UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Ideales de operadores multilineales en espacios de Banach y espacios de sucesiones

Tesis presentada para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires
en el área Ciencias Matemáticas

Norberto Román Villafañe

Director de tesis: Dra. Verónica Dimant
Consejero de estudios: Dr. Daniel Carando

Buenos Aires, 2016
Fecha de defensa: 27 de Abril de 2016

Ideales de operadores multilineales en espacios de Banach y espacios de sucesiones

Resumen

En este trabajo definimos el espacio de sucesiones asociado a un ideal de operadores multilineales en espacios de sucesiones. Es decir, para cada ideal de operadores multilineales $\mathfrak{A}$, para cada par de espacios de sucesiones E y F y para cada $n \in \mathbb{N}$, asociamos un espacio de sucesiones que lo notamos $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$. Vamos a utilizar dicho espacio para comparar los ideales de operadores multilineales nucleares, integrales, extendibles y continuos en espacios de sucesiones ℓ_p. También vamos a estudiar características estructurales de dichos espacios de sucesiones —como maximalidad, minimalidad y dualidad— en relación con ciertas características del ideal y de los espacios de sucesiones involucrados. Damos aplicaciones para los ideales de operadores multilineales r-dominados y (E, p)-dominados.

Definimos la propiedad de Radon-Nikodým vectorial para un ideal de operadores multilineales y mostramos, bajo ciertas hipótesis, que los ideales de operadores multilineales con dicha propiedad coinciden isométricamente con su núcleo minimal en espacios Asplund. Como consecuencia, probamos la existencia de ciertas estructuras en algunos ideales de operadores multilineales clásicos (existencia de bases, separabilidad o la propiedad de Radon-Nikodým). Por otra parte, damos una demostración alternativa a dos resultados ya conocidos. Uno es la versión vectorial del Teorema de Littlewood-Bogdanowicz-Pełczyński que dice que los operadores multilineales de $c_0 \times \cdots \times c_0$ en Y son aproximables si y solo si Y no contiene copia de c_0. El otro dice que el ideal de operadores multilineales Pietsch-integrales coincide isométricamente con el ideal de operadores multilineales nucleares en espacios Asplund.

Palabras clave: Ideales de operadores multilineales, espacios de sucesiones, productos tensoriales, normas tensoriales, estructuras en productos tensoriales.

Ideals of multilinear operators on Banach spaces and sequence spaces

Abstract

In this work we define the sequence space associated with an ideal of multilinear operators between sequence spaces. That is, for each ideal of multilinear operators $\mathfrak{A}$, for each pair of sequence spaces E and F and for each $n \in \mathbb{N}$, we associate a sequence space that we note $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$. We will use that space to compare the ideals of nuclear, integral, extendible and continuous multilinear operators between ℓ_p-spaces. We will also study structural characteristics of such sequence spaces — as maximality, minimality and duality — regarding certain characteristics of the ideal and the sequence spaces involved. We will give applications to the ideals of r-dominated and (E, p)-dominated multilinear operators.

We define the vector Radon-Nikodým property for an ideal of multilinear operators and show, under certain assumptions, that the ideals of multilinear operators with that property coincides isometrically with its minimal kernel on Asplund spaces. As a consequence, we prove the existence of certain structures in some classical ideals of multilinear operators (existence of bases, separability or the Radon-Nikodým property). Furthermore, we give an alternative proof of two results already known. One is the vector version of the theorem of Littlewood-Bogdanowicz-Pełczyński that says that the multilinear operators from $c_0 \times \cdots \times c_0$ to Y are aproximables if and only if Y does not contain a copy of c_0. The other one says that the ideal of multilinear operators Pietsch-integral coincides isometrically with the ideal of nuclear multilinear operators on Asplund spaces.

Keywords: Ideals of multilinear operators, sequence spaces, tensor products, tensor norms, structures on tensor products.

Agradecimientos

A mis directores Vero y Dani, por la guía, el apoyo y los consejos. A Dani, por estar siempre predispuesto a responder consultas (y por sus respuestas). A Vero, con quién compartí más de cerca estos últimos años, por su dedicación, compañía y generosidad. Una gran maestra.

A mis padres, por darme siempre la libertad de elegir y apoyarme en mis desiciones.

A mi familia en general. A mis hermanas Silvina, Roxana, Valeria y Bárbara. A mis sobrinos Santi, Maru, Andy, Juli, Pachu, Martín, Anita y Minchu. Por estar siempre y alegrar mi vida. A la nueva familia, Claudio, Rosa, Ailén y Nahuel por el cariño y la ayuda en todo momento.

A mis amigos de la vida, los que salieron de la facultad y los que no. Por todos los momentos vividos, los viajes, las vacaciones, las noches y los días.

A los compañeros de la facu, por las charlas en los almuerzos y café. En especial a todos lo que pasaron alguna vez por la 2046, por la buena onda y el buen clima para laburar.

A la gente del seminario de funcional. En especial a Dany por ser un gran compañero de trabajo.

A las secretarias del Departamento de Matemática y CONICET por toda la ayuda en las imposibles cuestiones burocráticas y por la buena predisposición para ayudar.

Al CONICET por financiar mi doctorado y a la UBA e IMAS por darme un buen lugar de trabajo.

A Nadia, mi amor y compañera de la vida, que junto con los "pupus" son la fuerza y el sosten de mi vida.

Índice general

Introducción

En 1920, Stefan Banach presenta su tesis doctoral [Ban22], en la que define los espacios de tipo (B), como espacios vectoriales normados y completos. A partir de 1928, Fréchet los llama espacios de Banach. Ejemplos de dichos espacios ya se conocían: $C[a,b]$, el espacio de las funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ (Hadamard, 1903); $L_2[a,b]$, el espacio de las funciones de cuadrado integrable (Fréchet y Riesz, 1907) y su generalización $L_p[a,b]$, para $1 < p < \infty$ (Riesz, 1909), etc. En particular, la teoría de los espacios ℓ_p, el espacio de las sucesiones absolutamente p-sumantes, había sido desarrollada por Riesz en 1913. Más adelante, en el año 1934, Köthe y Toeplitz publican el libro "*Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen*" [KT34] donde desarrollan una teoría general de espacios de sucesiones (luego usada fundamentalmente para el estudio de espacios localmente convexos).

En 1932, Banach publica su libro "*Théorie des opérations linéaires*"[Ban32] ([Ban32t] traducción al inglés) que puede considerarse el punto de partida de la teoría de espacios de Banach y uno de los libros más importantes del Análisis Funcional. En este libro se definen, entre otros, los conceptos de isomorfismo, isometría, metric surjection, distancia de Banach-Mazur y diversas nociones sobre sucesiones en espacios de Banach. En esa misma década, se estudian los espacios de formas y operadores lineales, es decir, el espacio de funciones lineales continuas de un espacio de Banach en el cuerpo de escalares y el espacio de funciones lineales continuas entre espacios de Banach, respectivamente. Por consiguiente, se estudia el espacio dual X' de un espacio de Banach X, sus relaciones y sus propiedades, como también se demuestran los teoremas de la aplicación abierta, del gráfico cerrado y de extensión de Hahn-Banach, pilares fundamentales de la teoría.

Los productos tensoriales aparecen por primera vez en el Análisis Funcional en una serie de trabajos de Murray y Von Neumann sobre operadores en espacios de Hilbert en la década del '30. Pero es Schatten en la década del '40 (luego Schatten-Von Neumann) quien realiza un estudio de productos tensoriales en espacios de Banach en las publicaciones "*The cross-space of linear transformations*" (I, II y III) y en el libro "*A theory of cross-spaces*" (ver [Sch43, Sch46, SVN46, SVN48, Sch50]). Ya en el primero de esta serie de trabajos [Sch43], Schatten define la norma tensorial (cross norm) más grande y la norma tensorial más chica —actualmente denominadas norma proyectiva π y norma inyectiva ε— como también las normas tensoriales llamadas "razonables", que son aquellas mayores que la norma inyectiva y menores que la norma proyectiva, con las que usualmente se trabaja. Pero el paso fundamental lo da Grothendieck en "*Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*" [Gro53] y en su tesis doctoral "*Produits tensoríels topologiques et espaces nucléaires*" [Gro55]. Dichos trabajos contienen una teoría general sobre normas en productos tensoriales entre espacios de Banach. En ellos se describen distintas maneras de construir nuevas normas tensoriales a partir de normas conocidas y se estudia la dualidad entre estas normas. Además, se sientan las bases de lo que hoy se llama "teoría local", es decir, el estudio de espacios de Banach en términos de sus subespacios de dimensión finita. Quizás por su difícil lectura el trabajo de Grothendieck en esta área no fue reconocido por muchos años, hasta que en 1968 Lindenstrauss y Pełcyński en "*Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications*" [LP68] redescubrieron el trabajo de Grothendieck y le dieron el merecido reconocimiento. El objetivo de Lindentrauss y Pełczyński era "traducir" el *Résumé* de Grothendieck a un lenguaje más moderno y comprensible como también dar nuevas aplicaciones a los resultados del "*Résumé*" sin el uso de los productos tensoriales. Así dan una nueva interpretación del "*théorème fondamental de la théorie métrique des produits tensoriels*" (el resultado más importante del *Résumé* y el único con demostración) como una desigualdad entre matrices en espacios de Hilbert, que hoy es conocida como la *desigualdad de Grothendieck*. Además presentan aplicaciones de esta desigualdad sobre operadores absolutamente p-sumantes. Estos operadores, que habían sido definidos un año antes por Pietsch [Pie67], son el punto de partida para que él, junto a su escuela de analistas funcionales en Jena, desarrollara el estudio de los ideales de operadores. Es importante remarcar que la teoría la exponen de manera categórica, es decir, mediante construcciones generales y propiedades universales pero sin el uso de los productos tensoriales. Este estudio culmina con la publicación del libro "*Operator ideals*" [Pie80], uno de los más importantes en esta área del Análisis Funcional, que presenta de forma enciclopédica lo conocido hasta ese momento.

Grothendieck en su *Résumé* plantea la conjetura de que las normas proyectiva e inyectiva nunca resultan equivalentes en el producto tensorial de dos espacios de Banach de dimensión infinita. Sin embargo, Pisier en 1983 [Pis83] resuelve la conjetura por la negativa, construyendo un espacio de Banach de dimensión infinita X que satisface $X \otimes_\pi X = X \otimes_\varepsilon X$. En 1986, Pisier publica el libro "*Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*" [Pis86] en donde presenta los resultados que se generaron a partir del *Résumé* desde el artículo de Lindenstrauss y Pełcyński en adelante. Este trabajo de Pisier motiva que muchos matemáticos comenzaran a usar las técnicas tensoriales (relegadas hasta ese momento) que permiten establecer una dualidad entre normas/productos tensoriales en espacios de Banach e ideales de operadores. Esta dualidad representa una herramienta fundamental en el desarrollo de esta teoría ya que da nuevos y provechosos enfoques para atacar un mismo problema. En 1993, Defant y Floret publican el libro "*Tensor norms and Operators ideals*" [DF93], en el que describen la teoría de productos tensoriales y la teoría de ideales de operadores en conjunto. Este compendio es uno de los libros más influyentes en esta área del Análisis Funcional y representa el punto de partida para que los investigadores utilicen ambos lenguajes indistintamente.

En el mencionado libro "*Théorie des opérations linéaires*", Banach plantea la necesidad de desarrollar una teoría para operadores no lineales y anticipa su proyecto de escribir un segundo tomo con estos contenidos. Lamentablemente, muere en 1945 sin haber podido realizarlo. De todas maneras, diversos autores —Fréchet, Gateaux, Michal, Nachbin entre otros— se abocan a ese objetivo y comienzan a desarrollar las teorías de operadores multilineales y polinomios en espacios de Banach como una herramienta para el estudio de funciones holomorfas en espacios de dimensión infinita (ver [Muj86, Din99]). En 1984, Pietsch presenta "*Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*" [Pie84] donde extiende el concepto de ideal de operadores (lineales) al de ideal de formas multilineales y sienta las bases para su desarrollo futuro. Dice: "En orden de extender esta maquinaria (lineal) al caso no lineal, consideramos —como primer paso— ideales de funcionales multilineales. Luego, generalizando este escenario de valores escalares, podemos definir ideales de operadores multilineales. Finalmente, resulta natural el introducir las clases de funciones a valores vectoriales sobre espacios de Banach que son diferenciables u holomorfas tales que sus derivadas de Fréchet tienen propiedades especiales". Básicamente, un ideal de operadores es un subespacio del espacio de operadores continuos que es cerrado al componerlo con operadores lineales y donde se tiene definida una norma que hace del subespacio un espacio de Banach.

Una forma de describir las relaciones entre distintos ideales de operadores y también la estructura interna de cada uno de ellos es estudiarlos sobre los espacios de Banach más simples: espacios ℓ_p (no sólo por simpleza, sino porque se pueden deducir propiedades generales a partir del comportamiento en dichos espacios). Más aún, podemos estudiar cierta clase de operadores que tienen sentido en espacios de sucesiones llamados operadores diagonales. En los trabajos de Carl [Carl76], König [Kon75] y Pietsch [Pie80] para espacios ℓ_p y en el de Garling [Gar74] para espacios de sucesiones generales, se estudian los operadores lineales diagonales y se define el concepto de "limit order", que resulta ser una herramienta útil para poder comparar diferentes ideales. En [CDS06] y en [CDS07] se extiende el concepto de limit order para formas multilineales y se estudian los ideales de formas multilineales nucleares, integrales, extendibles, r-dominados, multiple sumantes y continuas sobre espacios ℓ_p. En pocas palabras, el limit order de un ideal de operadores (lineales o multilineales) indica el "tamaño máximo" que pueden tener los coeficientes de un operador diagonal para pertenecer al ideal. Más precisamente, dado $\alpha = (\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares, llamamos $T_\alpha \in \mathcal{L}(^n\ell_p;\ell_q)$ al operador n-lineal diagonal asociado a α, que está dado por

$$T_\alpha(x_1,\ldots,x_n) = \big(\alpha_k \cdot x_1(k)\cdots x_n(k)\big)_{k\in\mathbb{N}}.$$

Si $\mathfrak{A}$ es un ideal de operadores n-lineales y $1 \le p,q \le \infty$, el limit order se define como

$$\lambda_n(\mathfrak{A};p,q) = \text{ínf}\left\{\lambda : \text{ para cada } \alpha \in \ell_{1/\lambda},\ T_\alpha \in \mathfrak{A}(^n\ell_p;\ell_q)\right\}.$$

Por otro lado, dado un ideal de operadores $\mathfrak{A}$ podemos considerar dos ideales asociados a este: el ideal más chico y el ideal más grande que coincide con $\mathfrak{A}$ sobre subespacios de dimensión finita. Se los llama $\mathfrak{A}^{min}$ y $\mathfrak{A}^{max}$, respectivamente. A partir de estas definiciones surge una pregunta natural, ¿bajo qué condiciones se tiene que $\mathfrak{A}^{min} = \mathfrak{A}^{max}$? Esto es lo que se denomina un resultado de coincidencia. En 1977, Lewis estudia problemas de esta naturaleza en el contexto lineal [Lew77], que en términos de normas y productos tensoriales se traducen en coincidencias de la forma $X'\tilde{\otimes}_\alpha Y' = (X\tilde{\otimes}_{\alpha'} Y)'$. Basados en sus resultados, Carando y

Galicer [CG11] estudian un problema análogo en el contexto de ideales de formas multilineales y de polinomios homogéneos con valores escalares. En ambos casos, dos de los ingredientes fundamentales son la extendibilidad del ideal y la propiedad de Radon-Nikodým para normas tensoriales.

Comenzamos la investigación de esta tesis proponiendo una generalización del concepto de limit order. Definimos el espacio de sucesiones asociado a un ideal, que nos permite describir explícitamente los elementos diagonales presentes en cada ideal. Además, a diferencia del limit order, podemos definirlo para espacios de sucesiones cualesquiera (no necesariamente espacios ℓ_p). Específicamente, para un ideal de operadores n-lineales $\mathfrak{A}$ y espacios de sucesiones E y F, definimos el espacio de sucesiones asociado como

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F) = \{\alpha \in \ell_\infty \ : \ T_\alpha \in \mathfrak{A}(^n E; F)\},$$

donde T_α es el operador diagonal asociado a α.

Uno de los teoremas centrales del Análisis Funcional es el Teorema de Hahn-Banach, que dice que toda forma lineal sobre un espacio de Banach se extiende a cualquier superespacio, preservando su norma. El hecho de que este teorema no se pueda generalizar al contexto de operadores lineales, multilineales o polinomiales sobre espacios de Banach, ni siquiera relajando la condición de preservar la norma, generó gran cantidad de líneas de investigación sobre este tema como puede verse, por ejemplo, en los trabajos [KR98, Car99, CZ99, CGJ01, Car01, CL05, JPPGV07, CS14]. Una de estas líneas se refiere al estudio de operadores extendibles, que son los que sí se extienden a cualquier superespacio. En relación a esto, nuestro enfoque se centra en estudiar la relación sobre espacios ℓ_p del ideal de operadores multilineales extendibles con otros ideales de operadores multilineales habitualmente estudiados: nucleares, integrales, acotados. Es importante notar que en [Vil03] se prueba que si el espacio de llegada de un operador multilineal está complementado en su bidual (por ejemplo si es un espacio dual, como son los espacios ℓ_p), entonces los operadores multilineales Pietsch y Grothendieck integrales coinciden. En este caso, los llamamos integrales y los notamos con $\mathcal{I}(^n\ell_p; \ell_q)$. Sabiendo que los operadores multilineales nucleares son integrales (considerando medidas atómicas) y que los operadores multilineales integrales son extendibles [CL05], se tiene la siguiente cadena de inclusiones entre los ideales de operadores multilineales

$$\mathcal{N}(^n\ell_p; \ell_q) \subseteq \mathcal{I}(^n\ell_p; \ell_q) \subseteq \mathcal{E}(^n\ell_p; \ell_q) \subseteq \mathcal{L}(^n\ell_p; \ell_q),$$

que se traduce en la siguiente cadena de inclusiones entre los espacios de sucesiones asociados a cada uno de ellos

$$\ell_n(\mathcal{N}; p, q) \subseteq \ell_n(\mathcal{I}; p, q) \subseteq \ell_n(\mathcal{E}; p, q) \subseteq \ell_n(\mathcal{L}; p, q).$$

A partir de estas inclusiones, nos preguntamos cuándo (es decir, para qué valores de p, q y n) los operadores multilineales diagonales extendibles son "lo máximo posible" (*i.e.* los operadores multilineales continuos son extendibles) y cuándo son “lo mínimo posible” (*i.e.* los operadores multilineales extendibles son integrales).

A continuación, buscamos dar una teoría general sobre el espacio de sucesiones asociado a un ideal de operadores multilineales en espacios de sucesiones cualesquiera y estudiamos relaciones estructurales que vinculan al ideal con los espacios de sucesiones involucrados. Las propiedades en las que nos concentramos son las que se refieren a maximalidad, minimalidad, dualidad y a algunas relaciones con espacios de sucesiones asociados a ideales de operadores lineales.

Por último, atacamos el problema de buscar condiciones bajo las cuales un ideal $\mathfrak{A}$ coincide isométricamente con su núcleo minimal $\mathfrak{A}^{min}$. Definimos la propiedad de Radon-Nikodým para ideales de operadores multilineales en el sentido de [Lew77, CG11] (donde se dan propiedades similares para normas tensoriales) del siguiente modo: Dado Y un espacio de Banach, decimos que un ideal de operadores n-lineales $\mathfrak{A}$ tiene la Y-propiedad de Radon-Nikodým si la aplicación natural

$$\big(\ell_1(J_1)\widetilde{\otimes}\ldots\widetilde{\otimes}\ell_1(J_n)\widetilde{\otimes}Y;\alpha\big) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{A}\big(c_0(J_1),\ldots,c_0(J_n);Y\big),$$

resulta una metric surjection para todo $J_1,\ldots,J_n$ conjuntos de índices. Esta definición está relacionada con un resultado de coincidencia en espacios c_0. Es decir, si $\mathfrak{A}$ tiene la Y-propiedad de Radon-Nikodým entonces se tiene que

$$\mathfrak{A}\big(c_0(J_1),\ldots,c_0(J_n);Y\big) \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}\big(c_0(J_1),\ldots,c_0(J_n);Y\big)$$

para todo $J_1,\ldots,J_n$ conjuntos de índices (donde $\overset{1}{=}$ quiere decir isomorfimo isométrico). En el caso en que un ideal $\mathfrak{A}$ tenga la Y-propiedad de Radon-Nikodým para todo espacio de Banach Y, decimos que el ideal $\mathfrak{A}$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým vectorial. Vamos a usar esta propiedad para poder extender el resultado de coincidencia mencionado sobre espacios c_0 a un resultado de coincidencia sobre espacios Asplund.

A continuación, pasamos a describir los contenidos de cada capítulo.

Capítulo 1: Preliminares

Este capítulo contiene el material necesario para comprender esta tesis. Introducimos las notaciones, definiciones y resultados básicos sobre ideales de operadores multilineales y presentamos los ideales con los que trabajaremos en los demás capítulos. Damos las definiciones de los productos y las normas tensoriales y mostramos la dualidad entre los ideales de operadores multilineales y los productos tensoriales. Resumimos también las notaciones y resultados básicos sobre espacios de sucesiones e intruducimos conceptos de maximalidad, minimalidad y dualidad tanto para ideales de operadores multilineales como para espacios de sucesiones.

Capítulo 2: Operadores y formas multilineales diagonales en espacios ℓ_p

Definimos el espacio de sucesiones asociado a un ideal de formas y operadores multilineales en espacios ℓ_p. En la primera sección de este capítulo mostramos en términos del espacio de sucesiones asociado los resultados sobre limit order de ideales de formas multilineales nucleares, integrales, extendibles y continuos que se encuentran en [CDS06] y en [CDS07]. En el caso del espacio de sucesiones asociado al ideal de operadores multilineales extendibles, pudimos caracterizar explícitamente el caso $1 < p < 2$, desconocido hasta el momento. Específicamente, probamos, en Proposición 2.1.5, que $\ell_n(\mathcal{E}; p) = \ell_{p'/2}$ para $1 < p < 2$. Este proceso nos devela también un comportamiento inesperado de las formas multilineales diagonales: mientras que cuando toda forma n-lineal en $X_1 \times \cdots \times X_n$ es extendible, resulta que toda forma $(n-1)$-lineal en $(n-1)$ de esos espacios debe ser extendible, este comportamiento no se mantiene al restringirnos a formas n-lineales diagonales. En virtud del Lema 2.1.4, toda forma trilineal diagonal en $\ell_1 \times \ell_1 \times \ell_2$ es extendible, pero existen formas bilineales diagonales en $\ell_1 \times \ell_2$ no extendibles.

En la segunda sección de este capítulo nos abocamos al estudio de las sucesiones asociadas a ideales en el contexto vectorial. Caracterizamos estos espacios para los ideales de operadores multilineales nucleares, integrales, extendibles y continuos de $\ell_p \times \cdots \times \ell_p$ en ℓ_q. Únicamente en el caso de los operadores extendibles cuando $1 < p < 2$ nuestra descripción no es completa pero obtenemos aproximaciones que de todas maneras nos sirven para poder comparar si los elementos diagonales de cada ideal coinciden o no. Para conseguir estos resultados usamos las normas tensoriales asociadas a los ideales y la dualidad entre productos tensoriales e ideales de operadores multilineales como también ciertos aspectos de la teoría de operadores absolutamente sumantes.

Capítulo 3: Operadores multilineales en espacios de sucesiones

En la primera sección de este capítulo definimos, para E y F espacios de sucesiones, el espacio de sucesiones $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ asociado a un ideal $\mathfrak{A}$ de operadores multilineales de $E \times \cdots \times E$ en F. Demostramos, para el ideal de los extendibles $\mathcal{E}$, que $\ell_n(\mathcal{E}; p, F) = F$ para todo $p \geq 2$ y cualquier F. Además, relacionamos el espacio de sucesiones asociado a un ideal con un cierto espacio de multiplicadores. En particular, mostramos que para los operadores multilineales continuos vale que $\ell_n(\mathcal{L}; E, F^\times) \overset{1}{=} M(F, \ell_n(\mathcal{L}; E))$ y que si el espacio F es n-convexo se tiene que $\ell_n(\mathcal{L}; E, F)$ también lo es.

En la segunda sección obtenemos una versión del density lemma para operadores multilineales diagonales en ideales maximales que resulta una herramienta fundamental para poder dar resultados generales sobre maximalidad (ver [DF93, Section 13.4]). Demostramos que $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^{max} \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{max}; E, F^{\times\times})$, de donde se deduce que si el ideal $\mathfrak{A}$ y el espacio F son maximales, entonces el espacio $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es maximal. También probamos los resultados análogos sobre minimalidad, es decir, que $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^{min} \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F^{min})$ y que si el ideal $\mathfrak{A}$ y el espacio F son minimales, entonces el espacio $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es minimal.

En la tercera sección, desarrollamos la dualidad entre el espacio de sucesiones asociado a un ideal $\mathfrak{A}$ y el espacio de sucesiones asociado a su adjunto $\mathfrak{A}^*$. Probamos que $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^\times \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^*; E^\times, F^\times)$ y que si $\mathfrak{A}$ y F son maximales, entonces $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F) \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^*; E^\times, F^\times)^\times$.

En la cuarta sección, presentamos aplicaciones de los resultados obtenidos en las secciones anteriores. Mostramos que a partir de los resultados generales podemos deducir los espacios de sucesiones asociados a los ideales de operadores multilineales nucleares e integrales (obtenidos en el Capítulo 2 por otro camino). Relacionamos el espacio de sucesiones del ideal de operadores multilineales r-dominados con el espacio de sucesiones asociado al ideal de operadores lineales absolutamente r-sumantes. Obtenemos teoremas de inclusión y composición para el ideal de operadores multilineales (E,p)-dominados y probamos que si los espacios $X_1,\dots,X_n$ tienen cotipo 2, entonces los operadores n-lineales $(E,1)$-dominados definidos en $X_1\times\cdots\times X_n$ coinciden con los $(\ell_n(\mathcal{L},\ell_{2n},E),2)$-dominados. Esto extiende un resultado de [DMM02] sobre operadores lineales absolutamente (E,p)-sumantes. Mostramos también algunos ejemplos de espacios de sucesiones asociados a los ideales de operadores multilineales integrales y continuos sobre espacios de Lorentz.

Capítulo 4: Resultados de coincidencia entre un ideal y su núcleo minimal

Comenzamos este capítulo definiendo, para un ideal de operadores multilineales $\mathfrak{A}$, la Y-propiedad de Radon-Nikodým y la propiedad de Radon-Nikodým vectorial. Demostramos que $\mathcal{L}({}^n c_0;Y)=\mathcal{L}_{app}({}^n c_0;Y)$ si y solo si Y no contiene una copia de c_0, lo que puede verse como la versión vectorial del conocido teorema de Littlewood-Bogdanowicz-Pełczyński (ver [Lit30, Bog57, Pel57] y también [Din99]) que establece que toda forma multilineal $T: c_0\times\cdots\times c_0\to\mathbb{K}$ es aproximable. Utilizamos aquel resultado para probar el teorema principal del capítulo que establece que para ideales extendibles (ideales en donde todo operador multilineal puede extenderse a cualquier superespacio del dominio) que tienen la propiedad de Radon-Nikodým vectorial vale que $\mathfrak{A}^{min}(X_1,\dots,X_n;Y)$ coincide isométricamente con $\mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y)$ si $X_1,\dots,X_n$ son espacios Asplund. Este resultado generaliza lo probado por Lewis (ver [DF93, Theorem 33.3]) para ideales de operadores lineales y por Carando y Galicer (ver [CG11, Theorem 3.5]) para ideales de formas multilineales. También relacionamos propiedades intrínsecas del espacio $\mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y)$ con propiedades de los espacios $X_1,\dots,X_n,Y$ y de su producto tensorial como por ejemplo, la existencia de base de Schauder, la separabilidad, la propiedad de Radon-Nikodým y la propiedad Asplund. Demostramos que bajo ciertas hipótesis sobre el ideal $\mathfrak{A}$ y sobre la existencia de base de Schauder de los espacios involucrados podemos definir un orden adecuado (el square ordering) para hallar una base de Schauder para el ideal $\mathfrak{A}$. También probamos que bajo hipótesis adecuadas sobre el ideal $\mathfrak{A}$, si $X_1',\dots,X_n'$ e Y son separables, resulta $\mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y)$ separable. Además, mostramos que para un ideal $\mathfrak{A}$ extendible maximal con la Y'-propiedad de Radon-Nikodým son equivalentes que $X_1,\dots,X_n,Y$ son Asplund, que $(X_1\tilde{\otimes}\dots\tilde{\otimes}X_n\tilde{\otimes}Y;\alpha')$ es Asplund y que el espacio $\mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y')$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

En la segunda sección, damos aplicaciones de los resultados obtenidos en la primera sección para los ideales de operadores multilineales extendibles $\mathcal{E}$ y Pietsch (y Grothendieck) integrales $\mathcal{PI}$ ($\mathcal{GI}$). Respecto al ideal de operadores multilineales extendibles, probamos que si $X_1,\dots,X_n$ son espacios Asplund e Y' no contiene una copia de c_0, entonces $\mathcal{E}^{min}(X_1,\dots,X_n;Y')$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{E}(X_1,\dots,X_n;Y')$. Es más, obtenemos que si $X_1',\dots,X_n'$ e Y' tienen base de Schauder, entonces los monomios con el square ordering forman una base de Schauder de $\mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y')$. Con hipótesis adicionales, deducimos resultados similares en el caso en que el espacio de llegada no sea necesariamente un espacio dual. Por último, probamos que el espacio $\mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y')$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým si y solo si $X_1, \ldots, X_n$ e Y son espacios Asplund.

