^*, u^{(N+k)}) \quad (k \geq 0). && (7.12) \end{aligned}$$

Para ver que a partir de la iteración (7.11)–(7.12) obtenemos una aproximación de la solución positiva $\varphi(\beta^*)$ de (7.3) para $B = \beta^*$, necesitamos una condición que nos asegure que la iteración (7.11) produce un punto de atracción para la iteración de (7.12). Esto depende de una elección adecuada para N, que discutimos a continuación.

Por el Teorema 6.9, tenemos que

$$\begin{aligned} \|\varphi(\beta_{i+1}) - \varphi(\beta_i)\|_\infty &\leq \text{máx}\{\|\varphi'(\beta)\|_\infty : \beta \in [\beta_*, \beta^*]\}\, |\beta_{i+1} - \beta_i| \\ &\leq \kappa_1 \frac{\beta^*}{N} \end{aligned}$$

para $0 \leq i \leq N-1$, donde κ_1 es una cota del número de condición independiente de h. Entonces, para $N := \lceil 3\beta^* \kappa_1/\delta \rceil + 1 = O(1)$, obtenemos la desigualdad

$$\|\varphi(\beta_{i+1}) - \varphi(\beta_i)\|_\infty < \frac{\delta}{3} \qquad (7.13)$$

para $0 \leq i \leq N-1$. El siguiente lema muestra que, a partir de la última estimación, la iteración (7.11) nos provee un punto de atracción para la iteración (7.12).

Lema 7.3 *Sea $N := \lceil 3\beta^* \kappa_1/\delta \rceil + 1$. Entonces, para todo $u^{(0)}$ con $\|u^{(0)} - \varphi(\beta_*)\|_\infty < \delta$, el punto $u^{(N)}$ definido en (7.11) es un punto de atracción para la iteración de Newton (7.12).*

Demostración: Por hipótesis tenemos $\|u^{(0)}-\varphi(\beta_*)\|_\infty < \delta$. Argumentando inductivamente, supongamos que se cumple $\|u^{(k)} - \varphi(\beta_k)\|_\infty < \delta$ para $0 \leq k < N$. Por la Observación 7.2 deducimos que $u^{(k)}$ es un punto de atracción de la iteración de Newton asociada al sistema (7.3) para $B = \beta_k$. Además, la Observación 7.2 muestra que $\|u^{(k+1)} - \varphi(\beta_k)\|_\infty \leq \delta/3$. Entonces

$$\begin{array}{rcl} \|u^{(k+1)} - \varphi(\beta_{k+1})\|_\infty & \leq & \|u^{(k+1)} - \varphi(\beta_k)\|_\infty + \|\varphi(\beta_k) - \varphi(\beta_{k+1})\|_\infty \\ & < & \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{3}\delta < \delta, \end{array}$$

donde la desigualdad $\|\varphi(\beta_{k+1}) - \varphi(\beta_k)\|_\infty < \delta/3$ se deduce de (7.13). Esto completa el argumento inductivo y muestra en particular que $u^{(N)}$ es un punto de atracción para la iteración de Newton (7.12). ■

Ahora consideramos la convergencia de (7.12), comenzando con un punto $u^{(N)}$ que satisfaga la condición $\|u^{(N)} - \varphi(\beta^*)\|_\infty < \delta \leq \delta_{\beta^*}$. Combinando esta desigualdad con (7.8) deducimos que $u^{(N)} \in K_{\beta^*}$. Además, vemos que

$$\begin{aligned} \|u^{(N+1)}-\varphi(\beta^*)\|_\infty &= \|u^{(N)}-J_{\beta^*}(u^{(N)})^{-1}F(\beta^*,u^{(N)})-\varphi(\beta^*)\|_\infty \\ &= \Big\|J_{\beta^*}(u^{(N)})^{-1}\big(J_{\beta^*}(u^{(N)})\big(u^{(N)}-\varphi(\beta^*)\big)-F(\beta^*,u^{(N)})+F(\beta^*,\varphi(\beta^*))\big)\Big\|_\infty \\ &\leq \|J_{\beta^*}(u^{(N)})^{-1}J_{\varphi(\beta^*)}\|_\infty \\ &\qquad \Big\|J_{\varphi(\beta^*)}^{-1}\big(J_{\beta^*}(u^{(N)})\big(u^{(N)}-\varphi(\beta^*)\big)-F(\beta^*,u^{(N)})+F(\beta^*,\varphi(\beta^*))\big)\Big\|_\infty \\ &\leq \|J_{\beta^*}(u^{(N)})^{-1}J_{\varphi(\beta^*)}\|_\infty\|J_{\varphi(\beta^*)}^{-1}\big(J_{\beta^*}(u^{(N)})-J_{\beta^*}(\xi)\big)\|_\infty\|\big(u^{(N)}-\varphi(\beta^*)\big)\|_\infty, \end{aligned} \tag{7.14}$$

donde ξ es un punto en el segmento que une a $u^{(N)}$ y $\varphi(\beta^*)$. Combinando esta estimación con (7.7) y (7.10) deducimos que

$$\begin{array}{rcl} \|u^{(N+1)} - \varphi(\beta^*)\|_\infty & < & \frac{4}{3}\big\|J_{\varphi(\beta^*)}^{-1}\big(J_{\beta^*}(u^{(N)})-J_{\beta^*}(\xi)\big)\big\|_\infty\delta_{\beta^*} \\ & < & \frac{4c}{3}\delta_{\beta^*}^2 \leq \frac{1}{3}\delta_{\beta^*}, \end{array}$$

con $c := \big(2\eta_{\beta^*}(\theta^*+1)C(\beta^*)\big)/\big(g_1'\big(g^{-1}(C(\beta^*)/\beta^*)\big)(1-\rho^*)\big)$. Por un argumento inductivo concluimos que la iteración (7.12) esta bien definida y converge a la solución positiva $\varphi(\beta^*)$ de (7.3) para $B = \beta^*$. Asimismo, el vector $u^{(N+k)}$, que obtenemos a partir del vector $u^{(N)}$ después de k pasos de la iteración (7.12), satisface la estimación

$$\|u^{(N+k)} - \varphi(\beta^*)\|_\infty \leq \hat{c}\big(\tfrac{4c}{3}\delta_{\beta^*}\big)^{2^k} \leq \hat{c}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{2^k},$$

con $\hat{c} := 3/4c$. Por lo tanto, para obtener una ε-aproximación de $\varphi(\beta^*)$ tenemos que realizar $\lceil \log_2 \log_3(3/4c\varepsilon)\rceil$ pasos de la iteración (7.12). Resumiendo, tenemos el siguiente resultado.