Un resultado clásico demostrado por Alencar [Ale85a] establece que el espacio de operadores multilineales Pietsch integrales coincide isométricamente, sobre espacios Asplund, con su núcleo minimal (es decir, con el espacio de operadores multilineales nucleares). Nosotros obtenemos este resultado como consecuencia del teorema principal de este capítulo. Es decir, damos una prueba independiente de este hecho sin usar la maquinaria de la teoría de medidas vectoriales como hizo Alencar si no que usando técnicas sobre productos tensoriales y el hecho de que el ideal $P\mathcal{I}$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým vectorial. Encontramos también resultados de coincidencia para el ideal de operadores multilineales Grothendieck-integrales.

Para finalizar, en la tercera sección, poveemos las definiciones necesarias y propiedades básicas sobre ideales de polinomios homogéneos, definimos los ideales de polinomios homogéneos extendibles $\mathcal{P}_e$ y el ideal de polinomios homogéneos Pietsch-integrales $\mathcal{P}_{P\mathcal{I}}$. Así demostramos los resultados de coincidencia análogos en el contexto de ideales de polinomios homogéneos.

Apéndice A

El apéndice contiene definiciones generales y propiedades sobre espacios de Banach y operadores lineales absolutamente sumantes que aparecen en resultados que comentamos a lo largo de la tesis. Damos definiciones y algunas propiedades sobre espacios de Banach como la de tipo y cotipo, las propiedades de extensión y de aproximación, la propiedad de Radon-Nikodým y la propiedad Asplund. También exponemos definiciones y propiedades sobre bases en espacios de Banach. Presentamos los conceptos de bases equivalentes, incondicionales, achicantes y acotadamente completas, y mostramos las relaciones entre dichos conceptos y el principio de selección de Bessaga-Pełczyński. Por último, definimos y damos los resultados más importantes sobre los operadores lineales absolutamente sumantes como el Teorema de inclusión, el Teorema de composición y los teoremas de dominación y de factorización de Pietsch.

Los resultados presentados en el Capítulo 2 y en el Capítulo 4 forman parte de los artículos [CDSV14] y [GV15] de reciente publicación.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo (junto con el Apéndice) contiene todo el material previo necesario para una lectura de la tesis. Daremos las nociones básicas sobre ideales de operadores multilineales y de productos tensoriales. Daremos también las notaciones que usaremos y mostraremos la dualidad entre ideales de operadores multilineales y productos —y normas— tensoriales. También daremos las nociones básicas sobre espacios de sucesiones.

Notaciones

A lo largo de esta tesis X, Y y Z serán espacios de Banach sobre el cuerpo de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, X' el espacio dual de X y $J_X : X \to X''$ la inclusión canónica de X en su bidual. Llamaremos B_X a la bola unitaria cerrada y $FIN(X)$ a la clase de subespacios de dimensión finita de X.

Notaremos $\mathcal{L}(X;Y)$ al espacio de los operadores lineales continuos de X en Y provistos de la norma supremo y usaremos las letras A, B para sus elementos. Diremos que un operador lineal suryectivo $A : X \to Y$ es una *metric surjection* si vale que $\|A(x)\|_Y = \text{ínf}\,\{\|\tilde{x}\|_X : A(\tilde{x}) = A(x)\}$ para todo $x \in X$ y que un operador lineal $I : X \to Y$ es una *isometría* si $\|Ix\|_Y = \|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Los símbolos $\overset{1}{\twoheadrightarrow}$ y $\overset{1}{\hookrightarrow}$ indicarán una metric surjection o una isometría respectivamente. Escribiremos $X \overset{1}{=} Y$ en el caso que X e Y sean isométricamente isomorfos (i.e. existe una isometría suryectiva $I : X \to Y$). Por último, utilizaremos la notación $X \hookrightarrow Y$ si la inclusión de X en Y es continua y $X \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} Y$ si la inclusión de X en Y es de norma 1 pero podría no ser una isometría.

1.1. Ideales de Operadores Multilineales

Sean $X_1, \dots, X_n$ e Y espacios de Banach. La expresión $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$ notará al espacio de operadores n-lineales continuos de $X_1 \times \cdots \times X_n$ en Y, que resulta un espacio de Banach con la norma supremo

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X_1,\dots,X_n;Y)} := \sup_{x_i \in B_{X_i}} \|T(x_1, \dots, x_n)\|_Y.$$

En el caso $Y = \mathbb{K}$, notaremos $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n)$ a $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; \mathbb{K})$ (y llamaremos formas multilineales a sus elementos). En el caso $X_1 = \cdots = X_n = X$, indicaremos $\mathcal{L}(^n X; Y)$ en vez de $\mathcal{L}(X, \dots, X; Y)$. Usaremos las letras R, S, T para nombrar a los operadores multilineales.

El ejemplo más simple de operador multilineal está dado por

$$T = x'_1(\cdot) \cdots x'_n(\cdot) \cdot y,$$

donde $x'_i \in X'_i$ $(1 \leq i \leq n)$ e $y \in Y$. Llamaremos *operador multilineal de tipo finito* a los operadores multilineales que se escriben como sumas finitas de dichos operadores, es decir, T es de tipo finito si

$$T = \sum_{k=1}^{m} x'_{1,k}(\cdot) \cdots x'_{n,k}(\cdot) \cdot y_k.$$

Notaremos $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_n; Y)$ al espacio de operadores n-lineales de tipo finito de $X_1 \times \cdots \times X_n$ en Y. Observemos que $\mathcal{L}_f$ es un subespacio de $\mathcal{L}$ pero no es cerrado (por lo que no resulta un espacio de Banach). Si consideramos la clausura de $\mathcal{L}_f(X_1, \dots, X_n; Y)$ (con la norma supremo), obtenemos $\mathcal{L}_{app}(X_1, \dots, X_n; Y)$ que es espacio de los *operadores n-lineales aproximables* de $X_1, \dots, X_n$ en Y.

Para la teoría de operadores multilineales (y polinomios) en espacios de Banach, nos referimos a los libros de Dineen [Din99] y Mujica [Muj86]

El concepto de ideales de operadores multilineales aparece por primera vez en [Pie84], donde Pietsch traslada lo estudiado para ideales de operadores lineales al contexto multilineal.

Un *ideal normado (resp. de Banach) de operadores n-lineales continuos* es un par $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ que satisface las siguientes propiedades:

(i) $\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n; Y) := \mathfrak{A} \cap \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$ para todo $X_1, \dots, X_n, Y$ y $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}}$ es una norma que hace del par $\big(\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n; Y), \|\cdot\|_{\mathfrak{A}}\big)$ un espacio normado (resp. de Banach).

(ii) Si $B_j \in \mathcal{L}(X_j; Z_j)$ para $1 \leq j \leq n$, $T \in \mathfrak{A}(Z_1, \dots, Z_n; U)$ y $A \in \mathcal{L}(U; Y)$ entonces $A \circ T \circ (B_1, \dots, B_n) \in \mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n; Y)$ y

$$\|A \circ T \circ (B_1, \dots, B_n)\|_{\mathfrak{A}} \leq \|A\| \cdot \|T\|_{\mathfrak{A}} \cdot \|B_1\| \cdots \|B_n\|.$$

(iii) Dados $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, la aplicación $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mapsto \lambda_1 \cdots \lambda_n$ pertenece a $\mathfrak{A}(^n\mathbb{K}; \mathbb{K})$ y tiene norma 1.

Observemos que en el caso que $Y = \mathbb{K}$ obtenemos ideales de formas multilineales y si $n = 1$ obtenemos ideales de operadores lineales.

Notemos que $\mathcal{L}$ es trivialmente un ideal (de Banach) de operadores multilineales y que $\mathcal{L}_f$ y $\mathcal{L}_{app}$ también resultan ideales de operadores multilineales con la diferencia que $\mathcal{L}_{app}$ es un espacio de Banach y $\mathcal{L}_f$ no lo es.

Otro ejemplo de ideal provisto de la norma usual es el ideal de los *operadores multilineales débilmente secuencialmente continuos* que lo notamos $\mathcal{L}_{wsc}$. Recordemos que $T \in \mathcal{L}_{wsc}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ si para toda sucesión débilmente convergente $x_{k,j} \overset{w}{\longrightarrow} x_k$ en X_k $(1 \leq k \leq n)$, se verifica que $T(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j}) \to T(x_1, \ldots, x_n)$ en Y.

Es importante remarcar que para definir un ideal de operadores multilineales es de relevancia tanto dar la forma de sus elementos como definir la norma que se va a utilizar. A continuación veremos otros ejemplos de ideales donde la norma definida no es la del supremo, sino una norma particular para que, en cada caso, el espacio definido resulte un espacio de Banach con dicha norma.

- Operadores multilineales Nucleares.

  Un operador multilineal $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ se dice *nuclear* si puede escribirse como

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x'_{1,k}(x_1) \cdots x'_{n,k}(x_n) \cdot y_k, \tag{1.1}$$

  donde $x'_{i,k} \in X'_i$ e $y_k \in Y$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq i \leq n$ y satisfacen que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|x'_{1,k}\| \cdots \|x'_{n,k}\| \cdot \|y_k\| < \infty.$$

  El espacio de operadores n-lineales nucleares lo notamos $\mathcal{N}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ y resulta un ideal de operadores multilineales de Banach si consideramos la norma

$$\|T\|_{\mathcal{N}(X_1,\ldots,X_n;Y)} := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \|x'_{1,k}\| \cdots \|x'_{n,k}\| \cdot \|y_k\| \right\},$$

  donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones nucleares de T como en (1.1).

- Operadores multilineales Integrales.

  En este caso definiremos dos tipos de operadores integrales. Decimos que un operador multilineal $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ es *Pietsch integral (resp. Grothendieck integral)* si existe una medida regular boreliana μ de variación acotada en $(B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}; w^*)$ con valores en Y (resp. en Y'') tal que T admite una representación integral de la forma

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \int_{B_{X'_1} \times \cdots \times B_{X'_n}} x'_1(x_1) \cdots x'_n(x_n)\ d\mu(x'_1, \ldots, x'_n) \tag{1.2}$$

para todo $x_k \in X_k$.

Los espacios de operadores n-lineales Pietsch integrales y Grothendieck integrales los notamos $P\mathcal{I}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ y $G\mathcal{I}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ respectivamente y resultan ideales de operadores multilineales de Banach si consideramos la norma integral de T como el ínfimo de las variaciones de μ, tomado sobre todas las medidas μ donde T puede escribirse como en (1.2) y la notamos con $\|T\|_{P\mathcal{I}(X_1,\ldots,X_n)}$ (resp. $\|T\|_{G\mathcal{I}(X_1,\ldots,X_n)}$).

- Operadores multilineales Extendibles

  Un operador multilineal $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ se dice *extendible* si para todo superespacio $Z_i \supseteq X_i$ $(1 \leq i \leq n)$, existe una extensión $\tilde{T} \in \mathcal{L}(Z_1, \ldots, Z_n; Y)$ de T. Notamos con $\mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ al espacio de operadores n-lineales y resulta un ideal de operadores multilineales de Banach con la norma dada por en ínfimo de las constantes $C > 0$ tales que para todo $Z_i \supseteq X_i$ existe una extensión $\tilde{T} \in \mathcal{L}(Z_1, \ldots, Z_n; Y)$ con $\|\tilde{T}\| \leq C$ y la notamos $\|T\|_{\mathcal{E}(X_1,\ldots,X_n;Y)}$.

  La definición de este ideal de operadores multilineales fue introducida por P. Kirwan y R. Ryan [KR98] en el contexto de ideales de polinomios homogéneos.

En el contexto de operadores lineales, una clase sumamente importante es la de los operadores absolutamente p-sumantes (ver definición y resultados en Apéndice A.2). Aparecieron por primera vez a fines de la década del 60 en dos trabajos fundamentales [Pie67, LP68]. En este último, surge esta clase de operadores al reinterpretar el famoso *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* de Grothendieck [Gro53]. En el libro de Diestel, Jarchow y Tonge [DJT95] se resumen muchos de los resultados obtenidos hasta ese momento sobre los operadores absolutamente sumantes y se muestra que hay cuatro resultados fundamentales en la teoría de los operadores lineales absolutamente p-sumantes que son: El Teorema de inclusión, el Teorema de composición y los teoremas de Factorización y de Dominación de Pietsch. A partir de estas propiedades surgen en el contexto multilineal muchas extensiones posibles para los operadores absolutamente p-sumantes donde se intenta que se siga verificando alguna de las propiedades fundamentales —por ejemplo los operadores multilineales dominados fueron definidos para que cumplan el teorema de dominación— (ver [CP07, PG05]). A continuación veremos algunos ejemplos de dichas extensiones, para ello, necesitamos definir la norma fuerte y la norma débil para sucesiones en espacios de Banach.

Sea X un espacio de Banach, una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se dice *fuertemente p-sumable* si $(\|x_k\|_X)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p$. Llamamos $\ell_p(X)$ al espacio de sucesiones en X que son fuertemente p-sumables que resulta un espacio de Banach con la norma

$$\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{\ell_p(X)} = \|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \|x_k\|_X^p \right)^{1/p}.$$

Una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se dice *débilmente p-sumable* si $(x'(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ para todo $x' \in X'$. Llamamos $\ell_p^w(X)$ al espacio de sucesiones en X que son débilmente p-sumables que resulta un espacio de Banach con la norma

$$w_p\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) := \sup_{x'\in B_{X'}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x'(x_k)|^p\right)^{1/p}.$$

- Operadores multilineales absolutamente sumantes

  Sean $0 < q, p_1, \dots, p_n < \infty$ tales que $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_n}$, decimos que un operador multilineal $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$ es *absolutamente $(q; p_1, \dots, p_n)$-sumante* si existe una constante $C > 0$ tal que para todas las sucesiones finitas $x_1 = (x_{1,i})_{i=1}^m \subseteq X_1, \dots, x_n = (x_{n,i})_{i=1}^m \subseteq X_n$ vale que

  $$\left(\sum_{i=1}^m \|T(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})\|_Y^q\right)^{1/q} \leq C \cdot w_{p_1}(x_1) \cdots w_{p_n}(x_n). \tag{1.3}$$

  Notamos $\Pi_{(q;p_1,\dots,p_n)}(X_1, \dots, X_n; Y)$ al espacio de operadores n-lineales $(q; p_1, \dots, p_n)$-sumantes que resulta un ideal de operadores multilineales de Banach con la norma dada por

  $$\pi_{(q;p_1,\dots,p_n)}(T) := \text{ínf}\big\{C > 0 \ : \ T \text{ verifica } (1.3)\big\}.$$

  Es decir que $T \in \Pi_{(q;p_1,\dots,p_n)}(X_1, \dots, X_n; Y)$ si y solo si el operador n-lineal inducido $\hat{T} : \ell_{p_1}^w(X_1) \times \cdots \times \ell_{p_n}^w(X_n) \to \ell_q(Y)$ dado por $\hat{T}(x_1, \dots, x_n) = \big(T(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})\big)_{i=1}^m$ resulta continuo. En tal caso, vale que $\|\hat{T} : \ell_{p_1}^w(X_1) \times \cdots \times \ell_{p_n}^w(X_n) \to \ell_q(Y)\| = \pi_{(q;p_1,\dots,p_n)}(T)$.

  Si $p_1 = \cdots = p_n = p$ (y entonces $p \leq nq$), decimos que $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$ es *absolutamente $(q; p)$-sumante* y lo notamos con $\big(\Pi_{(q,p)}; \pi_{(q,p)}\big)$.

- Operadores multilineales (q, p)-dominados

  Decimos que un operador n-lineal $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$ es *(q, p)-dominado*, con $p \leq q$, si es absolutamente $(\frac{q}{n}; p, \dots, p)$-sumante. Es decir, si existe $C > 0$ tal que para todas las sucesiones finitas $x_1 = (x_{1,i})_{i=1}^m \subseteq X_1, \dots, x_n = (x_{n,i})_{i=1}^m \subseteq X_n$ vale que

  $$\left(\sum_{i=1}^m \|T(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})\|_Y^{q/n}\right)^{n/q} \leq C \cdot w_p(x_1) \cdots w_p(x_n). \tag{1.4}$$

  Se denota $\mathcal{D}_{(q,p)}(X_1, \dots, X_n; Y)$ al espacio de operadores n-lineales (q, p)-dominados que resulta un ideal de operadores multilineales de Banach con la norma dada por

  $$D_{(q,p)}(T) = \text{ínf}\big\{C > 0 \ : \ T \text{ verifica } (1.4)\big\}.$$

  En el caso que $p = q = r$, decimos que T es r-dominado lo notamos $\big(\mathcal{D}_r, D_r\big)$.

- Operadores multilineales Multiple r-sumantes

  Decimos que un operador n-lineal $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ es *múltiple r-sumante* si existe $C > 0$ tal que para toda elección de sucesiones finitas $x_1 = (x_{1,i_1})_{i_1=1}^{m_1} \subseteq X_1, \ldots, x_n = (x_{n,i_n})_{i_n=1}^{m_n} \subseteq X_n$ vale que

$$\left(\sum_{1_1,\ldots,i_n=1}^{m_1,\ldots,m_n} \|T(x_{1,i_1}, \ldots, x_{n,i_n})\|_Y^r \right)^{1/r} \leq C \cdot w_r(x_1) \cdots w_r(x_n). \tag{1.5}$$

  Se denota $\mathcal{M}_r(X_1, \ldots, X_n; Y)$ al espacio de operadores n-lineales múltiple r-sumantes que resulta un ideal de operadores multilineales de Banach con la norma dada por

$$M_r(T) := \text{ínf} \big\{ C > 0 \ : \ T \ \text{ verifica } (1.5) \big\}.$$

  La definición de este ideal de operadores multilineales fue introducida independientemente por M. Matos [Mat03] y por F. Bombal, D. Pérez-García y I. Villanueva [BPGV04].

- Operadores multilineales fuertemente (q,p)-sumantes

  Decimos que un operador n-lineal $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ es *fuertemente (q,p)-sumante*, con $p \leq q$, si existe $C > 0$ tal que para todas las sucesiones finitas $x_1 = (x_{1,i})_{i=1}^m \subseteq X_1, \ldots$, $x_n = (x_{n,i})_{i=1}^m \subseteq X_n$ vale que

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|T(x_{1,i}, \ldots, x_{n,i})\|_Y^q \right)^{1/q} \leq C \cdot \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n)}} \left(\sum_{i=1}^{m} |\phi(x_{1,i}, \ldots, x_{n,i})|^p \right)^{1/p}. \tag{1.6}$$

  Se denota $\mathcal{S}_{(q,p)}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ al espacio de operadores n-lineales fuertemente (q,p)-sumantes que resulta un ideal de operadores multilineales de Banach con la norma dada por

$$S_{(q,p)}(T) := \text{ínf} \big\{ C > 0 \ : \ T \text{ verifica } (1.6) \big\}.$$

  Si $p = q$, decimos que T es fuertemente p-sumante y lo notamos con $\big(\mathcal{S}_p, S_p\big)$.

  La definición de este ideal de operadores multilineales fue introducida por V. Dimant [Dim03].

1.1.1. Núcleo minimal

El *núcleo minimal* de un ideal de operadores n-lineales $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ es el ideal de composición

$$\mathfrak{A}^{min} := \overline{\mathfrak{F}} \circ \mathfrak{A} \circ (\overline{\mathfrak{F}}, \ldots, \overline{\mathfrak{F}})$$

donde $\overline{\mathfrak{F}}$ representa el ideal de operadores lineales aproximables, es decir, un operador n-lineal T pertenece a $\mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ si admite una factorización de la forma

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "{(B_1,\ldots,B_n)}"'] & Y \\ Z_1 \times \cdots \times Z_n \arrow[r, "S"] & U \arrow[u, "A"'] \end{tikzcd} , \tag{1.7}$$

donde los espacios $Z_1, \ldots, Z_n, U$ son espacios de Banach, los operadores lineales $A, B_1, \ldots, B_n$ son aproximables y el operador multilineal $S \in \mathfrak{A}(Z_1, \ldots, Z_n; U)$. La norma minimal de T viene dada por

$$\|T\|_{\mathfrak{A}^{min}} := \text{ínf}\left\{\|A\|_{\overline{\mathfrak{F}}} \cdot \|S\|_{\mathfrak{A}} \cdot \|B_1\|_{\overline{\mathfrak{F}}} \cdots \|B_n\|_{\overline{\mathfrak{F}}}\right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las factorizaciones como en (1.7).

Se tienen las siguientes propiedades, que pueden encontrarse en [Flo01]

1. $\mathfrak{A}^{min} \subseteq \mathfrak{A}$ con $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}} \leq \|\cdot\|_{\mathfrak{A}^{min}}$.
2. $(\mathfrak{A}^{min})^{min} \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}$.
3. $\mathfrak{A}^{min}$ es el ideal de operadores n-lineales más chico que satisface
   $\mathfrak{A}^{min}(M_1, \ldots, M_n; N) \overset{1}{=} \mathfrak{A}(M_1, \ldots, M_n; N)$ para todo $M_1, \ldots M_n, N \in FIN$.
4. Si $X_1', \ldots, X_n'$ e Y tienen propiedad de aproximación métrica (ver definición en Apéndice A.1), entonces se tiene que $\mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.
   Además $\mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \overline{\mathcal{L}_f(X_1, \ldots, X_n; Y)}^{\|\cdot\|_{\mathfrak{A}}}$.

Decimos que $\mathfrak{A}$ es *minimal* si $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}}) \overset{1}{=} (\mathfrak{A}^{min}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}^{min}})$.
Por ejemplo, los ideales de operadores multilineales aproximables y nucleares son minimales. Es más, se tiene que $(\mathcal{GI})^{min} = (\mathcal{PI})^{min} = \mathcal{N}$ y $(\mathcal{L})^{min} = \mathcal{L}_{app}$
(ver [Mur10] para la versión polinomial de estas igualdades).

1.1.2. Cápsula maximal

Sea $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ un ideal de operadores n-lineales, para cada $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ se define la norma

$$\|T\|_{\mathfrak{A}^{\text{máx}}} := \sup\left\{\|Q_L^Y \circ T \circ (I_{M_1}^{X_1}, \ldots, I_{M_n}^{X_n})\|_{\mathfrak{A}} : M_i \in FIN(X_i), L \in COFIN(Y)\right\},$$

donde $I_M^X : M \to X$ es la inclusión de M en X, $Q_L^Y : Y \to L$ es la proyección de Y sobre L y $COFIN(X)$ representa la clase de subespacios cerrados de codimensión finita de X. A partir de dicha definición, se define la *cápsula maximal* del ideal $\mathfrak{A}$ como

$$\mathfrak{A}^{\text{máx}}(X_1, \ldots, X_n; Y) := \left\{T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y) : \|T\|_{\mathfrak{A}^{\text{máx}}} < \infty\right\}.$$

Se dice que $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ es *maximal* si $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}}) \overset{1}{=} (\mathfrak{A}^{\text{máx}}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}^{\text{máx}}})$.

Los ideales maximales satisfacen las siguientes propiedades que se pueden encontrar en [Flo01].

1. $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^{max}$ con $\|\cdot\|_{\mathfrak{A}^{max}} \leq \|\cdot\|_{\mathfrak{A}}$.

2. $(\mathfrak{A}^{max})^{max} \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{max}$.

3. $\mathfrak{A}^{max}$ es el ideal de operadores n-lineales más grande que satisface

   $\mathfrak{A}^{max}(M_1, \ldots, M_n; N) \overset{1}{=} \mathfrak{A}(M_1, \ldots, M_n; N)$ para todo $M_1, \ldots M_n, N \in FIN$.

4. Si $\mathcal{A}_1, \ldots \mathcal{A}_n, \mathcal{B}$ son ideales de operadores maximales y $\mathfrak{A}$ es maximal, entonces $\mathcal{B} \circ \mathfrak{A} \circ (\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$ es maximal.

5. $(\mathfrak{A}^{max})^{min} \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}$ y $(\mathfrak{A}^{min})^{max} \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{max}$.

Por ejemplo, $\mathcal{L}$, $G\mathcal{I}$, $\mathcal{D}_r$, $\mathcal{I}_r$ son maximales y se tienen las siguientes relaciones $(\mathcal{N})^{max} = G\mathcal{I}$ y $(\mathcal{L}_{app})^{max} = \mathcal{L}$.

Para ver que $\mathcal{D}_r$ e $\mathcal{I}_r$ son maximales es necesario usar el Teorema de representación para ideales maximales que veremos más adelante (ver Teorema 1.2.3).

1.2. Productos y normas tensoriales

Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios de Banach, notamos con $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n = \otimes_{i=1}^n X_i$ su producto tensorial y con $\sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot x_{1,j} \otimes \cdots \otimes x_{n,j}$ a sus elementos. Observemos que cuando el cuerpo en el que estamos trabajando es el de los números complejos, los escalares no son necesarios en la expresión anterior. Por simplicidad, usaremos la notación compleja aunque los resultados valen también para el caso real.

El producto tensorial $\otimes_{i=1}^n X_i$ identifica operadores n-lineales de $X_1 \times \cdots \times X_n$ en Y con operadores lineales de $\otimes_{i=1}^n X_i$ en Y

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y) = \mathcal{L}(\otimes_{i=1}^n X_i; Y), \; T \rightsquigarrow T_L,$$

donde $T_L(\sum_{j=1}^m x_{1,j} \otimes \cdots \otimes x_{n,j}) = \sum_{j=1}^m T(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})$.

Por otro lado, hay una identificación canónica entre el espacio $\mathcal{L}_f(X_1, \ldots, X_n; Y)$ y el producto tensorial $\otimes_{i=1}^n X_i' \otimes Y$. En efecto, dado un operador de tipo finito $T = \sum_{j=1}^m x_{1,j}'(\cdot) \cdots x_{n,j}'(\cdot) \cdot y_j \in \mathcal{L}_f(X_1, \ldots, X_n; Y)$ decimos que el tensor $z := \sum_{k=1}^m x_{1,j}' \otimes \cdots \otimes x_{n,j}' \otimes y_j$ representa a T. Análogamente, dado $z = \sum_{j=1}^m x_{1,j}' \otimes \cdots \otimes x_{n,j}' \otimes y_j \in \otimes_{i=1}^n X_i' \otimes Y$, siempre representa a un operador n-lineal de tipo finito (por ejemplo representa a $T = \sum_{j=1}^m x_{1,j}'(\cdot) \cdots x_{n,j}'(\cdot) \cdot y_j$).