Lema 7.4 *Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Entonces, para todo $u^{(N)} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ que satisface la condición $\|u^{(N)} - \varphi(\beta^*)\|_\infty < \delta$, la iteración (7.12) está bien definida y tenemos la estimación $\|u^{(N+k)} - \varphi(\beta^*)\|_\infty < \varepsilon$ para $k \geq \log_2 \log_3(3/4c\varepsilon)$.*

Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Supongamos que tenemos $u^{(0)} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ tal que $\|u^{(0)} - \varphi(\beta_*)\|_\infty < \delta$. Con el fin de calcular una ε-aproximación de la solución positiva de $\varphi(\beta^*)$ de (7.3) para $B = \beta^*$, realizamos N iteraciones de (7.11) y $k_0 := \lceil \log_2 \log_3(3/4c\varepsilon) \rceil$ iteraciones de (7.12). De los Lemas 7.3 y 7.4 concluimos que la salida $u^{(N+k_0)}$ de este procedimiento satisface la condición $\|u^{(N+k_0)} - \varphi(\beta^*)\|_\infty < \varepsilon$. Observemos que la matriz Jacobiana $J_\beta(u)$ es tridiagonal para todo $\beta \in [\beta_*, \beta^*]$ y todo $u \in K_\beta$. Por lo tanto, la solución de un sistema lineal con la matriz $J_\beta(u)$ puede obtenerse con $O(n)$ operaciones aritméticas. Esto implica que cada iteración de (7.11) y (7.12) requiere $O(n)$ operaciones aritméticas (sin tener en cuenta los errores de redondeo). En conclusión, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 7.5 *Sean $\varepsilon > 0$ y $u^{(0)} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ con $\|u^{(0)} - \varphi(\beta_*)\|_\infty < \delta$, donde δ se define como en la Observación 7.2. Entonces la salida de la iteración (7.11)–(7.12) es una ε-aproximación de la solución positiva $\varphi(\beta^*)$ de (7.3) para $B = \beta^*$. Esta iteración puede realizarse con $O(Nn + k_0 n) = O\big(n \log_2 \log_2(1/\varepsilon)\big)$ operaciones aritméticas.*

Finalmente, discutimos la elección de un punto inicial $u^{(0)} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ que satisfaga las condiciones de la Proposición 7.5. Si $\beta_* > 0$ es una constante independiente de h, estudiamos el comportamiento de

$$\delta := \min\{\delta_\beta : \beta \in [\beta_*, \beta^*]\},$$

donde

$$\delta_\beta := \min\Big\{\frac{g_1'\big(g^{-1}(C(\beta)/\beta)\big)(1-\rho^*)}{8\eta_\beta(\theta^*+1)C(\beta)}, g^{-1}(1/\beta)\Big\}.$$

Como g_1 y g_2 son funciones analíticas en $x = 0$, en un entorno de cero podemos reescribir η_β de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\eta_\beta &= 2\max\{g_1''\big(2g^{-1}(1/\beta)\big), g_2''\big(2g^{-1}(1/\beta)\big)g\big(g^{-1}(1/\beta)\big)\}\\ &= 2\max\{S_1(\beta), S_2(\beta)\}\big(g^{-1}(1/\beta)\big)^{p-2},\end{aligned}$$

donde p es la multiplicidad del cero como raíz de g_1 y S_i es una función analítica en $x = 0$ tal que $\lim_{\beta\to 0} S_i(\beta) \neq 0$ para $i = 1, 2$. Teniendo en cuenta que $\beta \in (0, \beta^*]$, concluimos que existe una constante $\eta^* > 0$, que solo depende de β^*, tal que

$$\eta_\beta \leq 2\eta^*\big(g^{-1}(1/\beta)\big)^{p-2},$$

para todo $\beta \in (0, \beta^*]$. Más aun, con argumentos similares deducimos que existe una constante $\vartheta^* > 0$, que solo depende de β^*, tal que

$$\delta_\beta \geq \min\Big\{\frac{\vartheta^*(1-\rho^*)}{16\eta^*(\theta^*+1)C(\beta)}\Big(\frac{g^{-1}(C(\beta)/\beta)}{g^{-1}(1/\beta)}\Big)^{p-1}, 1\Big\}g^{-1}(1/\beta). \tag{7.15}$$

Afirmamos que
$$\lim_{\beta\to 0^+} \frac{g^{-1}(C(\beta)/\beta)}{g^{-1}(1/\beta)} = 1. \tag{7.16}$$
A fin de demostrar esta afirmación, como $C(\beta) \geq 1$ y g^{-1} es decreciente, tenemos que
$$\frac{g^{-1}(C(\beta)/\beta)}{g^{-1}(1/\beta)} \leq 1.$$
Por otro lado, existe $\xi \in (1/\beta, C(\beta)/\beta)$ tal que
$$\begin{aligned}
\frac{g^{-1}(C(\beta)/\beta)}{g^{-1}(1/\beta)} &= \frac{g^{-1}(1/\beta) + (g^{-1})'(\xi)\big((C(\beta)-1)/\beta\big)}{g^{-1}(1/\beta)} \\
&= 1 + \frac{g\big(g^{-1}(1/\beta)\big)}{g'\big(g^{-1}(\xi)\big)g^{-1}(1/\beta)}\big(C(\beta)-1\big) \\
&\geq 1 + \frac{g\big(g^{-1}(1/\beta)\big)}{g'\big(g^{-1}(1/\beta)\big)g^{-1}(1/\beta)}\big(C(\beta)-1\big)
\end{aligned}$$
Utilizando el hecho de que g_1 y g_2 son analíticas en $x = 0$ y que $\lim_{\beta\to 0^+} C(\beta) = 1$, deducimos que
$$\lim_{\beta\to 0^+} \frac{g\big(g^{-1}(1/\beta)\big)}{g'\big(g^{-1}(1/\beta)\big)g^{-1}(1/\beta)}\big(C(\beta)-1\big) = 0.$$
De esto se concluye fácilmente la validez de (7.16).

Combinando (7.15) y (7.16) concluimos que existe una constante $C^* \in (0,1]$, que solo depende de β^*, tal que
$$\delta_\beta \geq C^* g^{-1}(1/\beta).$$
Por lo tanto,
$$\delta = \min\{\delta_\beta : \beta \in [\beta_*, \beta^*]\} \geq C^* g^{-1}(1/\beta_*). \tag{7.17}$$
Por el Teorema 3.21, sabemos que
$$\varphi(\beta_*) \in [g^{-1}\big(C(\beta_*)/\beta_*\big), g^{-1}(1/\beta_*)]^n.$$
Más aun, por (7.16) deducimos que si $\beta_* > 0$ es suficientemente chico, entonces
$$\Big(1 - \frac{g^{-1}\big(C(\beta_*)/\beta_*\big)}{g^{-1}(1/\beta_*)}\Big) g^{-1}(1/\beta_*) < C^* g^{-1}(1/\beta_*).$$
Combinando esta desigualdad con (7.17), concluimos que
$$\|u - \varphi(\beta_*)\|_\infty \leq g^{-1}(1/\beta_*) - g^{-1}\big(C(\beta_*)/\beta_*\big) < \delta \tag{7.18}$$

para todo $u \in [g^{-1}\big(C(\beta_*)/\beta_*\big), g^{-1}(1/\beta_*)]^n$. Por lo tanto, si elegimos $\beta_* < \beta^*$ que satisfaga la segunda desigualdad de (7.18) y un punto arbitrario $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ en el hipercubo $[g^{-1}\big(C(\beta_*)/\beta_*\big), g^{-1}(1/\beta_*)]^n$, tenemos que

$$\|u^{(0)} - \varphi(\beta_*)\|_\infty < \delta.$$

Entonces, aplicando la Proposición 7.5, obtenemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 7.6 *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces podemos calcular una ε-aproximación de la solución positiva de (7.3) para $B = \beta^*$ con $O\big(n \log_2 \log_2(1/\varepsilon)\big)$ operaciones aritméticas.*