Dados operadores lineales $A_i \in \mathcal{L}(X_i; Y_i)$ con $1 \leq i \leq n$, podemos considerar el operador lineal $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) : \otimes_{i=1}^n X_i \to \otimes_{i=1}^n Y_i$ definido en los tensores elementales como $(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = A_1(x_1) \otimes \cdots \otimes A_n(x_n)$ y luego extendido por linealidad a todo $\otimes_{i=1}^n X_i$.

No hay una referencia general para normas tensoriales de orden n sobre productos tensoriales de espacios de Banach, aunque podemos encontrar la definición y algunas propiedades en [FH02]. Toda la teoría que usaremos para normas tensoriales se obtienen como generalizaciones naturales de las normas tensoriales de formas bilineales, hacemos referencia a [DF93] para dicha teoría.

La teoría de ideales de operadores lineales está estrechamente relacionada con la teoría de productos tensoriales de espacios de Banach. Esta relación comenzó con el trabajo de A. Grothendieck (ver [Gro55]), quien definió las normas proyectiva e inyectiva en el producto tensorial entre dos espacios de Banach X e Y.

La norma proyectiva de orden 2 está dada por

$$\pi_2(z; X \otimes Y) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m} \|x_j\| \cdot \|y_j\| : z = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j \right\}.$$

Y la norma inyectiva de orden 2 está dada por

$$\varepsilon_2(z; X \otimes Y) := \sup_{x' \in B_{X'}, y' \in B_{Y'}} \left\{ \left| \sum_{j=1}^{m} x'(x_j) \cdot y'(y_j) \right| : z = \sum_{j=1}^{m} x_j \otimes y_j \right\}.$$

En general los espacios $(X \otimes_{\pi_2} Y)$ y $(X \otimes_{\varepsilon_2} Y)$ no son completos por lo que notamos con $\big(X \widetilde{\otimes}_{\pi_2} Y\big)$ y con $\big(X \widetilde{\otimes}_{\varepsilon_2} Y\big)$ a sus completaciones respectivamente.

Grothendieck probó el siguiente teorema que relaciona el producto tensorial de espacios de Banach con espacios de operadores lineales en X.

Teorema 1.2.1. *Sean X e Y espacios de Banach. Entonces*

$$\big(X \widetilde{\otimes}_{\pi_2} Y\big)' \overset{1}{=} \mathcal{L}(X; Y') \qquad y \qquad \big(X \widetilde{\otimes}_{\varepsilon_2} Y\big)' \overset{1}{=} \mathcal{L}_{\mathcal{GI}}(X; Y'),$$

donde $\mathcal{L}_{\mathcal{GI}}$ denota los operadores lineales Grothendieck integrales.

Estas definiciones se generalizan de manera natural al contexto multilineal, la *norma proyectiva* π (de orden n) se define como

$$\pi(z) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m} \|x_{1,j}\| \cdots \|x_{n,j}\| \right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas la representaciones de z de la forma $\sum_{j=1}^{m} x_{1,j} \otimes \cdots \otimes x_{n,j}$. Notamos con $\big(\otimes_{i=1}^{n} X_i; \pi\big)$ al producto tensorial provisto de la norma proyectiva. La norma tensorial π está unívocamente determinada por la siguiente propiedad

$$\begin{array}{ccc} \big(\otimes_{i=1}^{n} X_i; \pi\big)' & \overset{1}{=} & \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n) \\ T_L & \leftrightsquigarrow & T \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
X_1 \times \cdots \times X_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\otimes"'] & \mathbb{K} \\
\left(\otimes_{i=1}^n X_i; \pi \right) \arrow[ur, "T_L"] &
\end{tikzcd}$$

La *norma inyectiva* ε se define como

$$\varepsilon(z) := \sup_{x'_i \in B_{X'_i}} \left| \sum_{j=1}^{m} x'_1(x_{1,j}) \cdots x'_n(x_{n,j}) \right|,$$

donde $\sum_{j=1}^m x_{1,j} \otimes \cdots \otimes x_{n,j}$ es cualquier representación fija de z. Notamos con $\left(\otimes_{i=1}^n X_i; \varepsilon \right)$ al producto tensorial con la norma ε y satisface, por definición,

$$\left(\otimes_{i=1}^n X_i; \varepsilon \right) \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(X'_1, \ldots, X'_n).$$

Es decir,

$$\left(\otimes_{i=1}^n X_i; \varepsilon \right) \overset{1}{\hookrightarrow} \left(\otimes_{i=1}^n X'_i; \pi \right)',$$

esto muestra que ε es de alguna forma dual a π.
Al igual que para productos tensoriales de orden 2, notamos con $\left(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i; \pi\right)$ y con $\left(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i; \varepsilon\right)$ a las completaciones de $(\otimes_{i=1}^n X_i; \pi)$ y de $(\otimes_{i=1}^n X_i; \varepsilon)$ respectivamente.

El siguiente resultado relaciona normas tensoriales (de orden n) con ideales de operadores multilineales.

Teorema 1.2.2. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ e Y espacios de Banach. Entonces*

1. $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathcal{L}\left((\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i; \pi); Y\right)$. *En particular, para formas multilineales vale que* $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n) \overset{1}{=} \left(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i; \pi\right)'$.

2. $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} \left((\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i; \pi) \otimes_{\pi_2} Y\right)' \overset{1}{=} \left(\otimes_{i=1}^n X_i \otimes Y; \pi\right)'$.

3. $\mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathcal{L}_{\mathcal{PI}}\left((\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i; \varepsilon); Y\right)$. *Lo mismo sucede para el ideal de operadores Grothendiek integrales. En particular, aplicando el Teorema 1.2.1, se tiene que*

$$\mathcal{GI}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} \mathcal{L}_{\mathcal{GI}}\left((\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i; \varepsilon); Y'\right) \overset{1}{=} \left((\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i; \varepsilon)\widetilde{\otimes}_{\varepsilon_2} Y\right)' \overset{1}{=} \left(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i \widetilde{\otimes} Y; \varepsilon\right)'.$$

Se dice que α es una *norma tensorial de orden* n si α asigna a cada n-upla de espacios normados $(X_1, \ldots, X_n)$ una norma $\alpha\left(\,\cdot\,; \otimes_{i=1}^n X_i\right)$ en el producto tensorial $\otimes_{i=1}^n X_i$, que satisface

1. $\varepsilon \le \alpha \le \pi$ en $\otimes_{i=1}^n X_i$. (*norma razonable*).

2. $\|A_1 \otimes \cdots \otimes A_n : (\otimes_{i=1}^n X_i; \alpha) \to (\otimes_{i=1}^n Y_i; \alpha)\| \leq \|A_1\| \cdots \|A_n\|$ para todo $A_i \in \mathcal{L}(X_i, Y_i)$ (*metric mapping property*).

Notamos con $(\otimes_{i=1}^n X_i; \alpha)$ al producto tensorial $\otimes_{i=1}^n X_i$ provisto de la norma $\alpha(\,\cdot\,; \otimes_{i=1}^n X_i)$ que no siempre resulta completo y escribimos $(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i; \alpha)$ a su completación.

Una norma tensorial α de orden n es *finitamente generada* si para toda n-upla de espacios normados $(X_1, \ldots, X_n)$ y para $z \in \otimes_{i=1}^n X_i$ se tiene que

$$\alpha(z; \otimes_{i=1}^n X_i) = \operatorname{ínf} \big\{ \alpha(z; \otimes_{i=1}^n M_i) : M_i \in FIN(X_i),\ z \in M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \big\}.$$

Por ejemplo, π y ε son normas tensoriales finitamente generadas.

Si α es una norma tensorial de orden n, se define α' la *norma dual* de α. Primero se la define en FIN como la norma correspondiente al dual del producto tensorial con la norma α. Es decir, por la relación

$$(\otimes_{i=1}^n M_i; \alpha') :\overset{1}{=} (\otimes_{i=1}^n M_i'; \alpha)'$$

y se extiende su definición a $NORM$ (la clase de espacios normados) de la siguiente manera

$$\alpha'(z; \otimes_{i=1}^n X_i) := \operatorname{ínf} \big\{ \alpha'(z; \otimes_{i=1}^n M_i) : z \in M_1 \otimes \cdots \otimes M_n \big\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los subespacios de dimensión finita $M_i \in FIN(X_i)$ tales que z pertenece a su producto tensorial (ver [DF93, Section 15]). Por definición, α' siempre es finitamente generada y si α es finitamente generada entonces vale que $\alpha'' = \alpha$. Por ejemplo, es sabido que $\pi' = \varepsilon$ y $\varepsilon' = \pi$.

Dado $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ un ideal de operadores n-lineales, se define la *norma tensorial asociada* a $\mathfrak{A}$, como la única norma tensorial α finitamente generada de orden $n+1$ que satisface

$$\mathfrak{A}(M_1, \ldots, M_n; N) \overset{1}{=} (M_1' \otimes \cdots \otimes M_n' \otimes N; \alpha),$$

para todo $M_i \in FIN(X_i)$ y todo $N \in FIN(Y)$, en este caso escribimos $\mathfrak{A} \sim \alpha$.
Es decir, dado $z \in \otimes_{i=1}^n M_i' \otimes N$, tiene una escritura de la forma $z = \sum_{j=1}^m x_{1,j}' \otimes \cdots \otimes x_{n,j}' \otimes y_j$, consideramos $T_z \in \mathcal{L}(M_1, \ldots, M_n; N)$ el operador n-lineal asociado a z dado por

$$T_z(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^m x_{1,j}'(x_1) \cdots x_{n,j}'(x_n) \cdot y_j.$$

La norma tensorial satisface $\alpha(z) = \alpha(z; \otimes_{i=1}^n M_i' \otimes N) = \|T_z\|_{\mathfrak{A}(M_1, \ldots, M_n; N)}$.
Para $z \in \otimes_{i=1}^n X_i' \otimes Y$, definimos

$$\alpha(z; \otimes_{i=1}^n X_i' \otimes Y) = \operatorname{ínf}\{\alpha(z; \otimes_{i=1}^n M_i' \otimes N) \ : \ z \in \otimes_{i=1}^n M_i' \otimes N\},$$

donde $M_i \in FIN(X_i)$ y $N \in FIN(Y)$.

Por ejemplo, $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}_{app}$ están asociados a la norma ε y $\mathcal{PI}$, $\mathcal{GI}$, $\mathcal{N}$ están asociados a la norma π. Notemos también que si $\mathfrak{A}$ está asociado a una norma tensorial finitamente generada, entonces $\mathfrak{A}^{min}$ y $\mathfrak{A}^{max}$ están asociados a la misma norma tensorial ya que coinciden en espacios de dimensión finita.

Cada $z \in (\otimes_{i=1}^n X_i \otimes Y; \alpha)'$ se identifica con un operador multilineal continuo de $X_1 \times \cdots \times X_n$ en Y'. Luego, diferentes normas tensoriales producen diferentes ideales de operadores multilineales.

Hay una fuerte relación entre ideales maximales y su norma tensorial asociada como puede verse en el siguiente teorema de representación que se puede encontrar en [FH02].

Teorema 1.2.3. *Sea $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ un ideal de operadores n-lineales. Entonces son equivalentes:*

(1) $(\mathfrak{A}, \|\cdot\|_{\mathfrak{A}})$ *es maximal.*

(2) Existe β una norma tensorial finitamente generada de orden $n+1$ tal que

$$\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n; Y') \overset{1}{=} (X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y; \beta)',$$

$$\mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n; Y) \overset{1}{=} (X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y'; \beta)' \cap \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y).$$

En particular, si α es la norma tensorial asociada a $\mathfrak{A}$, tenemos que:

$$\mathfrak{A}^{max}(X_1, \dots, X_n; Y') \overset{1}{=} (X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y; \alpha')'.$$

Por otro lado, si $\mathfrak{A} \sim \alpha$, también existe una relación entre $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \otimes Y; \alpha)$ y $\mathfrak{A}^{min}(X_1, \dots, X_n; Y)$ dada en el siguiente teorema de representación que puede verse en [Flo01, Theorem 4.2]

Teorema 1.2.4. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales minimal asociado a la norma tensorial α, entonces hay una metric surjection natural:*

$$\big(\widetilde{\otimes}_{j=1}^n X_j' \widetilde{\otimes} Y; \alpha\big) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n; Y),$$

definida en $\otimes_{j=1}^n X_j' \otimes Y$ dada por

$$z = \sum_{j=1}^n x'_{1,j} \otimes \cdots \otimes x'_{n,j} \otimes y_j \mapsto \sum_{j=1}^n x'_{1,j}(\ \cdot\ ) \cdots x'_{n,j}(\ \cdot\ ) \cdot y_j.$$

En particular, para un ideal cualquiera $\mathfrak{A} \sim \alpha$ (no necesariamente minimal), se tiene que $\big(\widetilde{\otimes}_{j=1}^n X_j' \widetilde{\otimes} Y; \alpha\big) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{A}^{min}(X_1, \dots, X_n; Y)$. Observemos también que si $X_1', \dots, X_n', Y$ tienen la propiedad de aproximación acotada (ver definición en Apéndice A.1), entonces

$$\big(\widetilde{\otimes}_{j=1}^n X_j' \widetilde{\otimes} Y; \alpha\big) \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}(X_1, \dots, X_n; Y),$$

como puede verse en [Flo01].

Observación 1.2.5. En general, si $\mathfrak{A}$ es un ideal de operadores n-lineales asociado a la norma tensorial α, tenemos la siguiente inclusión de norma 1 dada por

$$\left(\widetilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j' \widetilde{\otimes} Y; \alpha\right) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y).$$

Si además $\mathfrak{A}$ es maximal y $X_1', \ldots, X_n', Y'$ tienen la propiedad de aproximación métrica, entonces

$$\left(\widetilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j' \widetilde{\otimes} Y'; \alpha\right) \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} \left(\otimes_{j=1}^{n} X_j \otimes Y; \alpha'\right)'.$$

Sea $\mathfrak{A} \sim \alpha$, se define el ideal adjunto de $\mathfrak{A}$ como:

$$\mathfrak{A}^*(X_1, \ldots, X_n; Y) := (\otimes_{i=1}^{n} X_i \otimes Y'; \alpha)' \cap \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y).$$

Luego, para $M_1, \ldots, M_n, N \in FIN$ se satisface que

$$\mathfrak{A}^*(M_1, \ldots, M_n; N) \overset{1}{=} (\otimes_{i=1}^{n} M_i \otimes N'; \alpha)' \overset{1}{=} (\otimes_{i=1}^{n} M_i' \otimes N; \alpha').$$

Es decir, $\mathfrak{A}^* \sim \alpha'$. De la definición se deduce que $\mathfrak{A}^*$ es siempre maximal aplicando el Teorema de representación para ideales maximales (Teorema 1.2.3), además $\mathfrak{A}^{**} \overset{1}{=} \mathfrak{A}$. Por ejemplo, $\mathcal{L}^* \overset{1}{=} \mathcal{GI}$ y $\mathcal{GI}^* \overset{1}{=} \mathcal{PI}^* \overset{1}{=} \mathcal{L}$.

Observación 1.2.6. Por último observemos que $\mathcal{N}$ es el ideal (de Banach) más chico y $\mathcal{L}$ es el más grande. Es decir, dado un ideal $\mathfrak{A}$ se tiene que si $T \in \mathcal{N}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, entonces $T \in \mathfrak{A}(X_1 \ldots, X_n; Y)$ y además $\|T\|_{\mathfrak{A}(X_1 \ldots, X_n; Y)} \leq \|T\|_{\mathcal{N}(X_1 \ldots, X_n; Y)}$. Y si $T \in \mathfrak{A}(X_1 \ldots, X_n; Y)$, entonces $T \in \mathcal{L}(X_1 \ldots, X_n; Y)$ y además $\|T\|_{\mathcal{L}(X_1 \ldots, X_n; Y)} \leq \|T\|_{\mathfrak{A}(X_1 \ldots, X_n; Y)}$.

1.3. Espacios de sucesiones.

Sea ω el conjunto de sucesiones de elementos en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un *espacio de sucesiones* es un subespacio de ω. Nosotros trabajaremos con una clase más restrictiva de espacios de sucesiones. Notaremos con e_k ($k \in \mathbb{N}$) al k-ésimo vector canónico y llamaremos $c_{00} := span\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$. Como primera medida, vamos a trabajar con subespacios de ω que contengan a c_{00}, es decir, subespacios que contengan a todos los vectores canónicos. Nos interesarán aquellos espacios de sucesiones que sean normados, más aún, los espacios de Banach. Veamos algunos ejemplos de espacios de Banach de sucesiones.

$$\ell_\infty = \left\{(x_k)_k : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\}, \quad con \quad \|(x_k)_k\|_{\ell_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

$$c_0 = \left\{(x_k)_k : \lim_{k \to \infty} |x_k| = 0\right\}, \quad con \quad \|(x_k)_k\|_{\ell_\infty} = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

$$\ell_p = \left\{(x_k)_k : \sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^p < \infty\right\}, \quad con \quad \|(x_k)_k\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^p\right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty$$

$$bv = \left\{ (x_k)_k : \exists \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} |x_{i+1} - x_i| \right\}, \quad con \ \|(x_k)_k\|_{bv} = \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_{k+1} - x_k| + \lim_{k\to\infty} |x_k|$$

$$bs = \left\{ (x_k)_k : \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^{k} x_i \right| < \infty \right\}, \quad con \quad \|(x_k)_k\|_{bs} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^{k} x_i \right|$$

Utilizaremos las letras E y F para denotar los espacios de sucesiones y $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$) para sus normas. Por otra parte, cuando decimos $x \in E$ nos referimos a que la sucesión $x = (x_k)_k$ pertenece a E. En diversos casos usaremos, por comodidad, la notación $x(k)$ para nombrar la k-ésima coordenada de la sucesión x y si x e y son dos sucesiones, llamaremos $x \cdot y := (x_k \cdot y_k)_k$ al producto coordenada a coordenada.

Diremos que un espacio de sucesiones es *normal* si satisface que si $x \in \omega$ e $y \in E$ son tales que $|x_k| \leq |y_k|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $x \in E$ y $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Por ejemplo, ℓ_p con $1 \leq p \leq \infty$ y c_0 son normales. Pero el espacio bv no es normal ya que $(1, 1, 1, \dots) \in bv$ pero $(1, -1, 1, -1, \dots) \notin bv$ y los módulos de sus coordenadas coinciden.

La siguiente es una propiedad importante de los espacios normales.

Proposición 1.3.1. *Si E es normal con $x \in E$ y s es una sucesión tal que $|s_k| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $x \cdot s \in E$ con $\|x \cdot s\|_E = \|x\|_E$.*

Demostración. Sea $x \in E$, como $|(x \cdot s)_k| = |x_k|$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por la normalidad de E, se tiene que $x \cdot s \in E$ con $\|x \cdot s\|_E \leq \|x\|_E$. Ahora bien, aplicando el mismo argumento sobre $x \cdot s \in E$, tomando una sucesión s^{-1} tal que $s \cdot s^{-1} = (1, 1, 1, \dots)$, se tiene que $x = x \cdot s \cdot s^{-1} \in E$ con $\|x\|_E \leq \|x \cdot s\|_E$.

□

A continuación, enunciamos dos propiedades más sobre espacios de sucesiones normales.

Proposición 1.3.2.

a) Sea E un espacio de sucesiones normado y normal y sean $x \in E$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de E, es decir, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $x_n = (x_n(k))_k \in E$. Si $x_n \to x$ en E, entonces cada coordenada de x_n converge a la correspondiente coordenada de x, o sea, $x_n(k) \to x(k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

b) Sea E un espacio de Banach de sucesiones. Si E es normal y existen constantes $C_1, C_2 > 0$ tales que $C_1 \leq \|e_k\|_E \leq C_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\ell_1 \hookrightarrow E \hookrightarrow \ell_\infty$.

De ahora en más, usaremos el término **espacio de sucesiones** para los espacios de Banach de sucesiones normales tales que $\|e_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Observemos que con esta definición de espacio de sucesiones, se verifica siempre que $\ell_1 \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} E \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_\infty$

En lo que sigue, recordamos las definiciones y algunos resultados conocidos sobre estos conceptos cuyas demostraciones pueden encontrarse, por ejemplo, en [Maz10].

Notaremos con $E_N := span\{e_1, \dots, e_N\}$, $i_N^E : E_N \to E$, $\pi_N^E : E \to E_N$ la inclusión y la proyección canónica respectivamente (escribiremos i_N y π_N siempre que sea claro a qué espacio nos referimos) y notaremos $E_0 := span\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Se define el *dual de Köthe* de E como

$$E^\times := \left\{ y \in \omega \ : \ \sum_{k \in \mathbb{N}} |x(k) \cdot y(k)| < \infty \ \textit{para todo}\ x \in E \right\},$$

que resulta un espacio de sucesiones con la norma dada por

$$\|y\|_{E^\times} := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \sum_{k \in \mathbb{N}} |x(k) \cdot y(k)| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|x \cdot y\|_{\ell_1}.$$

La norma también puede expresarse como

$$\|y\|_{E^\times} := \sup_{\|x\|_E \leq 1} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} x(k) \cdot y(k) \right|. \tag{1.8}$$

(Ver [LTII79, page 29] donde se define una noción análoga en un contexto más general, el de Banach lattices).

Dado $y \in E^\times$, consideramos $\varphi_y \in E'$ dada por $\varphi_y(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x(k) \cdot y(k)$ que satisface por definición que $\|\varphi_y\| = \|y\|_{E^\times}$, lo que nos da la siguiente proposición.

Proposición 1.3.3. *Sea E un espacio de sucesiones. La aplicación definida por*

$$\begin{array}{ccc} E^\times & \to & E' \\ y & \mapsto & \varphi_y \end{array}$$

resulta una inyección isométrica. Es decir, podemos pensar a $E^\times$ como subespacio isométrico de E'.

De la misma manera que definimos $E^\times$ podemos considerar $(E^\times)^\times := E^{\times\times}$ el bidual de Köthe y vale que $E \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} E^{\times\times}$. Pues dado $x \in E$, aplicando la Proposición 1.3.3, se tiene que

$$\|x\|_{E^{\times\times}} = \sup_{y \in B_{E^\times}} \|x \cdot y\|_{\ell_1} \leq \sup_{x' \in B_{E'}} |x'(x)| = \|x\|_E.$$

Decimos que E es *perfecto o Köthe reflexivo* si $E^{\times\times} \overset{1}{=} E$. Por ejemplo, los espacios ℓ_p, con $1 \leq p \leq \infty$, son perfectos pero el espacio c_0 no lo es. Además, $E^\times$ es perfecto para todo espacio de sucesiones E. En efecto, siempre vale que $E^\times \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} E^{\times\times\times}$. Recíprocamente, tenemos por definición que $x \in E^{\times\times\times}$ si y solo si $x \cdot y \in \ell_1$ para todo $y \in E^{\times\times}$. En particular, $x \cdot y \in \ell_1$ para todo $y \in E$, es decir, $x \in E^{\times}$ con

$$\|x\|_{E^\times} = \sup_{y \in B_E} \|x \cdot y\|_{\ell_1} \leq \sup_{y \in B_{E^{\times\times}}} \|x \cdot y\|_{\ell_1} = \|x\|_{E^{\times\times\times}}.$$

Decimos que E es *p-convexo* si existe $C > 0$ tal que para todo $x_1, \ldots, x_n \in E$ se satisface

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \right\|_E \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^p \right)^{1/p}. \tag{1.9}$$

Y decimos que E es *q-cóncavo* si existe $C > 0$ tal que para todo $x_1, \ldots, x_n \in E$ se satisface

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_E^q \right)^{1/q} \leq C \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^q \right)^{1/q} \right\|_E. \tag{1.10}$$

El ínfimo de las constantes que satisfacen (1.9) y (1.10) las llamamos $M^{(p)}(E)$ y $M_{(q)}(E)$ respectivamente y se llaman la constante de p-convexidad (resp. q-concavidad) del espacio E.

Para E y F espacios de sucesiones, se define el *espacio de multiplicadores* de E en F como

$$M(E, F) := \{x \in \omega \ : \ x \cdot y \in F \ \text{ para todo } y \in E\},$$

que resulta un espacio de sucesiones con la norma dada por

$$\|x\|_{M(E,F)} := \sup_{y \in B_E} \|x \cdot y\|_F.$$

Observemos que si consideramos D_x el operador lineal diagonal de E en F asociado a x, es decir, $D_x(y) = x \cdot y$, se tiene que

$$M(E, F) = \{x \in \omega \ : \ D_x : E \to F \text{ está bien definido y es acotado}\},$$

y $\|x\|_{M(E,F)} = \|D_x\|_{\mathcal{L}(E;F)}$.

Los ejemplos más simples de espacios de multiplicadores son $M(E, \ell_\infty) \overset{1}{=} \ell_\infty$, $M(E, \ell_1) \overset{1}{=} E^\times$ y $M(\ell_\infty, F) \overset{1}{=} F$. También se tiene que

$$M(\ell_p, \ell_q) \overset{1}{=} \begin{cases} \ell_\infty, & \text{si } p \leq q; \\ \ell_r, & \text{si } p > q, \end{cases}$$

donde $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$.

Al igual que para ideales de operadores multilineales, tenemos los conceptos de maximalidad y minimalidad para espacios de sucesiones.

1.3.1. Núcleo minimal

Sea E un espacio de sucesiones, se define el *núcleo minimal* de E como

$$E^{min} := \{x \in \omega \ : \ x = y \cdot z \quad \text{con} \quad y \in E \ \text{ y } \ z \in c_0\}$$

que resulta un espacio de sucesiones con la norma dada por

$$\|x\|_{E^{min}} = \text{ínf}\,\{\|y\|_E \cdot \|z\|_{\ell_\infty} \ : \ x = y \cdot z \quad \text{con} \quad y \in E \ \text{ y } \ z \in c_0\}.$$

Decimos que E es minimal si $E \overset{1}{=} E^{min}$ y siempre vale que $E^{min} \overset{1}{\hookrightarrow} E$.

La siguiente proposición nos da una caracterización útil del núcleo minimal.

Proposición 1.3.4.

$$E^{min} = \left\{x \in E : \lim_{N \to \infty} \|\pi_N(x) - x\|_E = 0\right\} = \overline{span\{e_k : k \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_E}.$$

Teorema 1.3.5. *Son equivalentes:*

(1) E *es minimal.*

(2) $E = \overline{span\{e_k : k \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_E}$.

(3) E *es separable.*

(4) $E' \overset{1}{=} E^\times$.

(5) π_N *tiende a* I *sobre compactos.*

Demostración. Las equivalencias entre los items (1), (2), (3) y (4) son conocidas (ver [Maz10]), por lo que solo veremos (1) $\Longleftrightarrow$ (5) (que lo usaremos en la demostración del Teorema 3.2.5). Supongamos que E es minimal, y veamos que π_N^E tiende a I_E sobre compactos. Sea $K \subseteq F$ compacto (es totalmente acotado), entonces dado $\varepsilon > 0$, existen $y_1, \ldots, y_m$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m B(y_j, \varepsilon)$. Como E es minimal, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(\pi_N^E - I_E)(y_j)\|_E < \varepsilon$ para todo $1 \leq j \leq m$ y para todo $N \geq N_0$. Luego, dado $y \in K$, existe j_0 tal que $y \in B(y_{j_0}, \varepsilon)$, entonces

$$\|(\pi_N^E - I_E)(y)\|_E \leq \|(\pi_N^E - I_E)(y - y_{j_0})\|_E + \|(\pi_N^E - I_E)(y_{j_0})\|_E \leq \varepsilon.\|(\pi_N^E - I_E)\| + \varepsilon \leq 3 \cdot \varepsilon,$$

para todo $N \geq N_0$ y para todo $y \in K$.

La vuelta es trivial, ya que los puntos son compactos. □

Por ejemplo, los espacios ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$, y c_0 son minimales pero ℓ_∞ no es minimal ya que $\ell'_\infty \neq \ell_1 = \ell_\infty^\times$.

1.3.2. Cápsula maximal

Sea E un espacio de sucesiones, se define la *cápsula maximal* de E como

$$E^{max} := \{x \in \omega \ : \ x \cdot z \in E \ \text{ para todo } \ z \in c_0\},$$

que resulta un espacio de sucesiones con la norma dada por

$$\|x\|_{E^{max}} = \sup_{y \in B_{c_0}} \|x \cdot y\|_E.$$

Siempre vale que $E \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} E^{max}$ y decimos que E es maximal si $E \overset{1}{=} E^{max}$.