Como en los capítulos anteriores, consideramos el caso particular en el que g_1 y g_2 son las funciones $g_1(x) := x^p$ y $g_2(x) := x^q$ respectivamente, con $p, q \geq 2$. En tal caso, queremos aproximar las soluciones positivas del siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & -\big(U_2 - U_1\big) + \frac{h^2}{2}U_1^p, \\ 0 & = & -\big(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}\big) + h^2 U_k^p, \qquad (2 \leq k \leq n-1), \\ 0 & = & -\big(U_{n-1} - U_n\big) - hB^{-1}U_n^q + \frac{h^2}{2}U_n^p. \end{array}\right. \tag{7.19}$$

para $B = \beta^*$ y $p < q$. El enunciado correspondiente para el sistema (7.19) es el siguiente resultado:

Teorema 7.7 *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Definimos*

$$C^* := \text{mín}\Big\{1, \frac{p(q-p)}{16q(\theta^*+1)\eta^*}C(\beta^*)^{(1-q)/(q-p)}\Big\},$$

$$c := \frac{4q\eta^*(\beta^*)^{(p-2)/(q-p)}(\theta^*+1)C(\beta^*)^{(q-1)/(p-q)}}{p(q-p)(\beta^*)^{(p-1)/(q-p)}},$$

con $C(\beta^*) := e^{qM^*}$, $\theta^* := (q-p)M^*/q$, $\eta^* := q(q-1)2^{q-2}$ y $M^* := p(\beta^*)^{(p-1)/(q-p)}$. Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- *Si $C^* = 1$, entonces para todo*

  $$u^{(0)} \in [\big(C(\beta^*)/\beta^*\big)^{1/(q-p)}, (1/\beta^*)^{1/(q-p)}]^n,$$

  la iteración (7.12), con $N = 0$, está bien definida y el vector $u^{(k)}$ es una ε–aproximación de la solución positiva de (7.19) para $k \geq \log_2 \log_3(3/4c\varepsilon)$.

- *Si $C^* < 1$ y*
$$\beta_* \leq \Big(-\ln(1 - C^*)qp \Big)^{(q-p)/(p-1)},$$
entonces, para todo
$$u^{(0)} \in [\big(C(\beta_*)/\beta_*\big)^{1/(q-p)}, (1/\beta_*)^{1/(q-p)}]^n,$$
la iteración (7.11)–(7.12) está bien definida y el vector $u^{(N+k)}$ es una ε–aproximación de la solución positiva de (7.19) para
$$N := \left\lceil \frac{3(\beta^*)^{(2q-2p+1)/(q-p)}}{(q-p)C^*\beta_*^{1/(q-p)}} \right\rceil + 1$$
y $k \geq \log_2 \log_3(3/4c\varepsilon)$.

7.2. El caso de absorción "rápida"

De modo similar a la sección anterior, en esta sección mostramos un algoritmo para aproximar la solución del sistema

$$\begin{cases} 0 &= -\big(U_2 - U_1\big) + \frac{h^2}{2} g_1(U_1), \\ 0 &= -\big(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}\big) + h^2 g_1(U_k), \qquad (2 \leq k \leq n-1), \\ 0 &= -\big(U_{n-1} - U_n\big) - hAg_2(U_n) + \frac{h^2}{2} g_1(U_n), \end{cases} \tag{7.20}$$

para $A = \alpha^*$, cuando G y g cumplen las siguientes condiciones:

- G y g son sobreyectivas,
- existe $d \in [0,1)$ tal que $\big(\ln(G_1^d(x)/g_2^2(x))\big)' > 0$ para todo $x > 0$,
- $G''(x) \geq 0$ y $g''(x) \geq 0$ para todo $x > 0$,

donde G y g son las funciones de la Definición 7.1. De acuerdo al Teorema 3.21, las coordenadas de la solución del sistema (7.20) están contenidas en un intervalo cuyos bordes solo dependen de α y tienden a cero cuando α tiende a cero. En estas condiciones, para $\alpha > 0$ suficientemente chico podemos obtener una buena aproximación de la solución del sistema (7.20) para $A = \alpha$ y luego recorrer la curva de soluciones que obtenemos "moviendo" α a fin de conseguir una aproximación del sistema para $A = \alpha^*$.

Sea $0 < \alpha_* < \alpha^*$ una constante independiente de h a determinar. Fijemos $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$. Recordemos que $\varphi : [\alpha_*, \alpha^*] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(\alpha) := \big(u_1(\alpha), U_2\big(u_1(\alpha)\big), \ldots, U_n\big(u_1(\alpha)\big)\big)$ es la función que asocia cada $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$ con la solución positiva de (7.20) para $A = \alpha$. En lo que sigue vamos a notar por $u_k(\alpha)$ a

$U_k(u_1(\alpha))$ para $2 \leq k \leq n$. Del Lema 3.20 se deduce que $\varphi(\alpha)$ es un punto interior del conjunto compacto

$$K_\alpha := \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|_\infty \leq 2C_2(\alpha)\},$$

donde

$$C_2(\alpha) := G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big),$$

con

$$\widehat{C}(\alpha) := 1 + \frac{g_2'\big(C_1(\alpha)\big)\alpha^2}{2g_2\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)G'\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)},$$

$$C_1(\alpha) := G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{1-d}}\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big),$$

y $M := g_1'(C_1(\alpha))$.

Primero probamos que la matriz Jacobiana $J_\alpha(u) := (\partial F/\partial U)(\alpha, u)$ es inversible en un subconjunto de K_α. Sean $u \in \mathbb{R}^n$ y $v \in \mathbb{R}^n$ puntos tales que

$$\|u - \varphi(\alpha)\|_\infty < \delta_\alpha, \ \|v - \varphi(\alpha)\|_\infty < \delta_\alpha,$$

donde $\delta_\alpha > 0$ es una constante a determinar. Notemos que si pedimos que se satisfaga la condición $\delta_\alpha \leq C_2(\alpha)$, podemos asegurar que $u \in K_\alpha$ y $v \in K_\alpha$. Entonces, por el Teorema del valor medio, vemos que las entradas de la matriz diagonal $J_\alpha(u) - J_\alpha(v)$ satisfacen las estimaciones

$$\begin{aligned} \Big|\big(J_\alpha(u) - J_\alpha(v)\big)_{ii}\Big| &\leq 2h^2 g_1''\big(2C_2(\alpha)\big)\delta_\alpha, \ (1 \leq i \leq n-1) \\ \Big|\big(J_\alpha(u) - J_\alpha(v)\big)_{nn}\Big| &\leq 2h \max\{\alpha g_2''\big(2C_2(\alpha)\big), g_1''\big(2C_2(\alpha)\big)\}\delta_\alpha. \end{aligned}$$