Observemos que $\|x\|_{E^{max}} = \|D_x : c_0 \to E\|$, donde D_x es el operador lineal diagonal asociado a x sobre c_0. Luego, $M(c_0, E) = E^{max}$.

La siguiente proposición nos da una útil caracterización de la cápsula maximal.

Proposición 1.3.6.

$$E^{max} = \{x \in \omega \ : \ \textit{la sucesión } (\pi_N(x))_N \textit{ es acotada en } \| \cdot \|_E\}$$

y además, $\|x\|_{E^{max}} = \sup_{N \in \mathbb{N}} \|\pi_N(x)\|_E$.

Como consecuencia, para ver que un espacio de sucesiones E es maximal, como siempre vale que $E \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} E^{max}$, basta ver que $E^{max} \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} E$. Es decir, que si $\|\pi_N(x)\|_E \leq C$ para todo $N \in \mathbb{N}$, entonces $x \in E$ con $\|x\|_E \leq C$.

En el siguiente teorema damos equivalencias de la definición de espacio de sucesiones maximal.

Teorema 1.3.7. *Son equivalentes:*

(1) E *es maximal.*

(2) Si $(x_n)_n \subset B_E$ *tal que* $x_n(k) \to x(k)$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$, *entonces* $x \in B_E$.

(3) E *es perfecto, es decir,* $E \overset{1}{=} E^{\times\times}$.

Por ejemplo, los espacios ℓ_p, con $1 \leq p \leq \infty$, son maximales pero c_0 no es maximal ya que $c_0^{\times\times} = \ell_\infty \neq c_0$. Además, $E^\times$ es maximal para todo espacio de sucesiones E.

Capítulo 2

Operadores y formas multilineales diagonales en espacios ℓ_p

En este capítulo nos vamos a enfocar en estudiar la relación del ideal de operadores multilineales extendibles con otros ideales de operadores multilineales habitualmente estudiados: nucleares, integrales, acotados. Como comentamos en la introducción de esta tesis, existe una relación entre estos ideales (que de momento consideramos entre espacios ℓ_p) dada por la siguiente cadena de inclusiones

$$\mathcal{N}(^n\ell_p;\ell_q) \subseteq \mathcal{I}(^n\ell_p;\ell_q) \subseteq \mathcal{E}(^n\ell_p;\ell_q) \subseteq \mathcal{L}(^n\ell_p;\ell_q).$$

que se traduce en la siguiente cadena de inclusiones entre los espacios de sucesiones asociados a dichos ideales (ver definición más adelante)

$$\ell_n(\mathcal{N};p,q) \subseteq \ell_n(\mathcal{I};p,q) \subseteq \ell_n(\mathcal{E};p,q) \subseteq \ell_n(\mathcal{L};p,q). \tag{2.1}$$

Nuestro objetivo estará centrado en determinar para cada valor de p, de q y de n si cada una de las dos últimas inclusiones de la cadena (2.1) resulta una inclusión propia o resulta una igualdad. Notemos que en los casos donde determinemos que la inclusión es propia, obtenemos ejemplos explícitos de operadores multilineales que pertenecen al ideal más chico pero no al más grande.

Para $1 \leq p \leq \infty$, llamaremos p' al conjugado de p. Es decir, p' es el único número que verifica $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ (donde 1 es el conjugado de ∞ y viceversa). Notaremos con ℓ_p^N al espacio de N-uplas de números en $\mathbb{K}$ provistos de la norma p, es decir, $\ell_p^N := (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_{\ell_p})$.

2.1. Formas multilineales diagonales en espacios ℓ_p

Decimos que una forma multilineal $\phi : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \to \mathbb{K}$ es *diagonal* si existe una sucesión acotada de escalares $\alpha = (\alpha(k))_k$ tal que

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k). \tag{2.2}$$

En dicho caso, ϕ es la forma multilineal diagonal asociada a la sucesión α y la notamos ϕ_α. En otras palabras, dado $\alpha \in \ell_\infty$ podemos escribir a ϕ_α en su forma tensorial como

$$\phi_\alpha = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) \cdot e'_k \otimes \cdots \otimes e'_k,$$

donde $e'_k \in \ell_{p'}$ denota el k-ésimo funcional coordenado.

Dado $\mathfrak{A}$ un ideal de formas multilineales, nos preguntamos qué sucesiones α dan lugar a formas multilineales diagonales que pertenecen al ideal $\mathfrak{A}$. Definimos el *espacio de sucesiones asociado* a $\mathfrak{A}$ como

$$\ell_n(\mathfrak{A}; p) := \big\{ \alpha \in \ell_\infty : \phi_\alpha \in \mathfrak{A}(^n\ell_p) \big\},$$

que resulta efectivamente un espacio de sucesiones (Ver Proposición 3.1.1) con la norma dada por

$$\|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};p)} := \|\phi_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^n\ell_p)}.$$

En esta sección vamos a describir los siguientes espacios de sucesiones: $\ell_n(\mathcal{N}; p)$, $\ell_n(\mathcal{I}; p)$, $\ell_n(\mathcal{E}; p)$ y $\ell_n(\mathcal{L}; p)$. En [Car01] y en [CDS06] se calculan —con otro enfoque— los espacios de sucesiones asociados a los ideales de formas n-lineales nucleares, integrales y continuas en su totalidad, mientras que para el ideal de formas n-lineales extendibles se calculan los respectivos espacios de sucesiones asociados para los casos $p = 1$ y $2 \leq p \leq \infty$. Para los restantes valores de p se dan aproximaciones. Nosotros vamos a completar este cálculo dando explícitamente el espacio de sucesiones asociado al ideal de formas n-lineales extendibles para $1 < p < 2$ (Proposición 2.1.5).

Vamos a comenzar recordando los resultados de [Car01] y [CDS06]. Para empezar, el espacio de sucesiones $\ell_n(\mathcal{L}; p)$ se puede calcular simplemente aplicando la desigualdad de Hölder y se obtiene que

$$\ell_n(\mathcal{L}; p) \overset{1}{=} \begin{cases} \ell_\infty & \text{si } p \leq n \\ \\ \ell_{\frac{p}{p-n}} & \text{si } p > n \end{cases}$$

En particular, se tiene que $\ell_n(\mathcal{L}; \infty) \overset{1}{=} \ell_1$ y como todo espacio de sucesiones contiene a ℓ_1 obtenemos

$$\ell_n(\mathcal{N}; \infty) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{I}; \infty) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{E}; \infty) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{L}; \infty) \overset{1}{=} \ell_1.$$

Es decir, los operadores multilineales diagonales sobre $\ell_\infty \times \cdots \times \ell_\infty$ continuos son nucleares (y entonces son integrales y extendibles también). Por otra parte, es sabido que ℓ_p con $1 < p < \infty$ es un espacio Asplund (ver definición y propiedades en Apéndice A.4). Luego, aplicando un conocido resultado de Alencar [Ale85a] que dice que los ideales de formas multilineales nucleares e integrales coinciden isométricamente sobre espacios Asplund, se tiene que $\mathcal{N}(^n\ell_p) \overset{1}{=} \mathcal{I}(^n\ell_p)$ para todo $1 < p < \infty$. Esto nos dice que basta con calcular el espacio de sucesiones asociado a alguno de los dos ideales en este caso.

Proposición 2.1.1.

$$\ell_n(\mathcal{N};p) \overset{1}{=} \begin{cases} \ell_{p'/n} & si\ 1 < p < n' \\ \\ \ell_1 & si\ p \geq n' \end{cases}$$

En el caso $p = 1$, se tiene que $\ell_n(\mathcal{N};1) \overset{1}{=} c_0$ y $\ell_n(\mathcal{I};1) \overset{1}{=} \ell_\infty$.

A partir de este resultado, podemos describir los espacios de sucesiones asociados a los ideales de formas multilineales nucleares e integrales para todo $1 \leq p \leq \infty$. En particular, como $\ell_n(\mathcal{I};1) \overset{1}{=} \ell_\infty$ y todo espacio de sucesiones está incluido en ℓ_∞, tenemos que

$$\ell_n(\mathcal{I};1) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{E};1) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{L};1) \overset{1}{=} \ell_\infty.$$

Es decir, toda forma multilineal diagonal en $\ell_1 \times \cdots \times \ell_1$ es integral y entonces extendible y continua. Recordemos, por último, los resultados para el ideal de formas n-lineales extendibles.

Proposición 2.1.2. *Sea $p \geq 2$, entonces*

$$\ell_n(\mathcal{E};p) = \ell_1.$$

Es decir, para $p \geq 2$ toda forma n-lineal diagonal extendible en $\ell_p \times \cdots \times \ell_p$ es nuclear.

Ahora sí vamos a completar los cálculos describiendo el espacio $\ell_n(\mathcal{E};p)$ para $1 < p < 2$. En primera medida, vamos a probar un lema sobre formas n-lineales extendibles sobre $\ell_1 \times \ell_1 \times \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_{n-2}}$. Para esto vamos a considerar matrices de Walsh, es decir, matrices $(a_{kr})_{k,r}$ de tamaño $N \times N$ tales que $|a_{kr}| = 1$ y que satisfacen la siguiente condición

$$\sum_{r=1}^{N} a_{rk}\bar{a}_{rl} = N\ \delta_{k,l}\,. \tag{2.3}$$

Asumimos además que las matrices son simétricas. Por ejemplo, para el caso complejo las matrices de Fourier dadas por $a_{kr} = e^{\frac{2\pi i}{N}rk}$ [DF93, Section 8.5] son matrices de Walsh simétricas y para el caso real, se pueden considerar las matrices de Hadamard (ver [MQ10, Section 3]) definidas para los N que sean una potencia de 2 y que son generadas por bloques de la siguiente forma

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ A_{2^{n+1}} = \begin{pmatrix} A_{2^n} & A_{2^n} \\ A_{2^n} & -A_{2^n} \end{pmatrix}.$$

Para cada $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq \infty$, definimos un *operador de tipo Toeplitz* de ℓ_p^N en ℓ_∞^N como

$$\xi_{N,p}(x) = \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{r=1}^{N} \bar{a}_{kr} x(r) \right) e_k. \tag{2.4}$$

La siguiente proposición nos da una cota superior para la norma del operador $\xi_{N,p}$.

Proposición 2.1.3. *La norma del operador $\xi_{N,p}$ es menor o igual a $N^{\frac{1}{p'}}$.*

Demostración. Factoricemos al operador $\xi_{N,p}$ vía ℓ_1:

$$\begin{tikzcd} \ell_p^N \arrow[rr, "\xi_{N,p}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & \ell_\infty^N , \\ & \ell_1^N \arrow[ur, "\xi_{N,1}"'] & \end{tikzcd}$$

y analicemos las normas de cada uno de los factores

$$\|\,\mathrm{id} : \ell_p^N \to \ell_1^N\| = \sup_{x \in B_{\ell_p^N}} \|x\|_{\ell_1^N} \leq \|(1,1,\ldots,1)\|_{\ell_{p'}^N} = N^{\frac{1}{p'}},$$

$$\left\|\xi_{N,1} : \ell_1^N \to \ell_\infty^N\right\| = \sup_{x \in B_{\ell_1^N}} \sup_{1\leq k\leq N} \left|\sum_{r=1}^N \bar{a}_{kr} x(r)\right| \leq \sup_{x \in B_{\ell_1^N}} \sup_{1\leq k\leq N} \sum_{r=1}^N |x(r)| \leq 1.$$

Luego, se obtiene que $\|\xi_{N,p}\| \leq \|\,\mathrm{id}\,\| \cdot \|\xi_{N,1}\| \leq N^{\frac{1}{p'}}$. □

Por último, introducimos para $n \geq 3$ la siguiente modificación de la forma n-lineal sobre $\ell_\infty^N \times \cdots \times \ell_\infty^N$ estudiada por Bohnenblust y Hille en [BH31, Section 2]:

$$L_N(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{j,k,l=1}^N a_{jl} \cdot a_{lk} \cdot x_1(j) \cdot x_2(k) \cdot x_3(l) \cdots x_n(l). \tag{2.5}$$

Notemos que esta forma n-lineal que definimos se construye tomando la forma trilineal definida por Bohnenblust y Hille y extendiéndola a una forma n-lineal manteniendo la norma de la forma trilineal original. Como la norma extendible de una forma multilineal definida sobre $\ell_\infty^N \times \cdots \times \ell_\infty^N$ coincide con la norma usual (ver Apéndice A.2), se tiene por [BH31, Section 2] que

$$\|L_N\|_{\mathcal{E}({}^n\ell_\infty^N)} = \|L_N\|_{\mathcal{L}({}^n\ell_\infty^N)} = N^2\,. \tag{2.6}$$

Aplicando las propiedades de los coeficientes $(a_{kr})_{k,r}$ de la ecuación (2.3), se obtiene

$$\begin{aligned}
L_N\big(\xi_{N,p}(x_1),\xi_{N,p}(x_2),x_3,\dots,x_n\big) &= \sum_{j,k,l=1}^{N} a_{jl}\cdot a_{lk}\cdot \xi_{N,p}(x_1)(j)\cdot \xi_{N,p}(x_2)(k)\cdot x_3(l)\cdots x_n(l)\\
&= \sum_{j,k,l=1}^{N} a_{jl}\cdot a_{lk}\cdot \left(\sum_{r=1}^{N}\bar{a}_{jr}\cdot x_1(r)\right)\cdot\left(\sum_{s=1}^{N}\bar{a}_{js}\cdot x_2(s)\right)\cdot x_3(l)\cdots x_n(l)\\
&= \sum_{r,s,l=1}^{N} x_1(r)\cdot x_2(s)\cdot x_3(l)\cdots x_n(l)\cdot\left(\sum_{j=1}^{N} a_{jl}\cdot\bar{a}_{jr}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{N} a_{lk}\cdot\bar{a}_{ks}\right)\\
&= \sum_{r,s,l=1}^{N} x_1(r)\cdot x_2(s)\cdot x_3(l)\cdots x_n(l)\cdot N\cdot\delta_{l,r}\cdot N\cdot\delta_{l,s}\\
&= N^2\cdot\left(\sum_{r=1}^{N} x_1(r)\cdot x_2(r)\cdot x_3(r)\cdots x_n(r)\right) = N^2\cdot\Phi_N(x_1,\dots,x_n), \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

donde Φ es la forma n-lineal dada por

$$\Phi(x_1,\dots,x_n)=\sum_{k=1}^{\infty} x_1(k)\cdots x_n(k) \qquad (2.8)$$

y Φ_N es la forma n-lineal dada por sumar los primeros N términos en (2.8).

Estamos en condiciones de enunciar el lema que necesitaremos para caracterizar el espacio de sucesiones asociado a las formas multilineales extendibles en $\ell_p\times\cdots\times\ell_p$ para $1<p<2$.

Lema 2.1.4. *Toda forma n-lineal diagonal sobre $\ell_1\times\ell_1\times\ell_{p_1}\times\cdots\times\ell_{p_{n-2}}$ con $1\le p_i\le\infty$ y $n\ge 2$, es extendible.*

Demostración. El caso $n=2$ es inmediato ya que, como vimos en la Proposición 2.1.1, las formas n-lineales —y en particular las forma bilineales— sobre ℓ_1 son integrales y en consecuencia extendibles. Para $n\ge 3$, cada forma n-lineal diagonal $\phi_\alpha:\ell_1\times\ell_1\times\ell_{p_1}\times\cdots\times\ell_{p_{n-2}}\to\mathbb{K}$ se puede factorizar de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
\ell_1 \arrow[d, "D_\alpha"'] & \times & \ell_1 \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \times & \ell_{p_1} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \times & \cdots & \times & \ell_{p_{n-2}} \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{K}\,, \\
\ell_1 & \times & \ell_1 & \times & \ell_{p_1} & \times & \cdots & \times & \ell_{p_{n-2}} \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $D_\alpha:\ell_1\to\ell_1$ es el operador lineal diagonal asociado a α (que está bien definido para todo $\alpha \in \ell_\infty$). En efecto,

$$\begin{aligned}
\Phi \circ (D_\alpha, \mathrm{id}, \dots, \mathrm{id})(x_1, \dots, x_n) &= \Phi(\alpha \cdot x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k) \\
&= \phi_\alpha(x_1, \dots, x_n).
\end{aligned}$$

De la factorización y las propiedades de los ideales de formas n-lineales, se deduce que para ver que toda forma n-lineal diagonal sobre $\ell_1 \times \ell_1 \times \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_{n-2}}$ es extendible, basta ver que Φ es extendible sobre $\ell_1 \times \ell_1 \times \ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_{n-2}}$.

Para demostrar que Φ es extendible, consideremos la forma n-lineal L_N definida (2.5) y observemos que por lo visto en la igualdad (2.7) se obtiene

$$L_N(\xi_{N,1}(x_1), \xi_{N,1}(x_2), \mathrm{id}(x_3), \dots, \mathrm{id}(x_n)) = N^2 \cdot \Phi_N(x_1, \dots, x_n),$$

donde $\mathrm{id} : \ell_{p_i}^N \to \ell_\infty^N$. Entonces, de la Proposición 2.1.3 y la identidad (2.6), tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi_N\|_{\mathcal{E}(\ell_1, \ell_1, \ell_{p_1}, \dots, \ell_{p_{n-2}})} &\leq \frac{1}{N^2} \cdot \|L_N\|_{\mathcal{E}(^n\ell_\infty^N)} \cdot \|\xi_{N,1}\|^2 \cdot \prod_{i=1}^{n-2} \|\,\mathrm{id} : \ell_{p_i}^N \to \ell_\infty^N\| \\
&\leq \frac{1}{N^2} \cdot N^2 = 1\,.
\end{aligned}$$

En consecuencia, las normas extendibles de las formas n-lineales Φ_N ($N \in \mathbb{N}$) están uniformemente acotadas por 1. La versión del *Density Lemma* [DF93, Section 13.4] para ideales de formas multilineales maximales que se encuentra en [CDS09, Lemma 5.4] dice que si una forma n-lineal diagonal satisface que las las normas de sus formas n-lineales truncadas estan uniformemente acotadas en un ideal maximal, entonces la forma n-lineal diagonal original pertenece al ideal y su norma es menor o igual a la cota uniforme. De lo que se deduce —ya que el ideal de formas n-lineales extendibles es maximal [Car99, Corollary 3.9]— que Φ es extendible y además $\|\Phi\|_{\mathcal{E}(\ell_1, \ell_1, \ell_{p_1}, \dots, \ell_{p_{n-2}})} = 1$. □

El lema anterior, además de ser una herramienta para describir el espacio de sucesiones asociado al ideal de formas n-lineales extendibles, muestra un comportamiento inesperado de las formas n-lineales diagonales. Es fácil ver que si toda forma n-lineal sobre $X_1 \times \cdots \times X_n$ es extendible, entonces toda forma $(n-1)$-lineal sobre cualquier $(n-1)$-upla de los espacios anteriores es extendible. Sin embargo, esta propiedad deja de valer si nos restringimos a las formas multilineales diagonales. En efecto, el Lema 2.1.4 muestra que toda forma trilineal diagonal sobre $\ell_1 \times \ell_1 \times \ell_2$ es extendible, mientras que en [CS14] se prueba que existen formas bilineales diagonales no extendibles sobre $\ell_1 \times \ell_2$. En particular, este resultado nos muestra que existen formas trilineales en $\ell_1 \times \ell_1 \times \ell_2$ (no diagonales) que no son extendibles.

Las formas multilineales extendibles pueden caracterizarse como aquellas que se factorizan vía espacios $\mathcal{L}_\infty$ —ya que dichos espacios son inyectivos— (ver definición en Apéndice A.2).

Luego, la desigualdad de Grothendieck multilineal nos permite deducir (ver [Ble88] o [PG06, Corollary 2.5]) que toda forma n-lineal extendible es absolutamente $(1;2)$-sumante. A partir de dicho resultado y usando técnicas de interpolación, se prueba un resultado más fuerte en [BMP10, Theorem 3.15]: Toda forma n-lineal extendible es absolutamente $(r;2r)$-sumante para todo $r \geq 1$. En otras palabras, existe una constante $K_{r,n} > 0$ tal que para toda forma n-lineal extendible ϕ vale

$$\pi_{(r,2r)}(\phi) \leq K_{r,n} \cdot \|\phi\|_{\mathcal{E}}.$$

Proposición 2.1.5. *Sean $1 < p < 2$ y $n \geq 2$. Entonces, $\ell_n(\mathcal{E};p) = \ell_{\frac{p'}{2}}$.*

Demostración. Si $\phi_\alpha \in \mathcal{E}({}^n\ell_p)$ es una forma n-lineal diagonal extendible, por ser ϕ_α absolutamente $(\frac{p'}{2}, p')$-sumante [BMP10, Theorem 3.15], resulta

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k|^{\frac{p'}{2}}\right)^{\frac{2}{p'}} = \left(\sum_{k=1}^{N} |\phi_\alpha(e_k,\dots,e_k)|^{\frac{p'}{2}}\right)^{\frac{2}{p'}} \leq \pi_{(\frac{p'}{2},p')}(\phi_\alpha)\cdot w_{p'}\left((e_k)_{k=1}^N\right)^n = \pi_{(\frac{p'}{2},p')}(\phi_\alpha),$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Esto implica que α pertenece a $\ell_{\frac{p'}{2}}$. En otras palabras, lo que mostramos es

$$\ell_n(\mathcal{E};p) \subseteq \ell_n(\Pi_{(\frac{p'}{2},p')};p) \subseteq \ell_{\frac{p'}{2}},$$

con $\|\alpha\|_{\frac{p'}{2}} \leq \pi_{(\frac{p'}{2},p')}(\phi_\alpha) \leq K_{\frac{p'}{2},n} \cdot \|\phi_\alpha\|_{\mathcal{E}({}^n\ell_p)} = K_{\frac{p'}{2},n} \cdot \|\alpha\|_{\ell_n(\mathcal{E};p)}$.

Recíprocamente, sea $\alpha \in \ell_{\frac{p'}{2}}$ y definimos $(\sigma(k))_k = (\alpha(k)^{\frac{1}{2}})_k$ —para el caso complejo—. Consideremos el operador lineal diagonal $D_\sigma : \ell_p \to \ell_1$ y factoricemos a ϕ_α de la siguiente forma

$$\begin{tikzcd}
\ell_p \arrow[d, "D_\sigma"'] & \times & \ell_p \arrow[d, "D_\sigma"'] & \times & \ell_p \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \times & \cdots & \times & \ell_p \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\phi_\alpha"] & \mathbb{K} . \\
\ell_1 & \times & \ell_1 & \times & \ell_p & \times & \cdots & \times & \ell_p \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Para el caso real, en vez de tomar dos veces D_σ, tomamos dos operadores lineales distintos D_{σ_1} y D_{σ_2}, donde $(\sigma_1(k))_k = (|\alpha(k)|^{1/2})_k$ y $(\sigma_2(k))_k = (sg(\alpha(k)) \cdot |\alpha(k)|^{1/2})_k$. Como vimos en el Lema 2.1.4, Φ es extendible y tiene norma 1, lo cual implica que ϕ_α es extendible y además

$$\|\phi_\alpha\|_{\mathcal{E}({}^n\ell_p)} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{E}(\ell_1,\ell_1,\ell_p,\dots,\ell_p)} \cdot \|D_\sigma\|^2 = \|\sigma\|_{\ell_{p'}}^2 = \|\alpha\|_{\ell_{\frac{p'}{2}}}.$$

$\square$

Observemos que de esta última prueba, se deduce también que para $1 < p < 2$ vale que

$$\ell_n(\mathcal{E};p) = \ell_n(\Pi_{(\frac{p'}{2},p')};p) \overset{1}{=} \ell_{\frac{p'}{2}}.$$

Para finalizar la sección, resumimos todos los resultados obtenidos en el siguiente teorema

Teorema 2.1.6. *Sea $n \geq 2$, se tiene que*

1. *Para $p = 1$,*
$$\ell_n(\mathcal{N}; 1) = c_0 \subsetneq \ell_\infty = \ell_n(\mathcal{I}; 1) = \ell_n(\mathcal{E}; 1) = \ell_n(\mathcal{L}; 1).$$

2. *Para $1 < p < 2$,*

   a) *si $n = 2$, entonces*
$$\ell_2(\mathcal{N}; p) = \ell_2(\mathcal{I}; p) = \ell_2(\mathcal{E}; p) = \ell_{\frac{p'}{2}} \subsetneq \ell_\infty = \ell_2(\mathcal{L}; p).$$

   b) *si $n \geq 3$, entonces*
$$\ell_n(\mathcal{N}; p) = \ell_n(\mathcal{I}; p) = \ell_{\text{máx}(\frac{p'}{n},1)} \subsetneq \ell_{\frac{p'}{2}} = \ell_n(\mathcal{E}; p) \subsetneq \ell_\infty = \ell_n(\mathcal{L}; p).$$

3. *Para $2 \leq p < \infty$,*
$$\ell_n(\mathcal{N}; p) = \ell_n(\mathcal{I}; p) = \ell_n(\mathcal{E}; p) = \ell_1 \subsetneq \ell_n(\mathcal{L}; p) = \begin{cases} \ell_{\frac{p}{p-n}} & si\ n < p\,. \\ \ell_\infty & si\ n \geq p\,. \end{cases}$$

4. *Para $p = \infty$,*
$$\ell_n(\mathcal{N}; \infty) = \ell_n(\mathcal{I}; \infty) = \ell_n(\mathcal{E}; \infty) = \ell_n(\mathcal{L}; \infty) = \ell_1.$$

Es interesante notar que para $1 < p < 2$ hay una diferencia importante entre formas bilineales y formas n-lineales con $n \geq 3$. De hecho, una consecuencia de un profundo resultado de Pisier [Pis83] es que toda forma bilineal extendible definida en un espacio con cotipo 2 (ver definición en Apéndice A.3) es integral (ver los artículos [Car01, CGJ01] donde se interpreta el resultado de Pisier de una manera más acorde a nuestro contexto). Por lo tanto, para $1 < p < 2$, toda forma bilineal extendible en ℓ_p es integral. Sin embargo, el teorema anterior dice que si $1 < p < 2$ y $n \geq 3$, existen formas n-lineales diagonales extendibles que no son integrales ya que la inclusión $\ell_n(\mathcal{I}; p) \subseteq \ell_n(\mathcal{E}; p)$ es estricta. Podemos ver que también es estricta la inclusión $\ell_n(\mathcal{E}; p) \subseteq \ell_n(\mathcal{L}; p)$ para $1 < p < \infty$ y $n \geq 2$, por lo que en este caso existen operadores multilineales continuos no extendibles.

2.2. Operadores multilineales diagonales en espacios ℓ_p

Una herramienta importante para entender el comportamiento de los operadores multilineales en espacios ℓ_p es notar que hay una identificación isométrica natural entre $\mathcal{L}(^n\ell_p; \ell_q)$ y el espacio de formas $(n+1)$-lineales continuas sobre $\ell_p \times \cdots \times \ell_p \times \ell_{q'}$ (en el caso que $q = 1$, tomamos $\ell_{q'}$ como c_0 en vez de ℓ_∞). Se puede ver también, que esta identificación isométrica sigue valiendo si consideramos las clases de operadores multilineales nucleares e integrales. Sin embargo, para la clase de operadores multilineales extendibles esta identidad no se mantiene.

Una forma $(n+1)$-lineal sobre $\ell_p \times \cdots \times \ell_p \times \ell_{q'}$ produce un operador n-lineal extendible de $\ell_p \times \cdots \times \ell_p$ en ℓ_q (como ℓ_1 está complementado en su bidual, para $q = 1$ podemos usar ℓ_∞ o c_0 como $\ell_{q'}$). Pero veremos más adelante en la Observación 2.2.5 que no vale la recíproca.

El teorema principal de esta sección —Teorema 2.2.8— nos da una lista casi completa de las condiciones de sumabilidad sobre los coeficientes que debe tener un operador multilineal diagonal de $\ell_p \times \cdots \times \ell_p$ en ℓ_q para ser integral o extendible. Como consecuencia, se establece para cada p y q la existencia —o ausencia— de operadores multilineales diagonales que no son extendibles, o que son extendibles pero no integrales (ver Cuadro 2.1).