Por el Teorema 6.5 y la Proposición 6.4 tenemos que la matriz Jacobiana $J_{\varphi(\alpha)} := J_\alpha(\varphi(\alpha)) = (\partial F/\partial U)(\alpha, \varphi(\alpha))$ es inversible y

$$\big(J^{-1}_{\varphi(\alpha)}\big)_{ij} = \sum_{k=\max\{i,j\}}^{n-1} \frac{U_i'\big(u_1(\alpha)\big)U_j'\big(u_1(\alpha)\big)}{U_k'\big(u_1(\alpha)\big)U_{k+1}'\big(u_1(\alpha)\big)} + \frac{U_i'\big(u_1(\alpha)\big)U_j'\big(u_1(\alpha)\big)}{U_n'\big(u_1(\alpha)\big)\det(J_{\varphi(\alpha)})}$$

para $1 \leq i, j \leq n$. Por el Lema 3.2, sabemos que $U_n'\big(u_1(\alpha)\big) \geq \cdots \geq U_2'\big(u_1(\alpha)\big) \geq 1$, lo cual implica que

$$\begin{aligned} &\Big\|J^{-1}_{\varphi(\alpha)}\big(J_\alpha(u) - J_\alpha(v)\big)\Big\|_\infty \leq \\ &\leq \eta_\alpha\delta_\alpha\Bigg(2 + \frac{h^2 + \sum_{j=2}^{n-1} h^2 U_j'\big(u_1(\alpha)\big) + hU_n'\big(u_1(\alpha)\big)}{|\det(J_{\varphi(\alpha)})|}\Bigg) \qquad (7.21) \\ &\leq 2\eta_\alpha\delta_\alpha\Bigg(1 + \frac{hU_n'\big(u_1(\alpha)\big)}{|\det(J_{\varphi(\alpha)})|}\Bigg), \end{aligned}$$

donde $\eta_\alpha := 2\,\text{máx}\{g_1''\big(2C_2(\alpha)\big), \alpha g_2''\big(2C_2(\alpha)\big)\}$. De (6.4) obtenemos la identidad

$$\frac{hU_n'\big(u_1(\alpha)\big)}{|\det(J_{\varphi(\alpha)})|} = \frac{U_n'\big(u_1(\alpha))\big)}{A'\big(u_1(\alpha)\big)g_2\big(u_n(\alpha)\big)}.$$

Asimismo, por el Corolario 4.10 tenemos que

$$\frac{hU_n'\big(u_1(\alpha)\big)}{|\det(J_{\varphi(\alpha)})|} = \frac{U_n'\big(u_1(\alpha)\big)}{A'\big(u_1(\alpha)\big)g_2\big(u_n(\alpha)\big)} \leq \frac{4G_1\big(u_n(\alpha)\big)}{(1-d)g_1\big(u_n(\alpha)\big)g_2\big(u_n(\alpha)\big)A\big(u_1(\alpha)\big)}. \tag{7.22}$$

El Lema 3.5 implica que $G'(x) > 0$ y $g'(x) > 0$ en $\mathbb{R}_{>0}$, donde G y g son las funciones de la Definición 7.1. Del hecho de que G es una función creciente deducimos que

$$\frac{G_1\big(u_n(\alpha)\big)}{g_1\big(u_n(\alpha)\big)g_2\big(u_n(\alpha)\big)} < \frac{1}{2g_2'\big(u_n(\alpha)\big)}.$$

Combinando esta desigualdad con (7.21) y (7.22) obtenemos

$$\Big\| J_{\varphi(\alpha)}^{-1}\big(J_\alpha(u) - J_\alpha(v)\big)\Big\|_\infty \leq 2\eta_\alpha\delta_\alpha\bigg(1 + \frac{2}{(1-d)g_2'\big(u_n(\alpha)\big)A\big(u_1(\alpha)\big)}\bigg).$$

Finalmente, combinando el crecimiento estricto de g con el Corolario 3.9, deducimos que vale la siguiente desigualdad:

$$\Big\| J_{\varphi(\alpha)}^{-1}\big(J_\alpha(u) - J_\alpha(v)\big)\Big\|_\infty \leq 2\eta_\alpha\bigg(1 + \frac{2}{g_2'\big(g^{-1}(\alpha)\big)(1-d)\alpha}\bigg)\delta_\alpha.$$

Más aun,

$$\Big\| J_{\varphi(\alpha)}^{-1}\big(J_\alpha(u) - J_\alpha(v)\big)\Big\|_\infty \leq \bigg(\frac{4\eta_\alpha(\theta^*+1)}{g_2'\big(g^{-1}(\alpha)\big)(1-d)\alpha}\bigg)\delta_\alpha. \tag{7.23}$$

con $\theta^* := g_2'\big(g^{-1}(\alpha^*)\big)(1-d)\alpha^*/2$. Por lo tanto, si definimos

$$\delta_\alpha := \text{mín}\Big\{\frac{g_2'\big(g^{-1}(\alpha)\big)(1-d)\alpha}{16\eta_\alpha(\theta^*+1)}, C_2(\alpha)\Big\}, \tag{7.24}$$

obtenemos la siguiente cota:

$$\Big\| J_{\varphi(\alpha)}^{-1}\big(J_\alpha(u) - J_\alpha(v)\big)\Big\|_\infty \leq \frac{1}{4}. \tag{7.25}$$

En particular, si $v = \varphi(\alpha)$, esta cota nos permite considerar $J_\alpha(u)$ como una perturbación de $J_{\varphi(\alpha)}$. Del mismo modo que en la sección anterior, utilizando el lema de perturbación [OR70, Lemma 2.3.2], deducimos que la matriz Jacobiana $J_\alpha(u)$ es inversible para todo $u \in \mathcal{B}_{\delta_\alpha}(\varphi(\alpha))$ y vale la estimación

$$\Big\| J_\alpha(u)^{-1}J_{\varphi(\alpha)}\Big\|_\infty \leq \frac{4}{3}. \tag{7.26}$$

Con el objetivo de describir nuestro método, necesitamos una condición suficiente para la convergencia de la iteración de Newton estándar asociada a (7.20) para todo $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$. Argumentando inductivamente como en [OR70, 10.4.2] deducimos la siguiente observación, que en particular implica que la iteración de Newton que estamos considerando es convergente.

Observación 7.8 *Sea $\delta := \text{mín}\{\delta_\alpha : \alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]\}$. Fijemos $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$ y consideremos la iteración de Newton*

$$u^{(k+1)} = u^{(k)} - J_\alpha(u^{(k)})^{-1} F(\alpha, u^{(k)}) \quad (k \geq 0),$$

comenzando con $u^{(0)} \in K_\alpha$. Si $\|u^{(0)} - \varphi(\alpha)\|_\infty < \delta$, entonces tenemos que

$$\|u^{(k)} - \varphi(\alpha)\|_\infty < \left(\frac{1}{3}\right)^k \delta$$

para todo $k \geq 0$.

Ahora podemos describir nuestro método de homotopía. Sea $\alpha_0 := \alpha_* < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N := \alpha^*$ una partición uniforme del intervalo $[\alpha_*, \alpha^*]$, con N a definir. Consideramos la siguiente iteración:

$$\begin{aligned} u^{(k+1)} &= u^{(k)} - J_{\alpha_k}(u^{(k)})^{-1} F(\alpha_k, u^{(k)}) \quad (0 \leq k \leq N-1), && (7.27) \\ u^{(N+k+1)} &= u^{(N+k)} - J_{\alpha^*}(u^{(N+k)})^{-1} F(\alpha^*, u^{(N+k)}) \quad (k \geq 0). && (7.28) \end{aligned}$$

Para ver que la iteración (7.27)–(7.28) nos provee una aproximación de la solución positiva $\varphi(\alpha^*)$ de (7.20) para $A = \alpha^*$, necesitamos una condición que nos asegure que la iteración (7.27) produce un punto de atracción para la iteración de (7.28). Esto depende de una elección adecuada de N, que discutimos a continuación.