Como hemos mencionado en la introducción de este capítulo (y de la tesis), los operadores n-lineales en espacios ℓ_p nucleares son integrales y los operadores n-lineales en espacios ℓ_p integrales son extendibles. Como consecuencia, tenemos la cadena de inclusiones que vimos en la ecuación (2.1)

$$\ell_n(\mathcal{N}; p, q) \subseteq \ell_n(\mathcal{I}; p, q) \subseteq \ell_n(\mathcal{E}; p, q) \subseteq \ell_n(\mathcal{L}; p, q).$$

Recordemos que nuestro foco está sobre los dos casos extremos: cuándo sólo los operadores integrales son extendibles o cuándo todos los operadores lo son.

Un operador n-lineal $T \in \mathcal{L}(^n\ell_p; \ell_q)$ es *diagonal* si existe una sucesión acotada de escalares $\alpha = (\alpha(k))_k$ tal que para $x_1, \ldots, x_n \in \ell_p$, podemos escribir al operador como

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \cdot x_1 \cdots x_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k)\ e_k. \tag{2.9}$$

En dicho caso, T es el operador multilineal diagonal asociada a la sucesión α y lo notamos T_α. Observemos que también podemos representar a T_α de forma tensorial como

$$T_\alpha = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) \cdot e'_k \otimes \cdots \otimes e'_k \otimes e_k,$$

donde e_k es el k-ésimo vector canónico en el espacio ℓ_q y e'_k es el k-ésimo funcional coordenado.

Al igual que para las formas multilineales, dado $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores multilineales definimos el *espacio de sucesiones asociado* a $\mathfrak{A}$ como

$$\ell_n(\mathfrak{A}; p, q) := \{\alpha \in \ell_\infty : T_\alpha \in \mathfrak{A}(^n\ell_p; \ell_q)\},$$

que resulta un espacio de sucesiones (ver Proposición 3.1.1) con la norma definida por

$$\|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A}; p, q)} := \|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^n\ell_p; \ell_q)}.$$

Es decir, $\ell_n(\mathfrak{A}; p, q)$ describe el espacio de operadores n-lineales diagonales de $\ell_p \times \cdots \times \ell_p$ en ℓ_q que pertenecen al ideal $\mathfrak{A}$. Al igual que en la sección anterior, nos vamos a enfocar en el cálculo de los espacios de sucesiones asociados a los ideales de operadores multilineales nucleares, integrales, extendibles y continuos. En el final de la sección daremos un teorema (Teorema 2.2.8) que resume los cálculos efectuados y una tabla (Cuadro 2.1) que muestra la comparación entre el ideal de operadores multilineales extendibles con los integrales y con los continuos.

El espacio $\ell_n(\mathcal{L}; p, q)$ se puede calcular usando la desigualdad de Hölder y se obtiene que

$$\ell_n(\mathcal{L}; p, q) \overset{1}{=} \begin{cases} \ell_\infty & \text{si } p \leq nq \\ \\ \ell_s & \text{si } p > nq \end{cases} \tag{2.10}$$

donde s está definido por $\frac{1}{s} = \frac{1}{q} - \frac{n}{p}$.

Las siguientes proposiciones caracterizan los espacios de sucesiones asociados a los ideales de operadores multilineales nucleares e integrales. Comencemos con el caso $p = 1$ y $q = \infty$.

Proposición 2.2.1. *Sea $T_\alpha \in \mathcal{L}(^n\ell_1; \ell_\infty)$. Entonces:*

(i) T_α es integral y $\|T_\alpha\|_{\mathcal{I}} = \|\alpha\|_{\ell_\infty}$.

(ii) T_α es nuclear si y solo si $\alpha \in c_0$. En este caso, $\|T_\alpha\|_{\mathcal{N}} = \|\alpha\|_{\ell_\infty}$.

Demostración. Teniendo en cuenta las siguientes identificaciones isométricas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(^n\ell_1; \ell_\infty) &\overset{1}{=} \mathcal{L}(^{n+1}\ell_1), \\ \mathcal{I}(^n\ell_1; \ell_\infty) &\overset{1}{=} \mathcal{I}(^{n+1}\ell_1), \\ \mathcal{N}(^n\ell_1; \ell_\infty) &\overset{1}{=} \mathcal{N}(^{n+1}\ell_1), \end{aligned}$$

que relacionan operadores n-lineales con formas $(n+1)$-lineales, el resultado se sigue directamente de la Proposición 2.1.1 para formas multilineales sobre $\ell_1 \times \cdots \times \ell_1$. □

Antes de enunciar el siguiente resultado, recordemos que el ideal de formas n-lineales integrales sobre $\ell_{p_1} \times \cdots \times \ell_{p_n}$ se identifica con el dual del producto tensorial inyectivo (completo) de dichos espacios (ver [DF93] y [Rya02] o Teorema 1.2.2 teniendo en cuenta que $\mathcal{I} = P\mathcal{I} = G\mathcal{I}$ sobre espacios ℓ_p). Es decir, $\mathcal{I}(\ell_{p_1}, \ldots, \ell_{p_n}) \overset{1}{=} (\ell_{p_1} \otimes \cdots \otimes \ell_{p_n}; \varepsilon)'$.

Proposición 2.2.2. *Sea $p > 1$. La aplicación $T_\alpha \in \mathcal{L}(^n\ell_p; \ell_q)$ es nuclear si y solo si $\alpha \in \ell_t$, donde t está definido como el máximo entre $(\frac{n}{p'} + \frac{1}{q})^{-1}$ y 1. En este caso, $\|T_\alpha\|_{\mathcal{N}} = \|\alpha\|_{\ell_t}$.*

Demostración. Si T_α es nuclear, entonces T_α es integral y su forma $(n+1)$-lineal asociada $\phi_\alpha : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \times \ell_{q'} \to \mathbb{K}$ dada por

$$\phi_\alpha(x_1, \ldots, x_n, y') = \langle T_\alpha(x_1, \ldots, x_n), y' \rangle$$

es también integral. Además, vale que $\|\phi_\alpha\|_{\mathcal{I}} = \|T_\alpha\|_{\mathcal{I}}$ (donde consideramos $\ell_{q'}$ como c_0 en vez de ℓ_∞ para $q = 1$) y que ϕ_α es la forma $(n+1)$-lineal diagonal asociada a α sobre $\ell_p \times \cdots \times \ell_p \times \ell_{q'}$.

Luego, si consideramos su linealización $L_{\phi_\alpha} : (\otimes^n \ell_p \otimes \ell_{q'}; \varepsilon) \to \mathbb{K}$ tenemos que es ε-continua. Por lo tanto, dado $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{N} \alpha(k)\cdot\beta(k)\right| &= \left|L_{\phi_\alpha}\left(\sum_{k=1}^{N} \beta(k)\cdot e_k\otimes\cdots\otimes e_k\otimes e'_k\right)\right| \\
&\leq \|L_{\phi_\alpha}\|_{\left(\otimes^n\ell_p\otimes\ell_{q'};\varepsilon\right)'}\cdot\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{N} \beta(k)\cdot e_k\otimes\cdots\otimes e_k\otimes e'_k\right) \\
&= \|T_\alpha\|_{\mathcal{I}(^n\ell_p;\ell_q)}\cdot\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{N} \beta(k)\cdot e_k\otimes\cdots\otimes e_k\otimes e'_k\right) \\
&= \|T_\alpha\|_{\mathcal{I}(^n\ell_p;\ell_q)}\cdot\left(\sup_{\varphi_1,\dots,\varphi_n\in B_{\ell_{p'}},\psi\in B_{\ell_q}}\left|\sum_{k=1}^{N} \beta(k)\cdot\varphi_1(e_k)\cdots\varphi_n(e_k)\cdot\psi(e'_k)\right|\right) \\
&= \|T_\alpha\|_{\mathcal{I}(^n\ell_p;\ell_q)}\cdot\left(\sup_{\varphi_1,\dots,\varphi_n\in B_{\ell_{p'}}}\left\|\sum_{k=1}^{N} \beta(k)\cdot\varphi_1(k)\cdots\varphi_n(k)\cdot e'_k\right\|_{\ell_{q'}}\right) \\
&= \|T_\alpha\|_{\mathcal{I}(^n\ell_p;\ell_q)}\cdot\|(T_\beta)_N\|_{\mathcal{L}(^n\ell_{p'},\ell_{q'})} \\
&= \|T_\alpha\|_{\mathcal{I}(^n\ell_p;\ell_q)}\cdot\left\|(\beta(k))_{k=1}^{N}\right\|_{\ell_{t'}}.
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\alpha \in \ell_t$ y además $\|\alpha\|_{\ell_t} \leq \|T_\alpha\|_{\mathcal{I}(^n\ell_p;\ell_q)}$.

Recíprocamente, si $\alpha \in \ell_t$, veamos que T_α es nuclear y $\|T_\alpha\|_{\mathcal{N}(^n\ell_p;\ell_q)} \leq \|\alpha\|_{\ell_t}$. Para $t = 1$, la conclusión es trivial ya que $\ell_1 \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathcal{N}; p, q)$. Tomemos entonces $t > 1$ y consideremos la siguiente factorización de T_α

$$\begin{tikzcd}
\ell_p \arrow[d, "D_\eta"'] & \times & \cdots & \times & \ell_p \arrow[r, "T_\alpha"] \arrow[d, "D_\eta"'] & \ell_q \\
\ell_1 & \times & \cdots & \times & \ell_1 \arrow[r, "\Psi"'] & \ell_\infty, \arrow[u, "D_\nu"']
\end{tikzcd}$$

donde $\eta(k) = \alpha(k)^{\frac{t}{p'}}$, $\nu(k) = \alpha(k)^{\frac{t}{q}}$ y $\Psi = T_{(1,1,\dots)}$. Es fácil ver que los respectivos operadores lineales están bien definidos. Además, vale que $\|D_\eta\| = \|\eta\|_{\ell_{p'}} = \|\alpha\|_{\ell_t}^{\frac{t}{p'}}$ y que $\|D_\nu\| = \|\nu\|_{\ell_1} = \|\alpha\|_{\ell_t}^{\frac{t}{q}}$.

Por la Proposición 2.2.1, el operador n-lineal $\Psi : \ell_1 \times \cdots \times \ell_1 \to \ell_\infty$ es integral y tiene norma $\|\Psi\|_{\mathcal{I}} = \|(1, 1, \dots)\|_{\ell_\infty} = 1$, de lo que se deduce que T_α también es integral. Una vez más, haremos uso de un resultado de Alencar [Ale85a], que dice que el ideal de operadores n-lineales Pietsch-integrales (que si consideramos operadores sobre espacios ℓ_p, simplemente los llamamos integrales) coincide isométricamente, sobre espacios Asplund, con el ideal de operadores n-lineales nucleares. Como $t > 1$, vale que $1 < p < \infty$ (pues si $p = \infty$, entonces

$t = 1$) y ℓ_p es un espacio Asplund. Por ende, T_α resulta nuclear y sus normas nuclear e integral coinciden. Luego,

$$\|T_\alpha\|_{\mathcal{N}(^n\ell_p;\ell_q)} = \|T_\alpha\|_{\mathcal{I}(^n\ell_p;\ell_q)} \leq \|D_\nu\| \cdot \|\Psi\|_{\mathcal{I}(^n\ell_1;\ell_\infty)} \cdot \|D_\eta\|^n = \|\alpha\|_{\ell_t}^{\frac{t}{q}} \cdot \|\alpha\|_{\ell_t}^{\frac{nt}{p'}} = \|\alpha\|_{\ell_t},$$

como queríamos ver. $\square$

Para finalizar con la descripción de los espacios de sucesiones asociados a los ideales de operadores multilineales nucleares e integrales, nos resta demostrar el caso $p = 1$ y $q < \infty$.

Proposición 2.2.3. *Sean $q < \infty$ y $T_\alpha \in \mathcal{L}(^n\ell_1;\ell_q)$. Son equivalentes:*

(i) *T_α es integral.*

(ii) *T_α es nuclear.*

(iii) *$\alpha \in \ell_q$.*

Cuando se satisface alguna de las condiciones anteriores, se tiene que

$$\|T_\alpha\|_{\mathcal{I}(^n\ell_1;\ell_q)} = \|T_\alpha\|_{\mathcal{N}(^n\ell_1;\ell_q)} = \|\alpha\|_{\ell_q}.$$

Demostración. La equivalencia entre *(i)* y *(iii)* se prueba como en la Proposición 2.2.2 sin la necesidad de los operadores D_η y observando que para $p = 1$ resulta que $t = q$. Luego, sólo debemos probar que *(iii)* implica *(ii)*. Dado $\alpha \in \ell_q$, calculemos la norma nuclear del operador

$$T_\alpha^{(s,l)} := \sum_{k=s}^{s+l} \alpha(k) \cdot e'_k \otimes \cdots \otimes e'_k \otimes e_k.$$

Para esto, factorizamos $T_\alpha^{(s,l)}$ de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd}
\ell_1 \arrow[d, "\Pi^{(s,l)}"'] & \times & \cdots & \times & \ell_1 \arrow[r, "T_\alpha^{(s,l)}"] \arrow[d, "\Pi^{(s,l)}"'] & \ell_q \\
\ell_1^{l+1} & \times & \cdots & \times & \ell_1^{l+1} \arrow[r, "\Psi_{l+1}"'] & \ell_\infty \arrow[u, "D_\alpha^{(s,l)}"']
\end{tikzcd},$$

donde

$$\Pi^{(s,l)} = \sum_{k=s}^{s+l} e'_k \otimes e_{k-s+1}$$

es la proyección (con norma uno) sobre las coordenadas $(s, \ldots, s+l)$,

$$D_\alpha^{(s,l)} := \sum_{k=1}^{l+1} \alpha(k+s-1) \cdot e'_k \otimes e_{k+s-1}$$

y

$$\Psi_{l+1} = \sum_{k=1}^{l+1} e'_k \otimes \cdots \otimes e'_k \otimes e_k.$$

Como el dominio de Ψ_{l+1} es un producto de espacios de dimensión finita, este operador es trivialmente nuclear y sus normas nuclear e integral coinciden. Por lo visto en las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.2, se tiene además que $\|\Psi_{l+1}\|_{\mathcal{N}} = \|\Psi_{l+1}\|_{\mathcal{I}} = 1$ y que $\|D_\alpha^{(s,l)}\| = \|(\alpha_j)_{j=s}^{s+l}\|_{\ell_q}$. Por lo tanto

$$\|T_\alpha^{(s,l)}\|_{\mathcal{N}} \leq \|D_\alpha^{(s,l)}\| \cdot \|\Psi_{l+1}\|_{\mathcal{N}} \cdot \|\Pi^{(s,l)}\|^n = \|(\alpha_j)_{j=s}^{s+l}\|_{\ell_q}.$$

Como α pertenece a ℓ_q, esta desigualdad muestra que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \alpha(k) \cdot e'_k \otimes \cdots \otimes e'_k \cdot e_k$ —que define a T_α— es de Cauchy en la norma nuclear, por lo que T_α resulta nuclear. □

En resumen, probamos que

$$\ell_n(\mathcal{N}; p, q) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{I}; p, q) \overset{1}{=} \ell_t \qquad \text{para } (p, q) \neq (1, \infty); \tag{2.11}$$
$$\ell_n(\mathcal{N}; 1, \infty) \overset{1}{=} c_0 \quad \text{y} \quad \ell_n(\mathcal{I}; 1, \infty) \overset{1}{=} \ell_\infty\,,$$

donde t está dado por $t = \text{máx}\left\{(\frac{n}{p'} + \frac{1}{q})^{-1}, 1\right\}$.

Antes de enfocarnos en la extendibilidad, notemos otro comportamiento particular que relaciona a las formas y los operadores multilineales. Vale en general que, si dos clases de formas multilineales no coinciden sobre algún espacio de Banach X, las correspondientes clases de operadores multilineales (con valores vectoriales) tampoco coinciden para cualquier espacio de llegada Y. Más precisamente, dados ideales de aplicaciones multilineales $\mathfrak{A}_1$ y $\mathfrak{A}_2$ y un espacio de Banach X, si $\mathfrak{A}_1(^nX) \neq \mathfrak{A}_2(^nX)$, entonces $\mathfrak{A}_1(^nX; Y) \neq \mathfrak{A}_2(^nX; Y)$ para todo espacio de Banach Y. En efecto, si tomamos una forma multilineal ϕ que pertenece a $\mathfrak{A}_1(^nX)$ pero que no pertenece a $\mathfrak{A}_2(^nX)$, entonces dado cualquier elemento $y \in Y$ distinto de cero se tiene que el operador multilineal $\phi \cdot y$ pertenece a $\mathfrak{A}_1(^nX; Y)$ pero no pertenece a $\mathfrak{A}_2(^nX; Y)$. Notemos que, si ϕ es una forma n-lineal diagonal (sobre algún espacio de sucesiones), el operador n-lineal $\phi \cdot y$ no es necesariamente diagonal. Luego, dicho comportamiento, si nos restringimos a las formas y operadores multilineales diagonales, deja de valer. Es más, por ejemplo, la Proposición 2.2.3 dice que los operadores n-lineales diagonales integrales de $\ell_1 \times \cdots \times \ell_1$ en ℓ_q son nucleares para todo $1 \leq q < \infty$. Sin embargo, probamos también en la Proposición 2.1.1 que hay formas n-lineales diagonales que son integrales pero no nucleares sobre $\ell_1 \times \cdots \times \ell_1$ (basta con tomar una sucesión α en ℓ_∞ que no pertenezca a c_0). Es decir,

$$\ell_n(\mathcal{N}; 1) \neq \ell_n(\mathcal{I}; 1)$$

pero

$$\ell_n(\mathcal{N}; 1, q) = \ell_n(\mathcal{I}; 1, q),$$

para todo $1 \leq q < \infty$.

La siguiente proposición es un caso particular de un resultado para operadores multilineales extendibles sobre espacios de sucesiones generales que probaremos en el próximo capítulo (ver Proposición 3.1.4). Lo enunciamos aquí para dar una caracterización completa en el contexto de espacios ℓ_p.

Proposición 2.2.4. *Sean $p \geq 2$ y $1 \leq q \leq \infty$. Entonces,*

$$\ell_n(\mathcal{E}; p, q) = \ell_q \,.$$

Observación 2.2.5. Como consecuencia de la Proposición 2.2.4, puede verse que la identificación canónica entre operadores n-lineales y formas $(n+1)$-lineales no preserva la extendibilidad (a diferencia de lo que ocurre con los operadores nucleares e integrales). En efecto, si consideramos $p = q = 2$, de la Proposición 2.2.4 tenemos que $\ell_n(\mathcal{E}; 2, 2) = \ell_2$, mientras que del Teorema 2.1.6 se tiene que $\ell_{n+1}(\mathcal{E}; 2) = \ell_1$. Luego, tomando una sucesión $\alpha \in \ell_2 \setminus \ell_1$, obtenemos un operador n-lineal $T_\alpha \in \mathcal{L}(^n\ell_2; \ell_2)$ que es extendible pero su forma $(n+1)$-lineal asociada —$\phi_\alpha \in \mathcal{L}(^{n+1}\ell_2)$— no lo es.

Si $p = 1$, también podemos describir con exactitud el espacio $\ell_n(\mathcal{E}; p, q)$ como consecuencia del Lema 2.1.4:

Proposición 2.2.6. *Todo operador n-lineal de $\ell_1 \times \cdots \times \ell_1$ en ℓ_q ($1 \leq q \leq \infty$) es extendible:*

$$\ell_n(\mathcal{E}; 1, q) \overset{1}{=} \ell_\infty \,.$$

Demostración. Dado $T_\alpha \in \mathcal{L}(^n\ell_1; \ell_q)$, consideramos la forma $(n+1)$-lineal diagonal asociada $\phi_\alpha : \ell_1 \times \cdots \times \ell_1 \times \ell_{q'} \to \mathbb{K}$. Del Lema 2.1.4, se tiene que ϕ_α es extendible y, en consecuencia, T_α resulta extendible. Además, usando la factorización dada en la prueba del Lema 2.1.4 y la identidad (2.10), concluimos que

$$\|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(^n\ell_1;\ell_q)} \leq \|T_\alpha\|_{\mathcal{E}(^n\ell_1;\ell_q)} \leq \|\phi_\alpha\|_{\mathcal{E}(\ell_1,\ldots,\ell_1,\ell_{q'})} \leq \|D_\alpha\|_{\mathcal{L}(\ell_1;\ell_1)} = \|\alpha\|_\infty = \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(^n\ell_1;\ell_q)}.$$

$\square$

Hasta ahora, hemos podido dar una descripción del espacio $\ell_n(\mathcal{E}; p, q)$ para $p = 1$ y para $p \geq 2$. Para $1 < p < 2$, caracterizamos con exactitud dicho espacio sólo en los casos $q = 1$ y $q > p'$. Para los casos restantes ($1 < p < 2$ y $1 < q \leq p'$) logramos dar una *estimación* del espacio $\ell_n(\mathcal{E}; p, q)$, como muestra la siguiente proposición.

Proposición 2.2.7. *Sea $1 < p < 2$.*

1. *Para $q = 1$, $\ell_n(\mathcal{E}; p, 1) = \ell_{\frac{p'}{2}}$.*
2. *Para $q > p'$, $\ell_n(\mathcal{E}; p, q) = \ell_q$.*

3. Para $1 < q \leq p'$, $\ell_n(\mathcal{E}; p, q) \subseteq \ell_{p'+\varepsilon}$, *para todo* $\varepsilon > 0$.

Demostración. 1. Sea $\alpha \in \ell_{\frac{p'}{2}}$. Aplicando el argumento usado en la demostración de la Proposición 2.1.5, se tiene que $\phi_\alpha : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \times \ell_\infty \to \mathbb{K}$ es extendible con norma extendible menor o igual que $\|\alpha\|_{\ell_{\frac{p'}{2}}}$. Entonces, $T_\alpha : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \to \ell_1$ es extendible y $\|T_\alpha\|_{\mathcal{E}(^n\ell_p;\ell_1)} \leq \|\phi_\alpha\|_{\mathcal{E}(\ell_p,\ldots,\ell_p,\ell_\infty)} \leq \|\alpha\|_{\ell_{\frac{p'}{2}}}$.

Recíprocamente, supongamos que $T_\alpha \in \mathcal{E}(^n\ell_p;\ell_1)$. Entonces, para todo $\beta \in \ell_\infty$, se tiene que $D_\beta \circ T_\alpha = \phi_{\alpha\cdot\beta} \in \mathcal{E}(^n\ell_p)$. Luego, por la Proposición 2.1.5 se deduce que $\alpha \cdot \beta$ pertenece a $\ell_{\frac{p'}{2}}$. Como esto se cumple para todo $\beta \in \ell_\infty$, podemos concluir que $\alpha \in \ell_{\frac{p'}{2}}$.

2. Para demostrar este ítem, vamos a usar [BP09, Proposition 3.4], que dice que si un espacio de Banach Y tiene cotipo $q > 2$ y $r < q$, entonces todo operador mutlilineal extendible de $X_1 \times \cdots \times X_n$ en Y es absolutamente (q, r)-sumante. Ahora bien, como $q > p'$ y $p < 2$ tenemos que ℓ_q tiene cotipo $q > 2$. Luego, $T_\alpha \in \mathcal{E}(^n\ell_p;\ell_q)$ resulta absolutamente (q, p')-sumante. Es decir, para todo $N \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha(k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{N} \|T_\alpha(e_k,\ldots,e_k)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \pi_{(q,p')}(T) \cdot w_{p'}\left((e_k)_{k=1}^N\right)^n = \pi_{(q,p')}(T),$$

por lo que $\alpha \in \ell_q$. La inclusión recíproca vale en un contexto general de espacios de sucesiones y la vamos a demostrar en el capítulo siguiente (ver Lema 3.1.3).

3. En este caso vamos a aplicar [BMP10, Proposition 5.3], que dice que si un espacio de Banach Y tiene cotipo finito, entonces para $r > q$ y $s < r$, todo operador multilineal extendible $X_1 \times \cdots \times X_n$ en Y es absolutamente (q, s)-sumante.

En nuestro caso como $q \leq p'$ y $1 < p$, tenemos que ℓ_q tiene cotipo finito $\text{máx}\{2, q\}$. Tomando $r = p' + \varepsilon \geq p' \geq q$ y $s = p' < r$, tenemos que $T_\alpha \in \mathcal{E}(^n\ell_p;\ell_q)$ es absolutamente $(p' + \varepsilon, p')$-sumante, para todo $\varepsilon > 0$. Es decir, para todo $N \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha(k)|^{p'+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p'+\varepsilon}} &= \left(\sum_{k=1}^{N} \|T_\alpha(e_k,\ldots,e_k)\|^{p'+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p'+\varepsilon}} \\ &\leq \pi_{(p'+\varepsilon,p')}(T) \cdot w_{p'}\left((e_k)_{k=1}^N\right)^n = \pi_{(p'+\varepsilon,p')}(T).\end{aligned}$$

Luego, $\alpha \in \ell_{p'+\varepsilon}$. □

A continuación, resumimos los resultados obtenidos a lo largo de esta sección en el siguiente teorema. Recordemos que definimos los números s y t de la siguiente manera

$$s = \left(\frac{1}{q} - \frac{n}{p}\right)^{-1}$$

$$t = \text{máx}\left\{\left(\frac{n}{p'} + \frac{1}{q}\right)^{-1}, 1\right\}$$

Teorema 2.2.8. *Sea $n \geq 1$, se tiene que*

1. *Para $p = 1$,*

   a) *si $1 \leq q < \infty$, entonces*

$$\ell_n(\mathcal{N}; 1, q) = \ell_n(\mathcal{I}; 1, q) = \ell_q \subsetneq \ell_\infty = \ell_n(\mathcal{E}; 1, q) = \ell_n(\mathcal{L}; 1, q)\,;$$

   b) *si $q = \infty$, entonces*

$$\ell_n(\mathcal{N}; 1, \infty) = c_0 \subsetneq \ell_\infty = \ell_n(\mathcal{I}; 1, \infty) = \ell_n(\mathcal{E}; 1, \infty) = \ell_n(\mathcal{L}; 1, \infty)\,.$$

2. *Para $1 < p < 2$,*

   a) *si $q = 1$, entonces*

$$\ell_n(\mathcal{N}; p, 1) = \ell_n(\mathcal{I}; p, 1) = \ell_1 \subsetneq \ell_{\frac{p'}{2}} = \ell_n(\mathcal{E}; p, 1) \subsetneq \ell_\infty = \ell_n(\mathcal{L}; p, 1)\,;$$

   b) *si $p' < q < \infty$, entonces*

$$\ell_n(\mathcal{N}; p, q) = \ell_n(\mathcal{I}; p, q) = \ell_t \subsetneq \ell_q = \ell_n(\mathcal{E}; p, q) \subsetneq \ell_\infty = \ell_n(\mathcal{L}; p, q)\,;$$

   c) *si $1 < q \leq p'$, entonces, para todo $\varepsilon > 0$,*

$$\ell_n(\mathcal{N}; p, q) = \ell_n(\mathcal{I}; p, q) = \ell_t \subsetneq \ell_q \subseteq \ell_n(\mathcal{E}; p, q) \subseteq \ell_{p'+\varepsilon} \subsetneq \ell_\infty = \ell_n(\mathcal{L}; p, q)\,;$$

   d) *si $q = \infty$, entonces*

$$\ell_n(\mathcal{N}; p, \infty) = \ell_n(\mathcal{I}; p, \infty) = \ell_t \subsetneq \ell_\infty = \ell_n(\mathcal{E}; p, \infty) = \ell_n(\mathcal{L}; p, \infty)\,.$$

3. *Para $2 \leq p < \infty$,*

   a) *si $q = 1$, entonces*

$$\ell_n(\mathcal{N}; p, 1) = \ell_n(\mathcal{I}; p, 1) = \ell_n(\mathcal{E}; p, 1) = \ell_1 \subsetneq \ell_n(\mathcal{L}; p, 1) = \ell_\infty \text{ o } \ell_s\,;$$

   b) *si $1 < q < \infty$, entonces*

$$\ell_n(\mathcal{N}; p, q) = \ell_n(\mathcal{I}; p, q) = \ell_1 \subsetneq \ell_n(\mathcal{E}; p, q) = \ell_q \subsetneq \ell_n(\mathcal{L}; p, q) = \ell_\infty \text{ o } \ell_s\,;$$

   c) *si $q = \infty$, entonces*

$$\ell_n(\mathcal{N}; p, \infty) = \ell_n(\mathcal{I}; p, \infty) = \ell_1 \subsetneq \ell_\infty = \ell_n(\mathcal{E}; p, \infty) = \ell_n(\mathcal{L}; p, \infty)\,.$$

4. *Para $p = \infty$*

a) *si* $q = 1$, *entonces*

$$\ell_n(\mathcal{N};\infty,1) = \ell_n(\mathcal{I};\infty,1) = \ell_n(\mathcal{E};\infty,1) = \ell_n(\mathcal{L};\infty,1) = \ell_1\,;$$

b) *si* $1 < q \leq \infty$, *entonces*

$$\ell_n(\mathcal{N};\infty,q) = \ell_n(\mathcal{I};\infty,q) = \ell_1 \subsetneq \ell_q = \ell_n(\mathcal{E};\infty,q) = \ell_n(\mathcal{L};\infty,q)\,.$$

A pesar de que no logramos describir con exactitud el espacio $\ell_n(\mathcal{E};p,q)$ para todos los valores de p, q y n, los resultados obtenidos nos permiten comparar en todos los casos si las inclusiones

$$\ell_n(\mathcal{I};p,q) \subseteq \ell_n(\mathcal{E};p,q) \subseteq \ell_n(\mathcal{L};p,q)$$

son estrictas o no. Dichas comparaciones se resumen en el siguiente cuadro:

$\ell_n(\mathcal{I};p,q) = \ell_n(\mathcal{E};p,q) = \ell_n(\mathcal{L};p,q)$	$p = 1$	y	$q = \infty$
	$p = \infty$	y	$q = 1$
$\ell_n(\mathcal{I};p,q) = \ell_n(\mathcal{E};p,q) \neq \ell_n(\mathcal{L};p,q)$	$2 \leq p < \infty$	y	$q = 1$
$\ell_n(\mathcal{I};p,q) \neq \ell_n(\mathcal{E};p,q) = \ell_n(\mathcal{L};p,q)$	$p = 1$	y	$1 \leq q < \infty$
	$1 < p < \infty$	y	$q = \infty$
	$p = \infty$	y	$1 < q \leq \infty$
$\ell_n(\mathcal{I};p,q) \neq \ell_n(\mathcal{E};p,q) \neq \ell_n(\mathcal{L};p,q)$	$1 < p < 2$	y	$q = 1$
	$1 < p < \infty$	y	$1 < q < \infty$

Cuadro 2.1:

Capítulo 3

Operadores multilineales diagonales en espacios de sucesiones

El objetivo de este capítulo es estudiar de forma general si determinadas características de los ideales de operadores multilineales actuando en espacios de sucesiones se replican en los respectivos espacios de sucesiones asociados al considerar los elementos diagonales. Más precisamente, nos preguntamos si cada ideal de operadores multilineales maximal/minimal se corresponde con un espacio de sucesiones maximal/minimal. Veremos que si E y F son espacios de sucesiones y $\mathfrak{A}$ es un ideal de operadores multilineales tales que el ideal $\mathfrak{A}$ y el espacio F son maximales/minimales entonces el espacio de sucesiones asociado, $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$, resulta también maximal/minimal. Luego veremos la relación existente entre el espacio de sucesiones asociado a un ideal y el espacio de sucesiones asociado a su adjunto. Por último, daremos aplicaciones de dichos resultados.