Por el Teorema 6.9, tenemos

$$\begin{aligned} \|\varphi(\alpha_{i+1}) - \varphi(\alpha_i)\|_\infty &\leq \text{máx}\{\|\varphi'(\alpha)\|_\infty : \alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]\} \, |\alpha_{i+1} - \alpha_i| \\ &\leq \kappa_2 \frac{\alpha^*}{N} \end{aligned}$$

para $0 \leq i \leq N-1$, donde κ_2 es una cota del número de condición independiente de h. Entonces, para $N := \lceil 3\alpha^* \kappa_2 / \delta \rceil + 1 = O(1)$, obtenemos la siguiente desigualdad para $0 \leq i \leq N-1$:

$$\|\varphi(\alpha_{i+1}) - \varphi(\alpha_i)\|_\infty < \frac{\delta}{3}. \tag{7.29}$$

El siguiente lema muestra que podemos obtener un punto $u^{(N)}$ tal que, comenzando con $u^{(N)}$, la iteración (7.28) converge a la solución de (7.20) que estamos buscando. La demostración de este lema procede mutatis mutandis como la del Lema 7.3, por lo que no vamos a reproducir el argumento.

Lema 7.9 *Sea* $N := \lceil 3\alpha^*\kappa_2/\delta\rceil + 1$*. Entonces, para todo* $u^{(0)}$ *con* $\|u^{(0)} - \varphi(\alpha_*)\|_\infty < \delta$*, el punto* $u^{(N)}$ *definido en (7.27) es un punto de atracción para la iteración de Newton (7.28).*

Ahora consideramos la convergencia de (7.28), comenzando con un punto $u^{(N)}$ que satisface la condición $\|u^{(N)}-\varphi(\alpha^*)\|_\infty < \delta \leq \delta_{\alpha^*}$. Combinando esta desigualdad con (7.24) deducimos que $u^{(N)} \in K_{\alpha^*}$. Más aun, argumentando como en (7.14) tenemos que existe un punto ξ en el segmento que une $u^{(N)}$ con $\varphi(\alpha^*)$ tal que

$$\begin{aligned}&\|u^{(N+1)}-\varphi(\alpha^*)\|_\infty \\ &\qquad \leq \|J_{\alpha^*}(u^{(N)})^{-1}J_{\varphi(\alpha^*)}\|_\infty \|J^{-1}_{\varphi(\alpha^*)}\Big(J_{\alpha^*}(u^{(N)})-J_{\alpha^*}(\xi)\Big)\|_\infty \|\big(u^{(N)}-\varphi(\alpha^*)\big)\|_\infty,\end{aligned}$$

Combinando esta estimación con (7.23) y (7.26) concluimos que

$$\begin{aligned}\|u^{(N+1)} - \varphi(\alpha^*)\|_\infty &< \tfrac{4}{3}\big\|J^{-1}_{\varphi(\alpha^*)}\big(J_{\alpha^*}(u^{(N)})-J_{\alpha^*}(\xi)\big)\big\|_\infty \delta_{\alpha^*} \\ &< \tfrac{4c}{3}\delta^2_{\alpha^*} \leq \tfrac{1}{3}\delta_{\alpha^*},\end{aligned}$$

con $c := \big(4\eta_{\alpha^*}(\theta^*+1)\big)/\big(g_2'\big(g^{-1}(\alpha^*)\big)(1-d)\alpha^*\big)$. Por un argumento inductivo concluimos que la iteración (7.28) está bien definida y converge a la solución positiva $\varphi(\alpha^*)$ de (7.20) para $A = \alpha^*$.

Asimismo, tenemos que el vector $u^{(N+k)}$, que obtenemos a partir del vector $u^{(N)}$ después de k pasos de la iteración (7.28), satisface la estimación

$$\|u^{(N+k)} - \varphi(\alpha^*)\|_\infty \leq \hat{c}\big(\tfrac{4c}{3}\delta_{\alpha^*}\big)^{2^k} \leq \hat{c}\Big(\frac{1}{3}\Big)^{2^k},$$

con $\hat{c} := 3/4c$. Por lo tanto, para obtener una ε-aproximación de $\varphi(\alpha^*)$, tenemos que realizar $\lceil\log_2\log_3(3/4c\varepsilon)\rceil$ pasos de la iteración (7.28). Resumiendo, tenemos el siguiente resultado.

Lema 7.10 *Sea* $\varepsilon > 0$ *fijo. Entonces, para todo* $u^{(N)} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ *que satisface la condición* $\|u^{(N)} - \varphi(\alpha^*)\|_\infty < \delta$*, la iteración (7.28) está bien definida y se satisface la estimación* $\|u^{(N+k)} - \varphi(\alpha^*)\|_\infty < \varepsilon$ *para* $k \geq \log_2\log_3(3/4c\varepsilon)$*.*

Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Asumamos que tenemos $u^{(0)} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ tal que $\|u^{(0)} - \varphi(\alpha_*)\|_\infty < \delta$. Con el fin de calcular una ε-aproximación de la solución positiva de $\varphi(\alpha^*)$ de (7.20) para $A = \alpha^*$, realizamos N iteraciones de (7.27) y $k_0 := \lceil\log_2\log_3(3/4c\varepsilon)\rceil$ iteraciones de (7.28). De los Lemas 7.9 y 7.10 concluimos que la salida $u^{(N+k_0)}$ de este procedimiento satisface la condición $\|u^{(N+k_0)}-\varphi(\alpha^*)\|_\infty < \varepsilon$. Dado que la matriz Jacobiana $J_\alpha(u)$ es tridiagonal para todo $\alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]$ y todo $u \in K_\alpha$, cada iteración de (7.27) y (7.28) requiere $O(n)$ operaciones aritméticas. En conclusión, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 7.11 *Sean* $\varepsilon > 0$ *y* $u^{(0)} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ *con* $\|u^{(0)} - \varphi(\alpha_*)\|_\infty < \delta$*, donde* δ *se define como en la Observación 7.8. La salida de la iteración*

(7.27)–(7.28) es una ε-aproximación de la solución positiva $\varphi(\alpha^*)$ de (7.20) para $A = \alpha^*$. Dicha iteración se calcula con $O(Nn+k_0n) = O\big(n\log_2\log_2(1/\varepsilon)\big)$ operaciones aritméticas.

Finalmente, discutimos la elección de un punto inicial $u^{(0)} \in (\mathbb{R}_{>0})^n$ que satisfaga las condiciones de la Proposición 7.11.

Si $\alpha_* > 0$ una constante independiente de h, estudiamos el comportamiento de

$$\delta := \text{mín}\{\delta_\alpha : \alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]\},$$

donde

$$\delta_\alpha := \text{mín}\Big\{\frac{g_2'\big(g^{-1}(\alpha)\big)(1-d)\alpha}{16\eta_\alpha(\theta^*+1)}, C_2(\alpha)\Big\},$$

con

$$C_2(\alpha) := G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big),$$

$$\widehat{C}(\alpha) := 1 + \frac{g_2'\big(C_1(\alpha)\big)\alpha^2}{2g_2\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)G'\big(g^{-1}(\alpha)/e^M\big)},$$

$$C_1(\alpha) := G^{-1}\Big(G\Big(g^{-1}\Big(\frac{\alpha}{\sqrt{1-d}}\Big)\Big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big),$$

y $M := g_1'(C_1(\alpha))$.

Como $\widehat{C}(\alpha) \geq 1$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\eta_\alpha &= 2\,\text{máx}\{g_1''\big(2C_2(\alpha)\big), g_2''\big(2C_2(\alpha)\big)\alpha\} \\
&\leq 2\,\text{máx}\{g_1''\big(2C_2(\alpha)\big), g_2''\big(2C_2(\alpha)\big)g\big(G^{-1}\big(G\big(g^{-1}\big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\big)\big)\big)\big)\}, \\
&\leq 2\,\text{máx}\{g_1''\big(2C_2(\alpha)\big), g_2''\big(2C_2(\alpha)\big)g\big(C_2(\alpha)\big)\},
\end{aligned}$$

Dado que g_1 y g_2 son funciones analíticas en $x = 0$, tenemos la siguiente cota para η_α en un entorno de cero:

$$\eta_\alpha \leq 2\,\text{máx}\{S_1(\alpha), S_2(\alpha)\}\big(C_2(\alpha)\big)^{p-2},$$

donde p es la multiplicidad de cero como raíz de g_1 y $\text{lím}_{\alpha\to 0} S_i(\alpha) \neq 0$ para $i = 1, 2$. Teniendo en cuenta que $\alpha \in (0, \alpha^*]$, concluimos que existe una constante $\eta^* > 0$, que solo depende de α^*, tal que

$$\eta_\alpha \leq 2\eta^*\big(C_2(\alpha)\big)^{p-2},$$

para todo $\alpha \in (0, \alpha^*]$. Asimismo, con argumentos similares deducimos que existe una constante $\vartheta^* > 0$, que solo depende de α^*, tal que

$$\delta_\alpha \geq \text{mín}\Big\{\frac{\vartheta^*(1-d)}{16\eta^*(\theta^*+1)}\Big(\frac{g^{-1}(\alpha)}{C_2(\alpha)}\Big)^{p-2}, \frac{C_2(\alpha)}{g^{-1}(\alpha)}\Big\}g^{-1}(\alpha). \tag{7.30}$$

Afirmamos que
$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{C_2(\alpha)}{g^{-1}(\alpha)} = 1. \tag{7.31}$$
En efecto, como $\widehat{C}(\alpha) \geq 1$ y g^{-1} es creciente, tenemos que
$$\frac{C_2(\alpha)}{g^{-1}(\alpha)} \geq 1.$$
Por otro lado, existen $\xi_1 \in \Big(G\big(g^{-1}\big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\big)\big), G\big(g^{-1}\big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\big)\big) + \frac{\alpha^2}{2}\Big)$ y $\xi_2 \in \big(\alpha, \alpha\widehat{C}(\alpha)\big)$ tales que
$$\begin{aligned}
\frac{C_2(\alpha)}{g^{-1}(\alpha)} &= \frac{g^{-1}\big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\big) + (G^{-1})'(\xi_1)\frac{\alpha^2}{2}}{g^{-1}(\alpha)} \\
&= \frac{g^{-1}(\alpha) + (g^{-1})'(\xi_2)\alpha\big(\widehat{C}(\alpha) - 1\big) + (G^{-1})'(\xi_1)\frac{\alpha^2}{2}}{g^{-1}(\alpha)} \\
&\leq 1 + \frac{\alpha\big(\widehat{C}(\alpha) - 1\big)}{g'\big(g^{-1}(\alpha)\big)g^{-1}(\alpha)} + \frac{\alpha^2}{2G'\big(g^{-1}\big(\alpha\widehat{C}(\alpha)\big)\big)g^{-1}(\alpha)} \\
&\leq 1 + \frac{g\big(g^{-1}(\alpha)\big)\big(\widehat{C}(\alpha) - 1\big)}{g'\big(g^{-1}(\alpha)\big)g^{-1}(\alpha)} + \frac{\big(g\big(g^{-1}(\alpha)\big)\big)^2}{2G'\big(g^{-1}(\alpha)\big)g^{-1}(\alpha)}.
\end{aligned}$$
Utilizando el hecho de que g_1 y g_2 son analíticas en $x = 0$, deducimos las siguientes identidades:
$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{g\big(g^{-1}(\alpha)\big)\big(\widehat{C}(\alpha) - 1\big)}{g'\big(g^{-1}(\alpha)\big)g^{-1}(\alpha)} = 0,$$
$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\big(g\big(g^{-1}(\alpha)\big)\big)^2}{2G'\big(g^{-1}(\alpha)\big)g^{-1}(\alpha)} = 0,$$
lo que demuestra la afirmación (7.31).

Combinando (7.30) y (7.31) concluimos que existe una constante $C^* > 0$, que solo depende de α^*, tal que
$$\delta_\alpha \geq C^* g^{-1}(\alpha).$$
Por lo tanto,
$$\delta = \min\{\delta_\alpha : \alpha \in [\alpha_*, \alpha^*]\} \geq C^* g^{-1}(\alpha_*). \tag{7.32}$$
Por el Teorema 3.21, sabemos que
$$\varphi(\alpha_*) \in [g^{-1}(\alpha_*)/e^M, \min\{C_1(\alpha_*), C_2(\alpha_*)\}]^n.$$
Observemos que, con argumentos similares a los de la demostración de (7.31), vemos que
$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{C_1(\alpha)}{g^{-1}(\alpha)} = 1 + \frac{1 - \sqrt{1-d}}{(p-q)\sqrt{1-d}} > 1,$$

donde q es la multiplicidad de cero como raíz de g_2. Por lo tanto, se cumple que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{C_1(\alpha)}{g^{-1}(\alpha)} - 1 = \frac{1-\sqrt{1-d}}{(p-q)\sqrt{1-d}} \neq 0.$$

Entonces, teniendo en cuenta que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{C_2(\alpha)}{g^{-1}(\alpha)} - 1 = 0, \tag{7.33}$$

si elegimos

$$\varphi(\alpha_*) \in [g^{-1}(\alpha_*)/e^M, C_2(\alpha_*)]^n,$$

por (7.33) deducimos que, para $\alpha_* > 0$ suficientemente chico, resulta

$$\left(\frac{C_2(\alpha_*)e^M}{g^{-1}(\alpha_*)} - 1\right)\frac{g^{-1}(\alpha_*)}{e^M} \leq \left(\frac{C_2(\alpha_*)e^M}{g^{-1}(\alpha_*)} - 1\right)g^{-1}(\alpha_*) < C^* g^{-1}(\alpha_*).$$

Combinando esta desigualdad con (7.32), concluimos que

$$\|u - \varphi(\alpha_*)\|_\infty \leq C_2(\alpha_*) - g^{-1}(\alpha_*)/e^M < \delta \tag{7.34}$$

para todo $u \in [g^{-1}(\alpha_*)/e^M, C_2(\alpha_*)]^n$. Por lo tanto, si elegimos $\alpha_* < \alpha^*$ que satisfaga la desigualdad de la derecha de (7.34) y un punto arbitrario $u^{(0)}$ en $[g^{-1}(\alpha_*)/e^M, C_2(\alpha_*)]^n$, tenemos que

$$\|u^{(0)} - \varphi(\alpha_*)\|_\infty < \delta.$$

Entonces, aplicando la Proposición 7.11, obtenemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 7.12 *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Entonces podemos calcular una ε-aproximación de la solución positiva de (7.20) para $A = \alpha^*$ con $O\big(n \log_2 \log_2(1/\varepsilon)\big)$ operaciones.*