3.1. Consideraciones generales

Sean E y F espacios de sucesiones. Recordemos que para nosotros el término *espacio de sucesiones* representa un espacio de Banach de sucesiones que es normal y tal que $\|e_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Un operador n-lineal $T \in \mathcal{L}(^nE; F)$ se dice *diagonal* si existe una sucesión acotada de escalares $\alpha = (\alpha(k))_k$ tal que para todo $x_1, \ldots, x_n \in E$, el operador admite una escritura de la forma

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \cdot x_1 \cdots x_n = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) x_1(k) \cdots x_n(k)\ e_k.$$

En dicho caso, T es el operador multilineal diagonal asociado a la sucesión α y lo notamos T_α. Observemos que también podemos representar a T_α de forma tensorial como

$$T_\alpha = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) \cdot e'_k \otimes \cdots \otimes e'_k \otimes e_k,$$

donde e_k es el k-ésimo vector canónico en el espacio de sucesiones F y $e'_k \in E'$ es el k-ésimo funcional coordenado.

Dado $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores multilineales, definimos el *espacio de sucesiones asociado* al ideal $\mathfrak{A}$ como

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F) := \big\{\alpha \in \ell_\infty : T_\alpha \in \mathfrak{A}(^n E; F)\big\}.$$

Observemos que con esta definición se tiene que $\ell_1(\mathcal{L}; E, F) = M(E, F)$, donde $M(E, F)$ es el espacio de multiplicadores de E en F que definimos en los Preliminares. A continuación, vamos a demostrar que el espacio $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ resulta un espacio de sucesiones con la norma dada por

$$\|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)} := \|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^n E;F)}.$$

Proposición 3.1.1. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales y sean E y F espacios de sucesiones, entonces $\big(\ell_n(\mathfrak{A}; E, F), \|\cdot\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)}\big)$ es un espacio de sucesiones.*

Demostración. Para ver que $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es un espacio de sucesiones, tenemos que ver las siguientes propiedades

1) $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2) $\ell_1 \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathfrak{A}; E, F) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_\infty$.

3) $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es un espacio de Banach.

4) $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es normal.

1) Es trivial ya que $T_{\alpha+\beta} = T_\alpha + T_\beta$ y $T_{\lambda\alpha} = \lambda T_\alpha$.

2) Si $\alpha \in \ell_1$, entonces se tiene que $T_\alpha : E \times \cdots \times E \to F$ está bien definida y es nuclear. Pues si consideramos $x_1, \ldots, x_n \in E$, vale que $T_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \cdot x_1 \cdots x_n \in \ell_1 \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} F$. Por otro lado, la escritura de T_α como operador n-lineal diagonal coincide con una representación nuclear (ver 1.1) ya que podemos escribir a T_α como

$$T_\alpha = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\alpha(k) \cdot e'_k) \otimes e'_k \otimes \cdots \otimes e'_k \otimes e_k$$

y se cumple que

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha(k)| \cdot \|e'_k\|^n \cdot \|e_k\| = \|\alpha\|_{\ell_1} < \infty.$$

Entonces, por la Observación 1.2.6, se tiene que $T_\alpha \in \mathfrak{A}(^n E; F)$ y además

$$\|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^n E;F)} \leq \|T_\alpha\|_{\mathcal{N}(^n E;F)} \leq \|\alpha\|_{\ell_1}.$$

Además, si $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$, la Observación 1.2.6, nos dice que $T_\alpha \in \mathcal{L}(^nE; F)$ y que cumple

$$\begin{aligned}\|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)} \geq \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(^nE;F)} &= \sup_{x_1,\ldots,x_n \in B_E} \|T_\alpha(x_1,\ldots,x_n)\|_F \\ \geq \sup_{x_1,\ldots,x_n \in B_E} \|T_\alpha(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty &= \sup_{x_1,\ldots,x_n \in B_E} \sup_{k\in\mathbb{N}} |\alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k)|.\end{aligned}$$

Tomando $x_1 = \cdots = x_n = e_k \in B_E$, resulta que $\|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)} \geq |\alpha(k)|$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, $\alpha \in \ell_\infty$ y $\|\alpha\|_\infty \leq \|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)}$.

3) Basta ver que $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es cerrado. Consideremos el subespacio de $\mathfrak{A}(^nE; F)$ dado por

$$\mathfrak{A}_d(^nE; F) := \{T \in \mathfrak{A}(^nE; F) : T = T_\alpha \ \text{ para algún } \alpha\},$$

con la norma inducida como subespacio de $\mathfrak{A}(^nE; F)$. Luego, la aplicación que manda cada $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ en el respectivo $T_\alpha \in \mathfrak{A}_d(^nE; F)$ resulta un isomorfismo isométrico. Por tanto, es suficiente ver que $\mathfrak{A}_d(^nE; F)$ resulta un subespacio cerrado de $\mathfrak{A}(^nE; F)$. Para esto, tomemos una sucesión $(\alpha_m)_m \subseteq \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ tal que $T_{\alpha_m} \to S$ en $\mathfrak{A}(^nE; F)$ y veamos que $S \in \mathfrak{A}_d(^nE; F)$. En efecto, de la siguiente identidad

$$\begin{aligned}T_{\alpha_m}(x_1,\ldots,x_n) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_m(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k) \cdot e_k \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} x_1(k) \cdots x_n(k) \cdot T_{\alpha_m}(e_k,\ldots,e_k)\end{aligned}$$

y tomando límite en ambos miembros, se deduce que

$$S(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} x_1(k) \cdots x_n(k) \cdot S(e_k,\ldots,e_k).$$

Es decir, $S \in \mathfrak{A}_d(^nE; F)$ pues es el operador diagonal asociado a la sucesión $\alpha(k) = S(e_k,\ldots,e_k)$.

4) Sean $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ y $\beta \in \omega$ tales que $|\beta(k)| \leq |\alpha(k)|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Afirmamos que el operador diagonal $T_\beta : E \times \cdots \times E \to F$ está bien definido. En efecto, dados $x_1,\ldots,x_n \in E$, vale que $|\beta(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k)| \leq |\alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k)|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego, como F es normal y $\alpha \cdot x_1 \cdots x_n \in F$, resulta que $\beta \cdot x_1 \cdots x_n$ también pertenece a F. Ahora bien, tomemos la sucesión γ definida como

$$\gamma(k) = \begin{cases} \beta(k)/\alpha(k) & \text{si } \alpha(k) \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha(k) = 0 \end{cases}$$

y consideremos $D_\gamma : F \to F$ el operador lineal diagonal asociado a γ. La normalidad de F implica que D_γ está bien definido con $\|\gamma \cdot x\|_F \leq \|\gamma\|_\infty \cdot \|x\|_F$ para todo $x \in F$, ya que la sucesión $\|\gamma\|_\infty \cdot x$ pertenece a F y verifica para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$|(\gamma \cdot x)(k)| = |\gamma(k) \cdot x(k)| \leq \|\gamma\|_\infty \cdot |x(k)| = |(\|\gamma\|_\infty \cdot x)(k)|.$$

Esto nos dice que $\|D_\gamma\|_{\mathcal{L}(F)} \leq \|\gamma\|_\infty \leq 1$. Como $\gamma \cdot \alpha = \beta$ (recordar que $\alpha(k) = 0$ implica $\beta(k) = 0$ ya que $|\beta(k)| \leq |\alpha(k)|$ para todo $k \in \mathbb{N}$), se deduce que $T_\beta = D_\gamma \circ T_\alpha$ y por lo tanto $T_\beta \in \mathfrak{A}(^nE; F)$ con

$$\|T_\beta\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)} \leq \|D_\gamma\| \cdot \|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)} \leq \|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)}.$$

$\square$

A continuación, daremos algunas consideraciones básicas, pero importantes, a la hora de trabajar con espacios de dimensión finita. Fijaremos algunas notaciones que usaremos hasta el final de este capítulo. Recordemos que llamamos $E_N = span\{e_1, \dots, e_N\} \subseteq E$, $E_0 = span\{e_k : k \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ y que notamos con $i_N : E_N \hookrightarrow E$ a la inclusión canónica y con $\pi_N : E \to E_N$ a la proyección canónica sobre las primeras N-coordenadas. Si consideramos una sucesión finita, dicha sucesión pertenece a todos los espacios de sucesiones, lo que podría modificarse es su norma vista en los distintos espacios de sucesiones. Por ejemplo, si consideramos la sucesión finita $\alpha = e_1 + e_2$, se tiene que $\|\alpha\|_{\ell_p} = 2^{1/p}$ para cada $1 \leq p < \infty$.

Si $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$, entonces $\pi_N(\alpha)$ pertenece a $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)_N$ por definición. Ahora bien, $T_{\pi_N(\alpha)} \in \mathfrak{A}(^nE; F)$ está dado por

$$T_{\pi_N(\alpha)} = \sum_{k=1}^{N} \alpha(k) \cdot e'_k \otimes \cdots \otimes e'_k \otimes e_k.$$

Notemos entonces que su imagen pertenece a $span\{e_1, \dots, e_N\}$, por lo que podemos pensar que $T_{\pi_N(\alpha)}$ pertenece a $\mathfrak{A}(^nE; F_N)$. Consideremos la siguiente composición, que nos vuelve a dar $T_{\pi_N(\alpha)}$

$$\begin{array}{ccccccc} E_N & \times & \cdots & \times & E_N & & \\ \downarrow{\scriptstyle i_N^E} & & & & \downarrow{\scriptstyle i_N^E} & & \\ E & \times & \cdots & \times & E & \xrightarrow{T_{\pi_N(\alpha)}} F \xrightarrow{\pi_N^F} & F_N. \end{array}$$

Entonces, $T_{\pi_N(\alpha)} \in \mathfrak{A}(^nE_N; F_N)$ y además $\|T_{\pi_N(\alpha)}\|_{\mathfrak{A}(^nE_N;F_N)} \leq \|T_{\pi_N(\alpha)}\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)}$. En otras palabras, $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)_N \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathfrak{A}; E_N, F_N)$.

Notemos que en todos los casos llamamos al operador de la misma manera sin importar cuales son los espacios de salida ni de llegada. Nuestro objetivo es comparar su norma vista en distintos espacios.

Por otro lado, si $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E_N, F_N)$, entonces α coincide con $\pi_N(\alpha)$ y $T_{\pi_N(\alpha)}$ pertenece a $\mathfrak{A}(^nE_N; F_N)$. Ahora, la composición

$$\begin{array}{ccccccc} E & \times & \cdots & \times & E & & \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_N} & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_N} & & \\ E_N & \times & \cdots & \times & E_N & \xrightarrow{T_{\pi_N(\alpha)}} F_N \xrightarrow{i_N^F} & F \end{array}$$

nos dice que $T_{\pi_N(\alpha)}$ pertenece a $\mathfrak{A}(^n E; F)$ y además $\|T_{\pi_N(\alpha)}\|_{\mathfrak{A}(^n E;F)} \leq \|T_{\pi_N(\alpha)}\|_{\mathfrak{A}(^n E_N;F_N)}$. En definitiva, tenemos la siguiente identidad

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)_N \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}; E_N, F_N).$$

Observemos también que, como E_N es un espacio de dimensión finita, vale que $E_N \overset{1}{=} E_N'' \overset{1}{=} E_N^{\times\times}$. Esto nos permite reemplazar, en la identidad anterior, cada espacio de dimensión finita por su bidual de Köthe. Es decir,

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)_N \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}; E_N, F_N) \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}; E_N^{\times\times}, F_N^{\times\times}) \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}; E^{\times\times}, F^{\times\times})_N. \tag{3.1}$$

Por último, recordemos para espacios de dimensión finita se tiene que

$$\mathfrak{A}(E_N; F_N) \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{max}(E_N; F_N) \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}(E_N; F_N).$$

Luego, en la identidad (3.1) podemos reemplazar $\mathfrak{A}$ por $\mathfrak{A}^{max}$ o $\mathfrak{A}^{min}$ indistintamente. Es decir,

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E_N, F_N) \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{max}; E_N, F_N) \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E_N, F_N). \tag{3.2}$$

Una vez analizado el comportamiento de los espacios de sucesiones asociados a ideales de operadores multilineales en espacios de dimensión finita, presentamos una inclusión general que relaciona espacios de sucesiones asociados a ideales de operadores multilineales con un espacio de multiplicadores.

Proposición 3.1.2. *Sean E y F espacios de sucesiones y $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales. Entonces*

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} M(F^\times, \ell_n(\mathfrak{A}; E)). \tag{3.3}$$

Demostración. Sea $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$, veamos que $\alpha \cdot \beta \in \ell_n(\mathfrak{A}; E)$ para todo $\beta \in F^\times$. En otras palabras, queremos ver que la forma n-lineal asociada a $\alpha \cdot \beta$ —que notamos $\phi_{\alpha\cdot\beta}$— pertenece a $\mathfrak{A}(^n E)$ para todo $\beta \in F^\times$. Para $\beta \in F^\times$, consideramos $\varphi_\beta \in F'$ la funcional lineal definida en la Proposición 1.3.3. Es decir, la funcional lineal definida por

$$\varphi_\beta(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \beta(k) \cdot x(k).$$

Si componemos la funcional φ_β con el operador n-lineal diagonal asociado a α, obtenemos la forma n-lineal diagonal asociada a $\alpha \cdot \beta$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta \circ T_\alpha(x_1, \ldots, x_n) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k) \cdot \varphi_\beta(e_k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha(k) \cdot \beta(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k) \\
&= \phi_{\alpha\cdot\beta}(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Luego, la forma n-lineal $\phi_{\alpha\cdot\beta}$ pertenece a $\mathfrak{A}(^nE)$ y por la Proposición 1.3.3 tenemos que

$$\|\phi_{\alpha\cdot\beta}\|_{\mathfrak{A}(^nE)} \leq \|\varphi_\beta\|_{F'} \cdot \|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)} = \|\beta\|_{F^\times} \cdot \|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{M(F^\times,\ell_n(\mathfrak{A};E))} &= \sup_{\beta\in B_{F^\times}} \|\alpha\cdot\beta\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E)} \\ &\leq \sup_{\beta\in B_{F^\times}} \|\beta\|_{F^\times} \cdot \|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)} = \|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)}. \end{aligned}$$

□

A continuación, vamos a proceder a calcular el espacio de sucesiones asociado al ideal de operadores multilineales extendibles. El resultado que demostraremos generaliza la Proposición 2.2.4 que enunciamos en el capítulo anterior. De este modo, la Proposición 2.2.4 se obtiene de la Proposición 3.1.4 ya que el espacio ℓ_q es maximal para todo $1 \leq q \leq \infty$.

Lema 3.1.3. *Sean E y F espacios de sucesiones. Si $\alpha \in F$, entonces el operador n-lineal diagonal $T_\alpha : E \times \cdots \times E \to F$ es extendible, y su norma extendible es menor o igual que $\|\alpha\|_F$. En otras palabras,*

$$F \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathcal{E}; E, F).$$

Demostración. Tomemos $\alpha \in F$ y factoricemos T_α como

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "i"'] & \times & \dots & \times & E \arrow[d, "i"'] \arrow[r, "T_\alpha"] & F, \\ \ell_\infty & \times & \dots & \times & \ell_\infty \arrow[ur, "S_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

donde i es la inclusión natural de E en ℓ_∞ y S_α es simplemente T_α actuando en $\ell_\infty \times \cdots \times \ell_\infty$. Como ℓ_∞ tiene la propiedad de extensión métrica (metric extension property, ver definición en Apéndice A.2), se tiene que S_α es extendible y $\|S_\alpha\|_{\mathcal{E}(^n\ell_\infty;F)} = \|S_\alpha\|_{\mathcal{L}(^n\ell_\infty;F)} = \|\alpha\|_F$. Luego, $T_\alpha \in \mathcal{E}(^nE;F)$ y $\|T_\alpha\|_{\mathcal{E}(^nE;F)} \leq \|S_\alpha\|_{\mathcal{E}(^n\ell_\infty;F)} \cdot \|i\|^n = \|\alpha\|_F$. □

En particular, si $E = \ell_p$ y $F = \ell_q$, tenemos que $\ell_q \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathcal{E}; p, q)$. Este hecho fue enunciado sin demostración en la prueba del punto *2* de la Proposición 2.2.7.

Proposición 3.1.4. *Sean $p \geq 2$ y F un espacio de sucesiones maximal. Entonces, el operador n-lineal diagonal $T_\alpha : \ell_p \times \cdots \times \ell_p \to F$ es extendible si y solo si $\alpha \in F$.*
En otras palabras,

$$\ell_n(\mathcal{E}; p, F) = F\,.$$

Demostración. La inclusión de F en el espacio de sucesiones asociado vale de manera general como muestra el Lema 3.1.3. Para ver la inclusión inversa, como $p \geq 2$ y F es maximal, por las Proposiciones 2.1.2 y 3.1.2 y el Lema 3.1.3, se tiene que

$$F \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathcal{E}; \ell_p, F) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} M(F^\times, \ell_n(\mathcal{E}; \ell_p)) = M(F^\times, \ell_1) \overset{1}{=} F^{\times\times} \overset{1}{=} F.$$

□

En la demostración de la Proposición 2.1.2 (que se encuentra en [CDS06, Proposition 3.1]), se usa que toda forma n-lineal extendible es absolutamente $(1,2)$-sumante [PG06, Corollary 2.5]. En dicho resultado, se prueba además que la norma de la inclusión es menor o igual a K_G^{n-1}, donde K_G es la constante de la desigualdad Grothendieck. En consecuencia, si $\alpha \in \ell_n(\mathcal{E}; p, F)$, entonces

$$\|\alpha\|_F \leq K_G^{n-1} \cdot \|\alpha\|_{\ell_n(\mathcal{E};p,F)}.$$

Notemos que, si consideramos un espacio de sucesiones arbitrario F (no necesariamente maximal), el argumento usado en la prueba de la proposición anterior nos daría las siguientes inclusiones

$$F \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathcal{E}; p, F) \hookrightarrow F^{\times\times}.$$

Además, el resultado de la Proposición 2.1.2 usada en la prueba sigue siendo cierto si cambiamos el espacio ℓ_p con $p \geq 2$ por cualquier espacio de sucesiones 2-convexo E. Luego, la Proposición 3.1.4 también es válida para operadores multilineales diagonales de $E \times \cdots \times E$ en un espacio de sucesiones maximal F. Por ejemplo, se puede aplicar cuando E es el espacio de Lorentz $d(w,p)$ con $p \geq 2$ (ver definición en 3.4.6).

En general, la inclusión (3.3) es estricta. Veamos, a continuación, dos ejemplos que lo muestran. El primer ejemplo que consideramos es el ideal de operadores n-lineales extendibles $\mathcal{E}$ con $p = 3/2$ y $q = 4$. Como $1 < p < 2$ y $q > p' = 3$, del ítem 2 de la Proposición 2.2.7 se tiene que

$$\ell_n(\mathcal{E}; \ell_{\frac{3}{2}}, \ell_4) = \ell_4,$$

mientras que de la Proposición 2.1.5 (como $1 < \frac{3}{2} < 2$) se deduce que

$$M(\ell_4^\times, \ell_n(\mathcal{E}; \ell_{\frac{3}{2}})) = M(\ell_{\frac{4}{3}}, \ell_{\frac{3}{2}}) = \ell_\infty.$$

El segundo ejemplo que consideramos es el ideal de operadores n-lineales integrales $\mathcal{I}$ con $p = 1$ y $1 \leq q < \infty$. Por la Proposición 2.2.3 se tiene que

$$\ell_n(\mathcal{I}; \ell_1, \ell_q) = \ell_q,$$

mientras que de la Proposición 2.1.1 se obtiene que

$$M(\ell_q^\times, \ell_n(\mathcal{I}; \ell_1)) = M(\ell_q^\times, \ell_\infty) = \ell_\infty.$$

Sin embargo, si consideramos el ideal de operadores multilineales continuos vale la igualdad (isométrica) si el conjunto de llegada es un dual de Köthe o es un espacio de sucesiones maximal.

Proposición 3.1.5. *Sean E y F espacios de sucesiones. Entonces*

$$\ell_n(\mathcal{L}; E, F^\times) \overset{1}{=} M(F, \ell_n(\mathcal{L}; E)).$$

En particular, si F es maximal tenemos que

$$\ell_n(\mathcal{L}; E, F) \overset{1}{=} M(F^\times, \ell_n(\mathcal{L}; E)).$$

Demostración. Por un lado, de la Proposición 3.1.2 y usando que $F \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} F^{\times\times}$, se tiene que

$$\ell_n(\mathcal{L}; E, F^\times) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} M(F^{\times\times}, \ell_n(\mathcal{L}; E)) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} M(F, \ell_n(\mathcal{L}; E)).$$

Recíprocamente, sea $\alpha \in M(F, \ell_n(\mathcal{L}, E))$. Consideremos $\beta \in F$ y tomemos $\tilde{\beta} = \beta \cdot s$, donde $|s(k)| = 1$ y se cumple que $|\alpha(k) \cdot \beta(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k)| = \alpha(k) \cdot \tilde{\beta}(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces $\alpha \cdot \tilde{\beta} \in \ell_n(\mathcal{L}; E)$ y, en consecuencia, dados $x_1, \ldots, x_n \in E$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\|T_\alpha(x_1, \ldots, x_n) \cdot \beta\|_1 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k) \cdot \beta(k)| \\
&= \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) \cdot \tilde{\beta}(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k) \right| \\
&\leq \|\phi_{\alpha \cdot \tilde{\beta}}\|_{\mathcal{L}(^nE)} \cdot \|x_1\|_E \cdots \|x_n\|_E < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo que T_α está bien definido de $E \times \cdots \times E$ en $F^\times$ y además $T_\alpha \in \mathcal{L}(^nE; F^\times)$. Para finalizar, usando la descripción de la norma en $F^\times$ dada en la ecuación (1.8), podemos ver que la identidad que estamos demostrando es isométrica. En efecto,

$$\begin{aligned}
\|\alpha\|_{\ell_n(\mathcal{L}; E, F^\times)} &= \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(^nE; F^\times)} = \sup_{x_i \in B_E} \|T_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\|_{F^\times} \\
&= \sup_{x_i \in B_E} \sup_{\beta \in B_F} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) \cdot \beta(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k) \right| \\
&= \sup_{\beta \in B_F} \sup_{x_i \in B_E} \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha(k) \cdot \beta(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k) \right| \\
&= \sup_{\beta \in B_F} \|\phi_{\alpha \cdot \beta}\|_{\mathcal{L}(^nE)} \\
&= \sup_{\beta \in B_F} \|\alpha \cdot \beta\|_{\ell_n(\mathcal{L}; E)} = \|\alpha\|_{M(F, \ell_n(\mathcal{L}; E))}.
\end{aligned}$$

Por último, si F es maximal, vale que $F \overset{1}{=} F^{\times\times}$, entonces

$$\ell_n(\mathcal{L}; E, F) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{L}; E, F^{\times\times}) \overset{1}{=} M(F^\times, \ell_n(\mathcal{L}; E)).$$

$\square$

Observemos que la condición de que F sea maximal es necesaria para que valga que la identidad $\ell_n(\mathcal{L}; E, F) \overset{1}{=} M(F^\times, \ell_n(\mathcal{L}; E))$, pues si consideramos $E = \ell_\infty$ y $F = c_0$, tenemos que

$$\ell_n(\mathcal{L}; \ell_\infty, c_0) = c_0 \neq M(\ell_1; \ell_n(\mathcal{L}; \ell_\infty)) = M(\ell_1, \ell_1) = \ell_\infty.$$

Corolario 3.1.6. *Si E es n-cóncavo, entonces $\ell_n(\mathcal{L}; E, F) \overset{1}{=} \ell_\infty$.*

Demostración. En [CDS09, Remark 2.1], se prueba que si E es n-cóncavo, entonces $\ell_n(\mathcal{L}; E) = \ell_\infty$. Luego $\ell_n(\mathcal{L}; E, F) \overset{1}{=} M(F^\times, \ell_n(\mathcal{L}; E)) \overset{1}{=} M(F^\times, \ell_\infty) \overset{1}{=} \ell_\infty$. □

Sea E un espacio de sucesiones y sea $0 < r < \infty$ tal que $M^{(\text{máx}(1,r))}(E) = 1$ (es decir, E es $\text{máx}(1, r)$-convexo con constante de convexidad igual a uno). Se define la *potencia* r del espacio de sucesiones E como

$$E^r := \{x \in \ell_\infty \ : \ |x|^{1/r} \in E\},$$

con la norma dada por

$$\|x\|_{E^r} := \| \ |x|^{1/r} \ \|_E^r,$$

donde $|x|^{1/r} = (|x(k)|^{1/r})_{k \in \mathbb{N}}$.
En estas condiciones, E^r resulta un espacio de sucesiones $\frac{1}{\text{mín}(1,r)}$-convexo. Además, si E es maximal, E^r también es maximal [DMM02].