Finalmente, como en la sección anterior, consideramos el caso en el que g_1 y g_2 son las funciones $g_1(x) := x^p$ y $g_2(x) := x^q$, con $p, q \geq 2$. En tal caso, queremos aproximar las soluciones positivas del siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & -\big(U_2 - U_1\big) + \frac{h^2}{2}U_1^p, \\ 0 & = & -\big(U_{k+1} - 2U_k + U_{k-1}\big) + h^2 U_k^p, \quad (2 \leq k \leq n-1), \\ 0 & = & -\big(U_{n-1} - U_n\big) - hAU_n^q + \frac{h^2}{2}U_n^p \end{array}\right. \tag{7.35}$$

para $A = \alpha^*$ y $p + 1 > 2q$. El enunciado correspondiente para el sistema (7.35) es el siguiente resultado.

Teorema 7.13 *Sea $\varepsilon > 0$ dado. Definimos*

$$C^* := \min\Big\{1, \frac{q(p+1-2q)}{32(p+1)(\theta^*+1)\eta^*}\Big(\frac{C_2(\alpha^*)}{(\alpha^*)^{1/(p-q)}}\Big)^{p-2}\Big\},$$

donde $C_1(\alpha)$, $C_2(\alpha)$, $\widehat{C}(\alpha)$ y $M := pC_1(\alpha)^{p-1}$ se definen (de forma explícita) como en el Teorema 3.22, en tanto que

$$\theta^* := \frac{q(p+1-2q)(\alpha^*)^{(p-1)/(p-q)}}{2(p+1)} \quad y \quad \eta^* := p(p-1)2^{p-2}.$$

Entonces, para todo

$$u^{(0)} \in \Big[\frac{\alpha_*^{1/(p-q)}}{e^M}, C_2(\alpha_*)\Big]^n,$$

con

$$\alpha_* \leq \min\left\{\left(\frac{2(\alpha^*)^{\frac{p-1}{p-q}}\big((\sqrt{1+C^*})^{p+1-2q}-1\big)}{2\widehat{C}(\alpha^*)-2+(p+1)(\alpha^*)^{\frac{p-1}{p-q}}}\right)^{\frac{p-q}{p-1}}, \frac{\alpha^*\Big(\ln(\sqrt{1+C^*})p\Big)^{\frac{p-q}{p-1}}}{C_1(\alpha^*)^{p-q}}\right\},$$

la iteración (7.27)–(7.28) está bien definida y el vector $u^{(N+k)}$ resultante es una ε–aproximación de la solución positiva de (7.35) para $A = \alpha^*$,

$$N := \left\lceil \frac{12\alpha^* C_1(\alpha^*)}{(p+1-2q)\alpha_*^{p-q+1}p - qC^*} \right\rceil + 1, \quad k \geq \log_2 \log_3(3/4c\varepsilon),$$

$$c := \frac{8(p+1)(\theta^*+1)\max\Big\{p(p-1)(2C_2(\alpha^*))^{p-2}, q(q-1)(2C_2(\alpha^*))^{q-2}\alpha^*\Big\}}{q(p+1-2q)\big(\alpha^*\big)^{(p-1)/(p-q)}}$$

y para todo $n \geq 1 + M([\alpha_*, \alpha^*])(p+1)/(2p+2-4q)$, donde $d := 2q/(p+1)$ y $M([\alpha_*, \alpha^*])$ se define como en el Teorema 6.10

Bibliografía

[ABRW96] M.E. Alonso, E. Becker, M.-F. Roy, and T. Wörmann, *Zeroes, multiplicities and idempotents for zerodimensional systems*, Algorithms in Algebraic Geometry and Applications, Proceedings of MEGA'94 (Boston), Progr. Math., vol. 143, Birkhäuser Boston, 1996, pp. 1–15.

[ABSW06] E.L. Allgower, D. Bates, A. Sommese, and C. Wampler, *Solution of polynomial systems derived from differential equations*, Computing **76** (2006), no. 1–2, 1–10.

[AG90] E.L. Allgower and K. Georg, *Numerical continuation methods: An introduction*, Series in Computational Mathematics, vol. 13, Springer Verlag, Heidelberg, 1990.

[AMTR02] F. Andreu, J. Mazon, J. Toledo, and J. Rossi, *Porous medium equation with absorption and a nonlinear boundary condition*, Nonlinear Anal. **49** (2002), no. 4, 541–563.

[AS95] I. Armendáriz and P. Solernó, *On the computation of the radical of polynomial complete intersection ideals*, Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, Proceedings of AAECC-11 (Berlin) (G. Cohen, M. Giusti, and T. Mora, eds.), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 948, Springer, 1995, pp. 106–119.

[BB98] C. Bandle and H. Brunner, *Blow–up in diffusion equations: A survey*, Journal of Computational and Applied Mathematics **97** (1998), no. 1–2, 3–22.

[BCR98] J. Bochnack, M. Coste, and M.-F. Roy, *Real algebraic geometry*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), vol. 36, Springer, Berlin, 1998.

[BCS97] P. Bürgisser, M. Clausen, and M.A. Shokrollahi, *Algebraic complexity theory*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 315, Springer, Berlin, 1997.

[BCSS98] L. Blum, F. Cucker, M. Shub, and S. Smale, *Complexity and real computation*, Springer, New York Berlin Heidelberg, 1998.

[BE89] J. Bebernes and D. Eberly, *Mathematical problems from combustion theory*, Applied Mathematical Sciences, vol. 83, Springer-Verlag, New York, 1989.

[BP06] C. Beltrán and L.M. Pardo, *Non universal polynomial equation solving*, Foundations of Computational Mathematics, Santander 2005 (Cambridge) (L.M. Pardo *et al.*, ed.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 331, Cambridge Univ. Press, 2006, pp. 1–35.

[BR01] J. Fernandez Bonder and J. Rossi, *Blow-up vs. spurious steady solutions*, Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2001), no. 1, 139–144.

[Can84] J. Cannon, *The one-dimensional heat equation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1984.

[CFQ91] M. Chipot, M. Fila, and P. Quittner, *Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, Acta Math. Univ. Comenian **60** (1991), no. 1, 35.

[CGH+03] D. Castro, M. Giusti, J. Heintz, G. Matera, and L.M. Pardo, *The hardness of polynomial equation solving*, Found. Comput. Math. **3** (2003), no. 4, 347–420.

[CLO98] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea, *Using algebraic geometry*, Grad. Texts in Math., vol. 185, Springer, New York, 1998.

[CQ04] M. Chipot and P. Quittner, *Equilibria, connecting orbits and a priori bounds for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, J. Dynam. Differential Equations **16** (2004), no. 1, 91–138.

[DA98] S.S. Dragomir and R.P. Agarwal, *Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula*, Appl. Math. Lett. **11** (1998), no. 5, 91–95.