Observemos que, como E es normal, tanto en la definición de E^r como en la de la norma, podemos reemplazar $|x|^{1/n}$ por $x^{1/n}$ ya que $x \in E$ si y solo si $|x| \in E$. Notemos también que si $x_1, \ldots, x_n \in B_E$, entonces su producto $x_1 \cdots x_n \in B_{E^n}$. En efecto, la desigualdad

$$(|x_1 \cdots x_n|)^{1/n} \leq \frac{|x_1| + \cdots + |x_n|}{n}$$

implica que $(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \in E$. Además,

$$\begin{aligned} \|x_1 \cdots x_n\|_{E^n} &= \|(|x_1 \cdots x_n|)^{1/n}\|_E^n \leq \left\| \frac{|x_1| + \cdots + |x_n|}{n} \right\|_E^n \\ &\leq \left(\frac{\|x_1\|_E + \cdots + \|x_n\|_E}{n} \right)^n \leq 1 \end{aligned}$$

En el caso que el espacio E es n-convexo, podemos dar una identificación entre el espacio de sucesiones asociado al ideal de operadores n-lineales continuos de $E \times \cdots \times E$ en F y cierto espacio de multiplicadores donde solo están involucrados los espacios E y F.

Proposición 3.1.7. *Sea E un espacio de sucesiones n-convexo con constante de convexidad $M^{(n)}(E) = 1$. Entonces, para cualquier espacio de sucesiones F,*

$$\ell_n(\mathcal{L}; E, F) \overset{1}{=} M(E^n, F).$$

Demostración. Sea $\alpha \in \ell_n(\mathcal{L}; E, F)$, tomemos $x \in E^n$, por lo que $x^{1/n} \in E$, entonces

$$T_\alpha(x^{1/n}, \ldots, x^{1/n}) = \alpha \cdot x^{1/n} \cdots x^{1/n} = \alpha \cdot x \in F.$$

Luego, $\alpha \in M(E^n, F)$ y además

$$\begin{aligned}\|\alpha\|_{M(E^n,F)} &= \sup_{x \in B_{E^n}} \|\alpha \cdot x\|_F = \sup_{x \in B_{E^n}} \|T_\alpha(x^{1/n}, \ldots, x^{1/n})\|_F \\ &\leq \sup_{x \in B_{E^n}} \|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(^nE;F)} \cdot \|x^{1/n}\|_E^n = \sup_{x \in B_{E^n}} \|\alpha\|_{\ell_n(\mathcal{L};E,F)} \cdot \|x\|_{E^n} = \|\alpha\|_{\ell_n(\mathcal{L};E,F)},\end{aligned}$$

es decir, $\ell_n(\mathcal{L}; E, F) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} M(E^n, F)$.

Recíprocamente, sea $\alpha \in M(E^n, F)$. Tomamos $x_1, \ldots, x_n \in E$, como el producto $x_1 \cdots x_n \in E^n$, tenemos que

$$T_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \cdot x_1 \cdots x_n \in F.$$

En consecuencia, T_α está bien definido de $E \times \cdots \times E$ en F. Además,

$$\begin{aligned}\|T_\alpha\|_{\mathcal{L}(^nE;F)} &= \sup_{x_i \in B_E} \|T_\alpha(x_1, \ldots, x_n)\|_F = \sup_{x_i \in B_E} \|\alpha \cdot x_1 \cdots x_n\|_F \\ &\leq \sup_{x \in B_{E^n}} \|\alpha \cdot x\|_F = \|\alpha\|_{M(E^n,F)},\end{aligned}$$

como queríamos demostrar. □

Corolario 3.1.8. *Sea E un espacio de sucesiones n-convexo con constante de convexidad $M^{(n)}(E) = 1$. Entonces, para cualquier espacio de sucesiones F,*

$$M(E^n, F^\times) \overset{1}{=} M(F, \ell_n(\mathcal{L}; E)).$$

Demostración. Es consecuencia de las Proposiciones 3.1.5 y 3.1.7 con $F^\times$ en lugar de F. □

Para terminar las consideraciones generales, probemos un resultado sobre la convexidad del espacio de sucesiones asociado al ideal de operadores multilineales continuos. Este resultado lo usaremos en la Sección 3.4.5 para demostrar un teorema de inclusión para el ideal de operadores multilineales (E, p)-dominados.

Proposición 3.1.9. *Sea F un espacio de sucesiones n-convexo con constante de convexidad $M^{(n)}(F) = 1$. Entonces, $\ell_n(\mathcal{L}; E, F)$ es n-convexo con constante de convexidad igual a 1, para todo espacio de sucesiones E.*

Demostración. Para probar que $\ell_n(\mathcal{L}; E, F)$ es n-convexo con constante 1, debemos demostrar que dada una sucesión finita $(\alpha_i)_{i=1}^m \subseteq \ell_n(\mathcal{L}; E, F)$ se tiene que

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^n \right)^{1/n} \right\|_{\ell_n(\mathcal{L};E,F)} \leq \left(\sum_{i=1}^m \|\alpha_i\|_{\ell_n(\mathcal{L};E,F)}^n \right)^{1/n}.$$

Llamemos β a la sucesión en $\ell_n(\mathcal{L}; E, F)$ dada por $\beta = \left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^n\right)^{1/n}$. Por ser F n-convexo con $M^{(n)}(F) = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^n \right)^{1/n} \right\|_{\ell_n(\mathcal{L};E,F)} &= \|T_\beta\|_{\mathcal{L}(^nE;F)} = \sup_{x_i \in B_E} \|T_\beta(x_1, \ldots, x_n)\|_F \\
&= \sup_{x_j \in B_E} \|\beta \cdot x_1 \cdots x_n\|_F = \sup_{x_j \in B_E} \left\| \left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i|^n \right)^{1/n} \cdot x_1 \cdots x_n \right\|_F \\
&= \sup_{x_j \in B_E} \left\| \left(\sum_{i=1}^m |\alpha_i \cdot x_1 \cdots x_n|^n \right)^{1/n} \right\|_F \\
&\leq \sup_{x_j \in B_E} \left(\sum_{i=1}^m \|\alpha_i \cdot x_1 \cdots x_n\|_F^n \right)^{1/n} \\
&= \sup_{x_j \in B_E} \left(\sum_{i=1}^m \|T_{\alpha_i}(x_1, \ldots, x_n)\|_F^n \right)^{1/n} = \left(\sum_{i=1}^m \|\alpha_i\|_{\ell_n(\mathcal{L};E,F)}^n \right)^{1/n}
\end{aligned}$$

□

3.2. Relación con Ideales Maximales y Minimales

En esta sección vamos a estudiar la relación existente entre las propiedades de maximalidad y minimalidad de ideales de operadores multilineales y su respectivo espacio de sucesiones asociado. Comencemos relacionando el bidual F'' del espacio de sucesiones F con su "bidual de Köthe" $F^{\times\times}$.

Proposición 3.2.1. *La aplicación $\xi : F'' \to F^{\times\times}$ dada por $\xi(\phi) = (\phi(e'_k))_k$ está bien definida y es continua con norma menor o igual a 1.*

Demostración. Sea $i : F^\times \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} F'$ la inclusión de norma 1 dada en la Proposición 1.3.3 y consideremos $e'_k \in F'$. Entonces, $i(e_k) = e'_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ya que

$$i(e_k)(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} e_k(j) \cdot x(j) = x(k) = e'_k(x).$$

Veamos ahora que ξ está bien definida y es continua con norma menor o igual a 1. Sean $\beta \in F^\times$

y γ la sucesión que cumple$|\beta(k)\cdot\phi(e'_k)| = \gamma(k)\cdot\beta(k)\cdot\phi(e'_k)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} |\beta(k)\cdot\phi(e'_k)| &= \sum_{k=1}^{N} \gamma(k)\cdot\beta(k)\cdot\phi(e'_k) = \phi\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma(k)\cdot\beta(k)\cdot i(e_k)\right) \\
&= \phi\circ i\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma(k)\cdot\beta(k)\cdot e_k\right) \\
&\leq \|\phi\|_{F''}\cdot\|i\|_{\mathcal{L}(F^\times,F')}\cdot\left\|\sum_{k=1}^{N}\gamma(k)\cdot\beta(k)\cdot e_k\right\|_{F^\times} \\
&= \|\phi\|_{F''}\cdot\|\beta\|_{F^\times}.
\end{aligned}$$

Como esto vale para todo $\beta\in F^\times$ y todo $N\in\mathbb{N}$, resulta que $\xi : F''\to F^{\times\times}$ está bien definida y $\|\xi\|\leq 1$. □

Si consideramos $J_F : F\hookrightarrow F''$ la inclusión canónica de F en su bidual, entonces $\xi\circ J_F : F\to F^{\times\times}$ es la inclusión de F en $F^{\times\times}$. En efecto,

$$\xi\circ J_F(e_j) = (J_F(e_j)(e'_k))_k = (e'_k(e_j))_k = e_j.$$

En [CDS09, Proposition 5.5 y 5.6], se prueba que si $\mathfrak{A}$ es un ideal de formas multilineales maximal, entonces vale que $\ell_n(\mathfrak{A};E)\overset{1}{=}\ell_n(\mathfrak{A};E^{\times\times})$ y que $\ell_n(\mathfrak{A};E)\overset{1}{=}\ell_n(\mathfrak{A}^*;E^\times)^\times$. En ambos casos, la herramienta fundamental en la demostración es el uso de [CDS09, Lemma 5.4], que es una versión para formas multilineales diagonales del *density lemma* que puede verse en [DF93, 13.4]. A continuación, damos una nueva versión en el contexto de operadores multilineales diagonales y probamos resultados similares a los obtenidos para formas multilineales diagonales. Esto lo usaremos para demostrar que cierto operador multilineal diagonal pertenece a un ideal maximal sabiendo que sus sumas finitas tienen normas uniformemente acotadas.

Lema 3.2.2. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales maximal y sean E y F espacios de sucesiones. Sea α una sucesión y supongamos que existe $C>0$ tal que la proyección $\pi_N(\alpha)$ satisface que $\|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E_N,F)}\leq C$ para todo $N\in\mathbb{N}$. Entonces, $\alpha\in\ell_n(\mathfrak{A};E,F^{\times\times})$ y además $\|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F^{\times\times})}\leq C$.*

Es decir, si $T_{\pi_N(\alpha)}\in\mathfrak{A}(^nE_N;F)$ tiene norma menor o igual a C para todo $N\in\mathbb{N}$, entonces $T_\alpha\in\mathfrak{A}(^nE;F^{\times\times})$ con norma menor o igual a C.

Demostración. Como $\mathfrak{A}$ es maximal, el Teorema 1.2.3, nos asegura la existencia de una norma tensorial ν tal que $\mathfrak{A}(^nE;F'')\overset{1}{=}(\otimes^nE\otimes F';\nu)'$, por lo que $B_{\mathfrak{A}(^nE;F'')}$ es w^*-compacta. Además, si consideramos la siguiente composición

$$\begin{array}{ccccccc}
E & \times & \cdots & \times & E & & \\
\big\downarrow{\scriptstyle \pi_N} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_N} & & \\
E_N & \times & \cdots & \times & E_N & \xrightarrow{T_{\pi_N(\alpha)}} F & \xrightarrow{J_F} F'',
\end{array}$$

podemos ver que $\|J_F \circ T_{\pi_N(\alpha)} \circ (\pi_N, \ldots, \pi_N)\|_{\mathfrak{A}(^nE;F'')} \leq \|T_{\pi_N(\alpha)}\|_{\mathfrak{A}(^nE_N;F)} \leq C$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Es decir, $J_F \circ T_{\pi_N(\alpha)} \circ (\pi_N, \ldots, \pi_N)$ pertenece a la bola de radio C de $\mathfrak{A}(^nE; F'')$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Luego, el conjunto $\big(J_F \circ T_{\pi_N(\alpha)} \circ (\pi_N, \ldots, \pi_N)\big)_N$ tiene un punto de acumulación respecto a la topología w^*.

Por otro lado, para cada $k \leq N$ vale que $J_F \circ T_{\pi_N(\alpha)} \circ (\pi_N, \ldots, \pi_N)(x_1, \ldots, x_n)(e'_k)$ coincide con $T_\alpha(x_1, \ldots, x_n)(k)$. En efecto, teniendo en cuenta que

$$J_F \circ T_{\pi_N(\alpha)} \circ (\pi_N, \ldots, \pi_N)(x_1, \ldots, x_n)(e'_k) = \big(\xi \circ J_F \circ T_{\pi_N(\alpha)} \circ (\pi_N(x_1), \ldots, \pi_N(x_n))\big)_k,$$

si calculamos

$$\begin{aligned} \xi \circ J_F \circ T_{\pi_N(\alpha)} \circ (\pi_N(x_1), \ldots, \pi_N(x_n)) &= \xi \circ J_F \left(\sum_{k=1}^{N} \alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k) \cdot e_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k) \cdot e_k, \end{aligned}$$

obtenemos $T_{\pi_N(\alpha)}(x_1, \ldots, x_n)$ visto en $F^{\times\times}$.

Entonces, T_α es un punto de acumulación de $\big(J_F \circ T_{\pi_N(\alpha)} \circ (\pi_N, \ldots, \pi_N)\big)_N$. Por lo tanto, $T_\alpha \in \mathfrak{A}(^nE; F^{\times\times})$ con $\|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE,F^{\times\times})} \leq C$. □

En particular, para F maximal (por ejemplo si es el dual de Köte de un espacio de sucesiones), dado un operador multilineal diagonal $T_\alpha : E_0 \times \cdots \times E_0 \to F$ tal que sus truncados satisfacen $\|T_{\pi_N(\alpha)}\|_{\mathfrak{A}(^nE_N;F)} \leq C$ para todo $N \in \mathbb{N}$, se deduce que $T_\alpha \in \mathfrak{A}(^nE; F)$ con $\|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)} \leq C$.

Nuestro objetivo es analizar la relación entre ideales maximales y minimales con sus respectivos espacios de sucesiones asociados. Veremos que si $\mathfrak{A}$ y F son maximales, entonces $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ resulta maximal y que si $\mathfrak{A}$ y F son minimales, entonces $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ resulta minimal.

Proposición 3.2.3. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales maximal y sean E y F espacios de sucesiones. Entonces, $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F^{\times\times})$ es maximal.*

En particular, si $\mathfrak{A}$ y F son maximales, entonces $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es maximal.

Demostración. Para probar que $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F^{\times\times})$ es maximal basta ver que

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F^{\times\times})^{max} \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathfrak{A}; E, F^{\times\times}).$$

Es decir, si $\|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F^{\times\times})} \leq C$ para todo $N \in \mathbb{N}$, entonces $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E, F^{\times\times})$ con $\|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F^{\times\times})} \leq C$. Ahora bien, de la identidad (3.1), obtenemos

$$\|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E_N,F^{\times\times})} = \|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F^{\times\times})} \leq C.$$

Luego, el Lema 3.2.2 nos da el resultado buscado. □

Siendo $\mathfrak{A}$ maximal, la condición de que F sea maximal es necesaria para que $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ resulte maximal. Por ejemplo, si tomamos $\mathfrak{A} = \mathcal{L}$, $E = \ell_\infty$ y $F = c_0$, se deduce que $\ell_n(\mathcal{L}; \ell_\infty, c_0) = c_0$, que obviamente no es maximal.

El siguiente teorema muestra una identidad general que relaciona la maximalidad de un ideal con la maximalidad del espacio de sucesiones asociado.

Teorema 3.2.4. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales y sean E y F espacios de sucesiones. Entonces*

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^{max} \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{max}; E, F^{\times\times}).$$

Demostración. Dada una sucesión α, de las identidades (3.1) y (3.2) se tiene que

$$\|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)} = \|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A}^{max}; E, F^{\times\times})}.$$

Entonces, por la Proposición 1.3.6 deducimos que

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^{max} \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{max}; E, F^{\times\times})^{max}.$$

Como $\mathfrak{A}^{max}$ y $F^{\times\times}$ son maximales, la Proposición 3.2.3 nos dice que

$$\ell_n(\mathfrak{A}^{max}; E, F^{\times\times})^{max} \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{max}; E, F^{\times\times}).$$

En consecuencia,

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^{max} \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{max}; E, F^{\times\times}).$$

□

A continuación, veremos relaciones entre ideales minimales y sus respectivos espacios de sucesiones asociados.

Teorema 3.2.5. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales y sean E y F espacios de sucesiones. Si $\mathfrak{A}$ y F son minimales entonces $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es minimal.*

Recordemos que para probar que $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es minimal, tenemos que ver que $\|\pi_N(\alpha) - \alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)} \to 0$ para todo $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$. Es decir,

$$\|T_{\pi_N(\alpha)-\alpha}\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)} = \|(\pi_N^F - I_F) \circ T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)} \to 0,$$

para todo $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$.

Demostración. Sea $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$, como $\mathfrak{A}$ es minimal podemos factorizar a T_α como

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "A_1"'] & \times & \cdots & \times & E \arrow[d, "A_n"'] \arrow[r, "T_\alpha"] & F \\ X_1 & \times & \cdots & \times & X_n \arrow[r, "S"] & Y, \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

donde $A_1, \ldots, A_n, B$ son operadores lineales aproximables y $S \in \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Por otro lado, $(\pi_N^F - I_F) \circ T_\alpha$ también pertenece a $\mathfrak{A}(^nE; F)$ y

$$(\pi_N^F - I_F) \circ T_\alpha = (\pi_N^F - I_F) \circ B \circ S \circ (A_1, \ldots, A_n).$$

En otras palabras, obtenemos una factorización de $(\pi_N^F - I_F) \circ T_\alpha$ donde $(\pi_N^F - I_F) \circ B \in \overline{\mathfrak{F}}$ y $A_1, \ldots, A_n \in \overline{\mathfrak{F}}$. Entonces,

$$\|(\pi_N^F - I_F) \circ T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)} \leq \|(\pi_N^F - I_F) \circ B\| \cdot \|S\|_{\mathfrak{A}(X_1,\ldots,X_n;Y)} \cdot \|A_1\| \cdots \|A_n\|.$$

Como $B \in \overline{\mathfrak{F}}(Y; F) \subseteq \mathcal{K}(Y; F)$ y π_N^F tiende a I_F sobre compactos (por ser F minimal, ver Teorema 1.3.5.(5)), entonces $\|(\pi_N^F - I_F) \circ B\|$ tiende a cero. Luego,

$$\|(\pi_N^F - I_F) \circ T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE;F)} \to 0$$

y en consecuencia, $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ es minimal como queríamos ver. $\square$

En la siguiente proposición veremos una caracterización del núcleo minimal del espacio de sucesiones asociado a un ideal.

Proposición 3.2.6. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales y sean E y F espacios de sucesiones. Entonces,*

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^{min} \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F^{min}).$$

Demostración. Sea $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^{min}$, entonces $\|\pi_N(\alpha) - \alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)}$ tiende a cero. Por las identidades (3.1) y (3.2) tenemos que

$$\|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)} = \|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A}^{min};E,F^{min})}.$$

Luego, $(\pi_N(\alpha))_N$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $\ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F^{min})$, por lo que converge a una sucesión que coincide con α coordenada a coordenada. En otras palabras, demostramos que $\alpha \in \ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F^{min})$ y además

$$\|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A}^{min};E,F^{min})} \leq \|\pi_N(\alpha) - \alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A}^{min};E,F^{min})} + \|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A}^{min};E,F^{min})},$$

donde el primer término del lado derecho de la desigualdad tiende a cero y el segundo coincide con $\|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)}$, que converge a $\|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)^{min}}$. De lo anterior se concluye que

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^{min} \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F^{min}).$$

Por otro lado, como $\mathfrak{A}^{min}$ y F^{min} son minimales, por el Teorema 3.2.5 tenemos la otra inclusión:

$$\ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F^{min}) \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F^{min})^{min} \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^{min}.$$

$\square$

3.3. Relación con el Ideal Adjunto

En esta sección, veremos la relación entre el espacio de sucesiones asociados a un ideal y el asociado a su adjunto. Comenzamos dando resultados para espacios de dimensión finita.

Proposición 3.3.1. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales y sean E y F espacios de sucesiones. Entonces,*

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E_N, F_N)^\times \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^*; E_N^\times, F_N^\times).$$

Demostración. Notemos que como estamos trabajando con espacios de dimensión finita, el dual de Köthe y el dual (como espacio de Banach) coinciden. Además, si llamamos ν a la norma tensorial asociada a $\mathfrak{A}$, tenemos que

$$\mathfrak{A}^*({}^n E_N^\times; F_N^\times) \overset{1}{=} \left(\bigotimes^n E_N^\times \otimes F_N^{\times\times}, \nu \right)' \overset{1}{=} \mathfrak{A}({}^n E_N^{\times\times}; F_N^{\times\times})' \overset{1}{=} \mathfrak{A}({}^n E_N; F_N)'.$$

La dualidad está dada de la siguiente manera: Dados $T \in \mathfrak{A}({}^n E_N; F_N)$ y $S \in \mathfrak{A}^*({}^n E_N^\times; F_N^\times)$, que se escriben

$$T = \sum_i \gamma_{i,1} \otimes \cdots \otimes \gamma_{i,n} \otimes y_i,$$

con $\gamma_{j,k} \in E_N^\times$ e $y_i \in F_N$ y

$$S = \sum_j x_{j,1} \otimes \cdots \otimes x_{j,n} \otimes y_j^\times,$$

con $x_{j,k} \in E_N$ e $y_j^\times \in F_N^\times$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle S, T \rangle &= \sum_{i,j} \gamma_{i,1}(x_{j,1}) \cdots \gamma_{i,n}(x_{j,n}) \cdot y_j^\times(y_i) \\ &= \sum_i S(\gamma_{i,1}, \ldots, \gamma_{i,n})(y_i) \\ &= \sum_j y_j^\times(T(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n})). \end{aligned}$$

De la dualidad, se obtiene que $|\langle S, T \rangle| \leq \|S\|_{\mathfrak{A}^*({}^n E_N^\times; F_N^\times)} \cdot \|T\|_{\mathfrak{A}({}^n E_N; F_N)}$. Además, si S es diagonal, $S = S_\beta = \sum_{j=1}^N \beta(j) \cdot e_j \otimes \cdots \otimes e_j \otimes e_j^\times$ para alguna sucesión β. Entonces,

$$\langle S_\beta, T \rangle = \sum_{j=1}^N \beta(j) \cdot T(e_j, \ldots, e_j)(j).$$

Notando $D(T) \in \mathfrak{A}({}^n E_N; F_N)$ a la diagonalización de T, definida por

$$D(T) = \sum_{i=1}^N \alpha(i) \cdot e_i^\times \otimes \cdots \otimes e_i^\times \otimes e_i,$$

donde $\alpha(i) = T(e_i, \dots, e_i)(i)$, concluimos que $\langle S_\beta, T\rangle = \langle S_\beta, D(T)\rangle = \sum_{i=1}^N \alpha(i)\cdot\beta(i)$.

Entonces, si $\beta \in \ell_n(\mathfrak{A}; E_N; F_N)^\times$,

$$\begin{aligned}
\|\beta\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E_N,F_N)^\times} &= \sup_{\|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E_N,F_N)}\leq 1} \left|\sum_{i=1}^N \alpha(i)\cdot\beta(i)\right| \\
&= \sup_{\|\alpha\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E_N,F_N)}\leq 1} |\langle S_\beta, T_\alpha\rangle| = \sup_{\|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE_N;F_N)}\leq 1} |\langle S_\beta, T_\alpha\rangle| \\
&\leq \sup_{\|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE_N;F_N)}\leq 1} \|S_\beta\|_{\mathfrak{A}^*(^nE_N^\times;F_N^\times)}\cdot\|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE_N;F_N)} \\
&= \|S_\beta\|_{\mathfrak{A}^*(^nE_N^\times;F_N^\times)} = \|\beta\|_{\ell_n(\mathfrak{A}^*;E_N^\times,F_N^\times)}.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, si $\beta \in \ell_n(\mathfrak{A}^*; E_N^\times, F_N^\times)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\beta\|_{\ell_n(\mathfrak{A}^*;E_N^\times,F_N^\times)} &= \sup_{\|T\|_{\mathfrak{A}(^nE_N;F_N)}\leq 1} |\langle S_\beta, T\rangle| = \sup_{\|T\|_{\mathfrak{A}(^nE_N;F_N)}\leq 1} |\langle S_\beta, D(T)\rangle| \\
&\leq \sup_{\|D(T)\|_{\mathfrak{A}(^nE_N;F_N)}\leq 1} |\langle S_\beta, D(T)\rangle| = \sup_{\|T_\alpha\|_{\mathfrak{A}(^nE_N;F_N)}\leq 1} |\langle S_\beta, T_\alpha\rangle| \\
&= \|\beta\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E_N,F_N)^\times}.
\end{aligned}$$

□

Como consecuencia de la proposición anterior y de la identidad (3.1) tenemos que

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)_N^\times \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}; E_N, F_N)^\times \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^*; E_N^\times, F_N^\times) \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^*; E^\times, F^\times)_N. \tag{3.4}$$

Esto nos permite dar un resultado general que relaciona el espacio de sucesiones asociado a un ideal con el correspondiente asociado a su adjunto.

Proposición 3.3.2. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales y sean E y F espacios de sucesiones. Entonces,*

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^\times \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^*; E^\times, F^\times).$$

Demostración. Para una sucesión α, la identidad (3.4) nos dice

$$\|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)^\times} = \|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A}^*;E^\times,F^\times)}.$$

Entonces,

$$\left(\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^\times\right)^{max} \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^*; E^\times, F^\times)^{max}.$$

Pero $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^\times$ es maximal por ser un dual de Köthe y $\ell_n(\mathfrak{A}^*; E^\times, F^\times)$ es maximal por la Proposición 3.2.3, en consecuencia

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^\times \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^*; E^\times, F^\times).$$

□

Por último, veamos un resultado que nos permitirá dar una relación que nos será de utilidad en el caso que $\mathfrak{A}$ y F sean maximales.

Proposición 3.3.3. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales y sean E y F espacios de sucesiones. Si $\mathfrak{A}$ y F son maximales, entonces,*

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F) \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}; E^{\times\times}, F).$$

Demostración. Como $\mathfrak{A}$ y F son maximales, la Proposición 3.2.3 nos dice que tanto $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F)$ como $\ell_n(\mathfrak{A}; E^{\times\times}, F)$ son maximales. Además, por la identidad (3.1), para cada sucesión α se tiene que

$$\|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E,F)} = \|\pi_N(\alpha)\|_{\ell_n(\mathfrak{A};E^{\times\times},F)},$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F) \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}; E^{\times\times}, F).$$

□

Como consecuencia de las Proposiciones 3.3.3 y 3.3.2 obtenemos que

$$\ell_n(\mathfrak{A}^*; E^\times, F^\times)^\times \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{**}; E^{\times\times}, F^{\times\times}) \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{\text{máx}}; E^{\times\times}, F^{\times\times}) \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{\text{máx}}; E, F^{\times\times}).$$

Luego, si $\mathfrak{A}$ y F son maximales, obtenemos

$$\ell_n(\mathfrak{A}; E, F) \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^*; E^\times, F^\times)^\times. \tag{3.5}$$

3.4. Aplicaciones

3.4.1. Sobre resultados ya obtenidos

Si aplicamos los resultados generales obtenidos en este capítulo sobre las relaciones entre los espacios de sucesiones asociados a ideales de operadores multilineales en espacios de sucesiones al caso particular de los operadores multilineales nucleares e integrales sobre espacios ℓ_p, recuperamos lo desarrollado en el capítulo anterior.