[DDM05] M. De Leo, E. Dratman, and G. Matera, *Numeric vs. symbolic homotopy algorithms in polynomial system solving: A case study*, J. Complexity **21** (2005), no. 4, 502–531.

[DL06] C. Durvye and G. Lecerf, *A concise proof of the Kronecker polynomial system solver from scratch*, Manuscript Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines, France, 2006.

[DM09] E. Dratman and G. Matera, *On the solution of the polynomial systems arising in the discretization of certain odes*, Computing **85** (2009), no. 4, 301–337.

[DMW09] E. Dratman, G. Matera, and A. Waissbein, *Robust algorithms for generalized Pham systems*, Comput. Complexity **18** (2009), no. 1, 105–154.

[Dra10] E. Dratman, *Approximation of the solution of certain nonlinear odes with linear complexity*, J. Comput. Appl. Math. **233** (2010), no. 9, 2339–2350.

[Duv90] J. Duvallet, *Computation of solutions of two–point boundary value problems by a simplicial homotopy algorithm*, Computational Solution of Nonlinear Systems of Equations (E. Allgower and K. Georg, eds.), Lectures in Applied Mathematics, vol. 26, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, pp. 135–150.

[FG99] B. Fiedler and T. Gedeon, *A Lyapunov function for tridiagonal competitive-cooperative systems*, SIAM J. Math. Anal. **30** (1999), no. 3, 469–478.

[FGR02] R. Ferreira, P. Groisman, and J. Rossi, *Numerical blow-up for a nonlinear problem with a nonlinear boundary condition.*, Math. Models Methods Appl. Sci. **12** (2002), no. 4, 461–484.

[GH01] M. Giusti and J. Heintz, *Kronecker's smart, little black–boxes*, Proceedings of Foundations of Computational Mathematics, FoCM'99, Oxford 1999 (Cambridge) (A. Iserles R. Devore and E. Süli, eds.), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 284, Cambridge Univ. Press, 2001, pp. 69–104.

[GHS93] M. Giusti, J. Heintz, and J. Sabia, *On the efficiency of effective Nullstellensätze*, Comput. Complexity **3** (1993), 56–95.

[GK04] B. Gilding and R. Kersner, *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction*, Birkhäuser, Berlin, 2004.

[GLS01] M. Giusti, G. Lecerf, and B. Salvy, *A Gröbner free alternative for polynomial system solving*, J. Complexity **17** (2001), no. 1, 154–211.

[GMW93] J. Lopez Gomez, V. Marquez, and N. Wolanski, *Dynamic behaviour of positive solutions to reaction–diffusion problems with nonlinear absorption through the boundary*, Revista de la Unión Matemática Argentina **38** (1993), 196–209.

[Gri96] P. Grindrod, *The theory and applications of reaction-diffusion equations: patterns and waves*, Clarendon Press, Oxford, 1996.

[Hei83] J. Heintz, *Definability and fast quantifier elimination in algebraically closed fields*, Theoret. Comput. Sci. **24** (1983), no. 3, 239–277.

[HMPW98] J. Heintz, G. Matera, L.M. Pardo, and R. Wachenchauzer, *The intrinsic complexity of parametric elimination methods*, Electron. J. SADIO **1** (1998), no. 1, 37–51.

[HS82] J. Heintz and C. P. Schnorr, *Testing polynomials which are easy to compute*, International Symposium on Logic and Algorithmic, Zurich 1980, Monogr. Enseig. Math., vol. 30, 1982, pp. 237–254.

[Kac02] B. Kacewicz, *Complexity of nonlinear two-point boundary-value problems*, J. Complexity **18** (2002), no. 3.

[Lev90] H.A. Levine, *The role of critical exponents in blow up theorems*, SIAM Reviews **32** (1990), 262–288.

[Meu00] G. Meurant, *Gaussian elimination for the solution of linear systems of equations*, Handbook of numerical analysis (P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds.), vol. VII, North–Holland, Amsterdam, 2000, pp. 3–170.

[Mor90] J.J. Moré, *A collection of nonlinear model problems*, Computational solutions of nonlinear systems of equations (E.L. Allgower and K. Georg, eds.), American Mathematical Society, Providence, RI, 1990, pp. 723–762.

[Mur02] J.D. Murray, *Mathematical biology. Vol. 1: An introduction*, Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 17, Springer, New York, 2002.

[OR70] J. Ortega and W.C. Rheinboldt, *Iterative solutions of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, New York, 1970.

[Pao92] C.V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press, 1992.

[Par95] L.M. Pardo, *How lower and upper complexity bounds meet in elimination theory*, Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error Correcting Codes, Proceedings of AAECC–11 (Berlin) (G. Cohen, M. Giusti, and T. Mora, eds.), Lecture Notes in Comput. Sci., vol. 948, Springer, 1995, pp. 33–69.

[Par00] ———, *Universal elimination requires exponential running time*, Computer Algebra and Applications, Proceedings of EACA–2000, Barcelona, Spain, September 2000 (A. Montes, ed.), 2000, pp. 25–51.

[Qui93] P. Quittner, *On global existence and stationary solutions for two classes of semilinear parabolic problems*, Comment. Math. Univ. Carolin. **34** (1993), no. 1, 105–124.

[Ren92] J. Renegar, *On the computational complexity and geometry of the first order theory of the reals*, J. Symbolic Comput. **13** (1992), no. 3, 255–352.

[Rhe98] W.C. Rheinboldt, *Methods for solving systems of nonlinear equations*, CBMS–NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 70, SIAM, Philadelphia, 1998.

[Ros98] J. Rossi, *The blow-up rate for a semilinear parabolic equation with a nonlinear boundary condition*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **67** (1998), no. 2, 343–350.

[Rou97] F. Rouillier, *Solving zero–dimensional systems through rational univariate representation*, Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. **9** (1997), no. 5, 433–461.

[RT01] A. Rodríguez–Bernal and A. Tajdine, *Nonlinear balance for reaction–diffusion equations under nonlinear boundary conditions: Dissipativity and blow–up*, J. Differential Equations **169** (2001), no. 2, 332–372.

[SF73] G. Strang and G. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentice–Hall, 1973.

[SGKM95] A.A. Samarskii, V.A. Galaktionov, S.P. Kurdyumov, and A.P. Mikhailov, *Blow–up in quasilinear parabolic equations*, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 19, Walter de Gruyter, Berlin, 1995.

[Sha94] I.R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry: Varieties in projective space*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1994.

[Smi84] J. Smillie, *Competitive and cooperative tridiagonal systems of differential equations*, SIAM J. Math. Anal. **15** (1984), no. 3, 530–534.

[Smi95] H. Smith, *Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, Math. Surveys Monogr., vol. 41, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[Stu02] B. Sturmfels, *Solving systems of polynomial equations*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.

[Wal70] W. Walter, *Differential and integral inequalities*, Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 55, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1970.

[Wal98] ———, *Ordinary differential equations*, Grad. Texts in Math., vol. 182, Springer, New York, 1998.

[Wat80] L. Watson, *Solving finite difference approximations to nonlinear two-point boundary value problems by a homotopy method*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. **1** (1980), no. 4, 467–480.

[ZS60] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative algebra II*, Grad. Texts in Math., vol. 39, Springer, New York, 1960.