- Para $p > 1$, tenemos que

  $$\ell_n(\mathcal{N}; \ell_p, \ell_q) \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathcal{I}; \ell_p, \ell_q) \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathcal{I}^*; \ell_p^\times, \ell_q^\times)^\times \stackrel{1}{=} \ell_n(\mathcal{L}; \ell_{p'}, \ell_{q'})^\times \stackrel{1}{=} \ell_t,$$

  donde $t = \text{máx}\left\{\left(\frac{n}{p'} + \frac{1}{q}\right)^{-1}, 1\right\}$. La primera igualdad se debe al resultado de Alencar [Ale85a] ya mencionado, la segunda igualdad se obtiene aplicando la ecuación (3.5) para $\mathfrak{A} = \mathcal{I}$ y $F = \ell_q$ ya que son maximales. La tercera igualdad es simplemente usar que $\mathcal{I}^* = \mathcal{L}$ y que $\ell_p^\times = \ell_{p'}$. La última se deriva de la ecuación (2.10).

- Para $p = 1$ y $q < \infty$,

$$\ell_n(\mathcal{I}; \ell_1, \ell_q) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{I}^*; \ell_1^\times, \ell_q^\times)^\times \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{L}; \ell_\infty, \ell_q^\times)^\times \overset{1}{=} (\ell_q^\times)^\times = \ell_q,$$

  que nuevamente resulta de aplicar la ecuación (3.5) para $\mathfrak{A} = \mathcal{I}$ y $F = \ell_q$ y la identidad (2.10). En cuanto al ideal $\mathcal{N}$, lo que se deduce es

$$\ell_n(\mathcal{N}; \ell_1, \ell_q) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{I}^{min}; \ell_1, \ell_q) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{I}; \ell_1, \ell_q)^{min} \overset{1}{=} \ell_q^{min} = \ell_q.$$

  Aquí la segunda igualdad se obtiene de la Proposición 3.2.6 para $\mathfrak{A} = \mathcal{I}$ y $F = \ell_q$ (minimal pues $q < \infty$) y la tercera es por la Proposición 2.2.3.

- Para $p = 1$ y $q = \infty$,

$$\ell_n(\mathcal{I}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{I}^*; \ell_1^\times, \ell_\infty^\times)^\times \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{L}; \ell_\infty, \ell_1)^\times \overset{1}{=} \ell_1^\times = \ell_\infty,$$

  que resulta de las ecuaciones (3.5) para $\mathfrak{A} = \mathcal{I}$ y $F = \ell_\infty$ y (2.10).

Para concluir con los resultados sobre los operadores nucleares, nos resta comprobar que $\ell_n(\mathcal{N}; \ell_1, \ell_\infty) = c_0$, que lo haremos de manera independiente a lo hecho en el capítulo anterior.

Notemos previamente que $\ell_n(\mathcal{L}_{app}; E, F) \subseteq c_0$ para E y F espacios de sucesiones cualesquiera. En efecto, la equivalencia $\mathcal{L}(^nX; Y) \overset{1}{=} \mathcal{L}(X; \mathcal{L}(^{n-1}X; Y))$ (notada por $T \mapsto \tilde{T}$) relaciona un $T \in \mathcal{L}(^nX; Y)$ aproximable con $\tilde{T}$ operador compacto, ya que si $T_n \in \mathcal{L}(^nX; Y)$ son de tipo finito tendiendo a T, entonces $\tilde{T_n}$ son de rango finito tendiendo a $\tilde{T}$. Por último, si $\alpha \in \ell_n(\mathcal{L}_{app}; E, F)$ y suponemos que no tiende a cero, existe una subsucesión $\alpha(k_j)$ que se mantiene lejos de cero, pero la sucesión $\tilde{T}_\alpha(e_{k_j})$ tiene subsucesión convergente, lo que implicaría que la subsucesión de α tiende a cero.

Además, $c_0 \subseteq \ell_n(\mathcal{L}_{app}; \ell_1, \ell_\infty)$. Sea $T_\alpha : \ell_1 \times \cdots \times \ell_1 \to \ell_\infty$ con $\alpha \in c_0$. Por un lado, $T_\alpha \in \mathcal{L}(^n\ell_1; \ell_\infty)$ ya que $\ell_n(\mathcal{L}; 1, \infty) \overset{1}{=} \ell_\infty$. Por otro, $T_\alpha \in \mathcal{L}_{app}(^n\ell_1; \ell_\infty)$ pues si consideramos $T_{\pi_N(\alpha)}$, resulta un operador multilineal de tipo finito y satisface que

$$\begin{aligned}\|T_\alpha - T_{\pi_N(\alpha)}\|_{\mathcal{L}(^n\ell_1;\ell_\infty)} &= \sup_{x_i \in B_{\ell_1}} \|(\alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k))_{k>N}\|_{\ell_\infty} \\ &= \sup_{x_i \in B_{\ell_1}} \sup_{k>N} |\alpha(k) \cdot x_1(k) \cdots x_n(k)| \leq \sup_{k>N} |\alpha(k)| \to 0.\end{aligned}$$

Luego, $\ell_n(\mathcal{L}_{app}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{1}{=} c_0$.

Proposición 3.4.1. *Sean E y F espacios de sucesiones y $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores n-lineales. Si $\ell_n(\mathfrak{A}; E, F) \overset{1}{=} \ell_\infty$, entonces $\ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F) \overset{1}{=} c_0$.*

Demostración. Comencemos con la inclusión $\ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} c_0$. Como $\ell_1 \overset{1}{\hookrightarrow} E$, $F \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty$ y $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{L}$, se tiene que

$$\ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathfrak{A}^{min}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathcal{L}^{min}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{L}_{app}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{1}{=} c_0.$$

Ahora, aplicando la Proposición 3.2.6 y la inclusión $F^{min} \overset{1}{\hookrightarrow} F$, obtenemos

$$c_0 \overset{1}{=} \ell_\infty^{min} \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}; E, F)^{min} \overset{1}{=} \ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F^{min}) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathfrak{A}^{min}; E, F) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} c_0.$$

□

Como consecuencia, tenemos que $\ell_n(\mathcal{N}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{1}{=} c_0$ ya que $\ell_n(\mathcal{I}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{1}{=} \ell_\infty$. Es más, esto implica que $\ell_n(\mathfrak{A}^{min}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{1}{=} c_0$ para cualquier ideal $\mathfrak{A}$, pues

$$c_0 \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{N}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathfrak{A}^{min}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} \ell_n(\mathcal{L}_{app}; \ell_1, \ell_\infty) \overset{1}{=} c_0.$$

3.4.2. Sobre resultados generales

En Proposición 3.1.5, vimos que

$$\ell_n(\mathcal{L}; E, F) \overset{1}{=} M(F^\times, \ell_n(\mathcal{L}; E)).$$

Además, por el Corolario 3.1.6 y la Proposición 3.1.7, tenemos que

$$\ell_n(\mathcal{L}; E, F) \overset{1}{=} \begin{cases} \ell_\infty & \text{si } E \text{ es } n\text{-cóncavo} \\ M(E^n, F) & \text{si } E \text{ es } n\text{-convexo} \end{cases} \tag{3.6}$$

Aplicando la identidad (3.5) en este caso particular, por la Proposición 3.1.5, si F es maximal, obtenemos

$$\ell_n(\mathcal{I}; E, F) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{L}; E^\times, F^\times)^\times \overset{1}{=} M(F, \ell_n(\mathcal{L}; E^\times))^\times.$$

Además, si usamos la identidad (3.6), teniendo en cuenta que E es n-convexo si y solo si $E^\times$ es n'-cóncavo (con las mismas constantes) y viceversa, resulta que

$$\ell_n(\mathcal{I}; E, F) \overset{1}{=} \begin{cases} \ell_1 & \text{si } E \text{ es } n'\text{-convexo} \\ M\big((E^\times)^n, F^\times\big)^\times & \text{si } E \text{ es } n'\text{-cóncavo} \end{cases}$$

3.4.3. Sobre una pequeña mejora en el cálculo de $\ell_n(\mathcal{E}; p, q)$

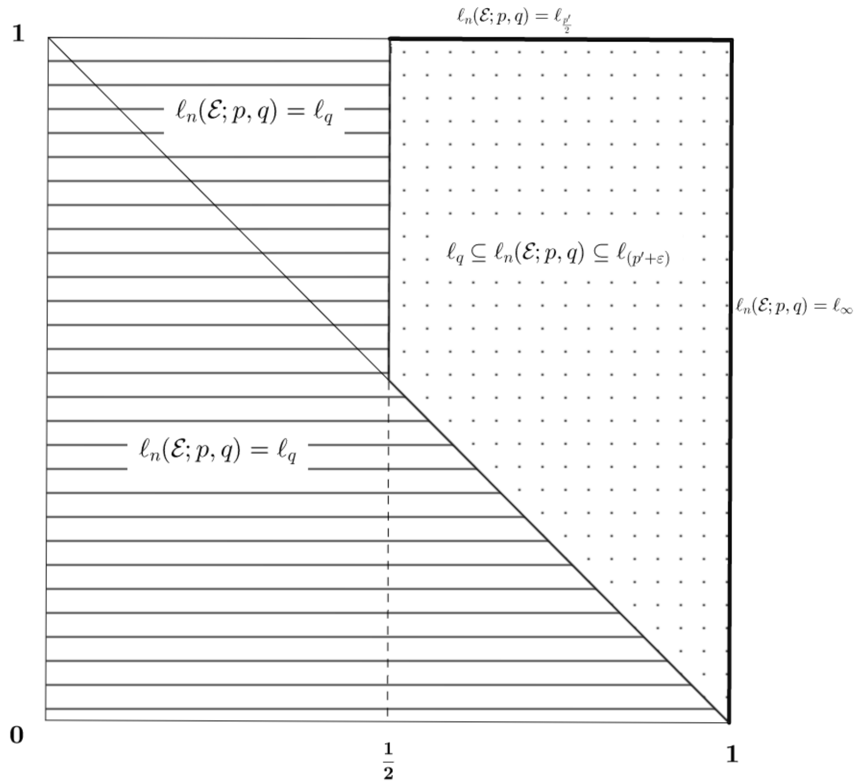
Recordemos lo que sabemos sobre el espacio de sucesiones asociado al ideal de operadores multilineales extendibles de $\ell_p \times \cdots \times \ell_p$ en ℓ_q. Por las Proposiciones 2.2.4, 2.2.6 y 2.2.7 tenemos que

- Para $p \geq 2$, $\ell_n(\mathcal{E}; p, q) = \ell_q$.
- Para $1 < p < 2$,

- $q = 1$, $\ell_n(\mathcal{E}; p, 1) = \ell_{\frac{p'}{2}}$.
- $q > p'$, $\ell_n(\mathcal{E}; p, q) = \ell_q$.
- $1 < q \leq p'$, $\ell_q \subseteq \ell_n(\mathcal{E}; p, q) \subseteq \ell_{p'+\varepsilon}$, para todo $\varepsilon > 0$.

- Para $p = 1$, $\ell_n(\mathcal{E}; 1, q) \stackrel{1}{=} \ell_\infty$.

Podemos resumir lo que sabemos en el siguiente gráfico, donde ponemos en cada eje las variables $1/p$ y $1/q$, respectivamente (ver gráficos de limit orders en [Pie80]).



Observemos que la diagonal que dibujamos en el gráfico, representa la curva $q = p'$.

Aplicando la Proposición 3.1.2 sobre el ideal $\mathcal{E}$ y por Proposición 2.1.5, deducimos que

$$\ell_n(\mathcal{E}; p, q) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} M(\ell_{q'}, \ell_n(\mathcal{E}; p)) = M(\ell_{q'}, \ell_{\frac{p'}{2}}).$$

Entonces, calculando el espacio de multiplicadores, obtenemos

$$\ell_n(\mathcal{E};p,q) \overset{\leq 1}{\hookrightarrow} M(\ell_{q'},\ell_{\frac{p'}{2}}) \overset{1}{=} \begin{cases} \ell_\infty, & \text{si } q' \leq \frac{p'}{2}; \\ \ell_r, & \text{si } q' > \frac{p'}{2}, \end{cases}$$

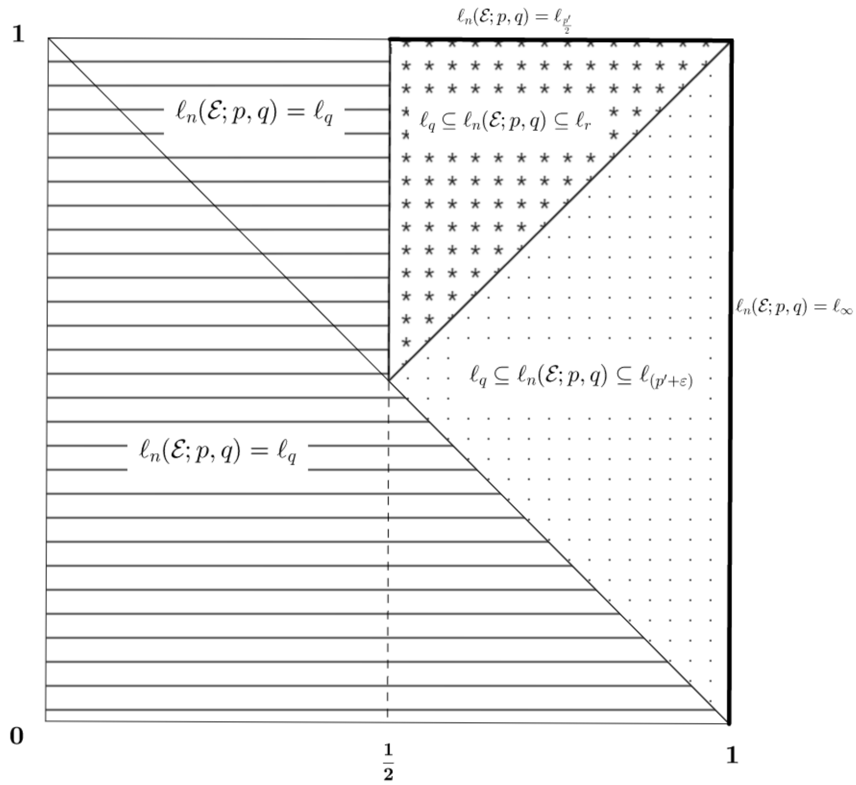
donde $\frac{1}{r} = \frac{2}{p'} - \frac{1}{q'}$.

Como lo que tenemos es una inclusión del espacio de sucesiones asociado en el espacio de multiplicadores, solo nos pueden servir los casos donde obtenemos como resultado ℓ_r con $r < \infty$. Es decir, la región $q' > \frac{p'}{2}$, que equivale a $q < \frac{p}{2-p}$. Además, en la región donde no pudimos definir con exactitud el espacio de sucesiones asociado, sabemos que $\ell_n(\mathcal{E};p,q) \subseteq \ell_{(p'+\varepsilon)}$, para todo $\varepsilon > 0$. Luego, en los casos donde $\ell_r \subseteq \ell_{(p'+\varepsilon)}$, es decir, cuando $r \leq p'$ tendríamos una mejora. Esto sucede cuando $q \leq p$. En conclusión, mejoramos la "cota superior" del espacio de sucesiones asociado al ideal $\mathcal{E}$ sobre la región $1 \leq p \leq 2$ y $q \leq p$ y vale que

$$\ell_q \subseteq \ell_n(\mathcal{E};p,q) \subseteq \ell_r,$$

con $\frac{1}{r} = \frac{2}{p'} - \frac{1}{q'}$.

Finalmente resumimos lo que obtuvimos en el siguiente gráfico.



3.4.4. Sobre operadores multilineales r-dominados

En [CDS06] se estudian la formas n-lineales r-dominadas y se las relaciona con operadores absolutamente r-sumantes. En concreto, se prueba que una forma n-lineal $\phi_\alpha \in \mathcal{L}(^n\ell_p)$ es r-dominada si y solo si el operador lineal diagonal $D_\sigma \in \mathcal{L}(\ell_p; \ell_n)$ con $\sigma(k)^n = \alpha(k)$ es absolutamente r-sumante. Y se dan interpretaciones de este resultado en términos del "limit order". Aplicando el lema que probaremos a continuación, este resultado puede reescribirse de la siguiente manera

$$\ell_n(\mathcal{D}_r; \ell_p) = [\ell_1(\Pi_r; \ell_p, \ell_n)]^n .$$

Siguiendo las ideas de [CDS06], vamos a dar una versión para operadores multilineales (a valores vectoriales) de este resultado. Para ello necesitaremos primero probar el siguiente lema.

Lema 3.4.2. *Sea F un espacio de sucesiones n-convexo con $M^{(n)}(F) = 1$ y sea $r \geq n$. Entonces, para cualquier espacio de sucesiones E, $\ell_1(\Pi_r; E, F)$ es n-convexo con $M^{(n)}(\ell_1(\Pi_r; E, F)) = 1$.*

Demostración. El espacio $\ell_1(\Pi_r; E, F)$ es n-convexo con $M^{(n)}(\ell_1(\Pi_r; E, F)) = 1$ si y solo si para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \ell_1(\Pi_r; E, F)$ se tiene que

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k(j)|^n \right)^{1/n} \right\|_{\ell_1(\Pi_r; E,F)} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} \|\alpha_k\|^n_{\ell_1(\Pi_r; E,F)} \right)^{1/n} .$$

Es decir,

$$\|D_\beta\|_{\Pi_r(E;F)} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} \|D_{\alpha_k}\|^n_{\Pi_r(E;F)} \right)^{1/n} ,$$

con $\beta(j) = \left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k(j)|^n \right)^{1/n}$.

Sean $x_1, \ldots, x_m \in E$. Como F es n-convexo con $M^{(n)}(F) = 1$ y $r \geq n$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{m} \|D_\beta(x_i)\|_F^r \right)^{1/r} &= \left(\sum_{i=1}^{m} \|\beta \cdot x_i\|_F^r \right)^{1/r} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \left\| \left(\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k \cdot x_i|^n \right)^{1/n} \right\|_F^r \right)^{1/r} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{N} \|\alpha_k \cdot x_i\|_F^n \right)^{r/n} \right)^{1/r} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{N} \|D_{\alpha_k}(x_i)\|_F^n \right)^{r/n} \right)^{1/r} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{m} \|D_{\alpha_k}(x_i)\|_F^r \right)^{n/r} \right)^{1/n} \qquad \text{(por Minkowski)} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{N} \|D_{\alpha_k}\|_{\Pi_r(E;F)}^n \right)^{1/n} \cdot w_r(x_i).
\end{aligned}
$$

Luego $\|D_\beta\|_{\Pi_r(E;F)} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} \|D_{\alpha_k}\|_{\Pi_r(E;F)}^n \right)^{1/n}$, por lo que $\ell_1(\Pi_r; E, F)$ resulta n-convexo con $M^{(n)}(\ell_1(\Pi_r; E, F)) = 1$. $\square$

Notemos que si $T_\alpha \in \mathcal{L}(^nE; F)$ es un operador n-lineal diagonal y σ es una sucesión que verifica que $\sigma^n = \alpha$, entonces $D_\sigma \in \mathcal{L}(E; F^{1/n})$. Como estamos trabajando con espacios de sucesiones normales, es equivalente que un elemento x esté en el espacio de sucesiones a que $|x|$ esté en el espacio. Luego, si estamos trabajando con sucesiones de números reales, siempre podemos considerar el módulo de la sucesión. En este caso, tomaríamos σ tal que $\sigma^n = |\alpha|$.

Proposición 3.4.3. *Sean E y F espacios de sucesiones y sea $T_\alpha \in \mathcal{L}(^nE; F)$ un operador n-lineal diagonal. Entonces, T_α es r-dominado si y solo si el operador diagonal $D_\sigma \in \mathcal{L}(E; F^{1/n})$ (con $\sigma^n = \alpha$) es absolutamente r-sumante.*

En particular, si $n \geq 2$, se tiene que

$$\ell_n(\mathcal{D}_r; E, F) = \left[\ell_1(\Pi_r; E, F^{1/n}) \right]^n.$$

Demostración. Observemos primero que como $F^{1/n}$ es n-convexo con $M^{(n)}(F^{1/n}) = 1$, por el Lema 3.4.2 tiene sentido considerar el espacio $\left[\ell_1(\Pi_r; E, F^{1/n}) \right]^n$.

Para $\alpha \in \ell_n(\mathcal{D}_r; E, F)$, queremos ver que $\alpha \in \left[\ell_1(\Pi_r; E, F^{1/n})\right]^n$. Es decir, tenemos que probar que $\sigma := \alpha^{1/n} \in \ell_1(\Pi_r; E, F^{1/n})$. Sean $x_1, \ldots, x_m \in E$, entonces

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^m \|D_\sigma(x_i)\|_{F^{1/n}}^r\right)^{1/r} &= \left(\sum_{i=1}^m \|(D_\sigma(x_i))^n\|_F^{r/n}\right)^{1/r} \\
&= \left(\sum_{i=1}^m \|T_\alpha(x_i, \ldots, x_i)\|_F^{r/n}\right)^{1/r} \\
&\leq \|\alpha\|_{\ell_n(\mathcal{D}_r;E,F)}^{1/n} \cdot w_r(x_i).
\end{aligned}$$

Luego $\alpha \in \left[\ell_1(\Pi_r; E, F^{1/n})\right]^n$ y además

$$\|\alpha\|_{\left[\ell_1(\Pi_r;E,F^{1/n})\right]^n} = \|\alpha^{1/n}\|_{\ell_1(\Pi_r;E,F^{1/n})}^n \leq \|\alpha\|_{\ell_n(\mathcal{D}_r;E,F)}.$$

Recíprocamente, sea $\alpha \in \left[\ell_1(\Pi_r; E, F^{1/n})\right]^n$, es decir, $\alpha^{1/n} \in \ell_1(\Pi_r; E, F^{1/n})$. Entonces, $D_{\alpha^{1/n}} \in \Pi_r(E; F^{1/n})$. Además, podemos escribir $T_\alpha = \Psi \circ (D_{\alpha^{1/n}}, \ldots, D_{\alpha^{1/n}})$, donde el operador $\Psi \in \mathcal{L}(^n F^{1/n}; F)$ está dado por $\Psi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$. Usando la identidad de ideales $D_r = \mathcal{L} \circ (\Pi_r, \ldots, \Pi_r)$ [Sch91, Proposition 3.6], se obtiene $T_\alpha \in \mathcal{D}_r(^n E; F)$ y

$$\|T_\alpha\|_{\mathcal{D}_r(^n E;F)} \leq \|D_{\alpha^{1/n}}\|_{\Pi_r(E;F^{1/n})}^n = \|\alpha\|_{\left[\ell_1(\Pi_r;E,F^{1/n})\right]^n}.$$

□

Aplicando la Proposición 3.4.3 a espacios ℓ_p, vale que

$$\ell_n(\mathcal{D}_r; \ell_p, \ell_q) = \left[\ell_1(\Pi_r; \ell_p, \ell_{nq})\right]^n.$$

Teniendo en cuenta los cálculos hechos en [Pie80, Section 22.4] sobre operadores lineales absolutamente r-sumantes, se pueden deducir los espacios de sucesiones asociados a dichos operadores y como consecuencia, tenemos determinados los espacios de sucesiones asociados a los operadores multilineales r-dominados.

Veremos a continuación que el ideal de operadores n-lineales r-dominados es maximal. Para ello, haremos uso del Teorema de representación para ideales maximales (Teorema 1.2.3). Probaremos que el ideal es dual a una norma tensorial finitamente generada de orden $(n+1)$ cuando $r \geq n$ siguiendo las ideas de [CDS07, Section 4] (en donde se prueba el resultado análogo para aplicaciones multilineales r-dominadas a valores escalares).

Para $r \geq n$, definimos en $\otimes_{j=1}^n X_j \otimes Y'$ la siguiente norma tensorial,

$$\beta_{(t,r)}(s) = \inf\left\{\|\lambda(k)\|_t \cdot w_r(x_{1,k}) \cdots w_r(x_{n,k}) \cdot \ell_\infty(\|y_k'\|_{Y'})\right\},$$

donde el ínfimo se toma sobre los elementos de la forma $s = \sum_{k=1}^N \lambda(k) \cdot x_{1,k} \otimes \cdots \otimes x_{n,k} \otimes y_k'$ y donde $\frac{1}{t} + \frac{n}{r} = 1$. Es simple verificar que $\beta_{(t,r)}$ es una norma tensorial finitamente generada de orden $(n+1)$.

Proposición 3.4.4. *Si $r \geq n$, se tiene que*

$$\mathcal{D}_r(X_1,\ldots,X_n;Y) = \big(\otimes_{j=1}^n X_j \otimes Y'; \beta_{(t,r)}\big)' \cap \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;Y),$$

$$\mathcal{D}_r(X_1,\ldots,X_n;Y') = \big(\otimes_{j=1}^n X_j \otimes Y; \beta_{(t,r)}\big)'.$$

En consecuencia, $\mathcal{D}_r$ es un ideal maximal.

Demostración. Sea $T \in \mathcal{D}_r(X_1,\ldots,X_n;Y)$ y consideremos $s = \sum_{k=1}^N \lambda(k)\cdot x_{1,k}\otimes\cdots\otimes x_{n,k}\otimes y_k' \in \otimes_{j=1}^n X_j \otimes Y'$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |T(s)| &= \left|\sum_{k=1}^N \lambda(k)\cdot y_k'\big(T(x_{1,k},\ldots,x_{n,k})\big)\right| \leq \ell_t(\lambda(k))\cdot \ell_{\frac{r}{n}}\big(y_k'(T(x_{1,k},\ldots,x_{n,k}))\big) \\ &\leq \ell_t(\lambda(k))\cdot \ell_{\frac{r}{n}}\big(\|T(x_{1,k},\ldots,x_{n,k})\|_Y\big)\cdot \ell_\infty(\|y_k'\|_{Y'}) \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{D}_r}\cdot \ell_t(\lambda(k))\cdot w_r(x_{1,k})\cdots w_r(x_{n,k})\cdot \ell_\infty(\|y_k'\|_{Y'}). \end{aligned}$$

Como esta desigualdad vale para cualquier representación de s, resulta que T pertenece a $\big(\otimes_{j=1}^n X_j \otimes Y'; \beta_{(t,r)}\big)'$ y además $\|T\|_{\left(\otimes_{j=1}^n X_j\otimes Y',\beta_{(t,r)}\right)'} \leq \|T\|_{\mathcal{D}_r(X_1,\ldots,X_n;Y)}$.

Recíprocamente, sea $T \in \big(\otimes_{j=1}^n X_j \otimes Y', \beta_{(t,r)}\big)' \cap \mathcal{L}(X_1,\ldots,X_n;Y)$. Luego, dadas las sucesiones finitas $(x_{1,k})_k,\ldots,(x_{n,k})_k$ en $X_1,\ldots,X_n$ (respectivamente) y dados $y_1',\ldots,y_N'$ en Y', existen escalares $\lambda(1),\ldots,\lambda(N)$ con $\ell_t(\lambda(k)) = 1$ tal que

$$\begin{aligned} \ell_{\frac{r}{n}}\left(y_k'\left(T(x_{1,k},\ldots,x_{n,k})\right)\right) &= \sum_{k=1}^N \lambda(k)\cdot y_k'\big(T(x_{1,k},\ldots,x_{n,k})\big) \\ &= T\left(\sum_{k=1}^N \lambda(k)\cdot x_{1,k}\otimes\cdots\otimes x_{n,k}\otimes y_k'\right) \\ &\leq \|T\|_{\left(\otimes_{j=1}^n X_j\otimes Y';\beta_{(t,r)}\right)'}\cdot \beta_{(t,r)}\left(\sum_{k=1}^N \lambda(k)\cdot x_{1,k}\otimes\cdots\otimes x_{n,k}\otimes y_k'\right) \\ &\leq \|T\|_{\left(\otimes_{j=1}^n X_j\otimes Y';\beta_{(t,r)}\right)'}\cdot w_r(x_{1,k})\cdots w_r(x_{n,k})\cdot \ell_\infty(\|y_k'\|_{Y'}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\ell_{\frac{r}{n}}\left((\|T(x_{1,k},\ldots,x_{n,k})\|_Y\right)) \leq \|T\|_{\left(\otimes_{j=1}^n X_j\otimes Y';\beta_{(t,r)}\right)'}\cdot w_r(x_{1,k})\cdots w_r(x_{n,k})$, lo que implica que $T \in \mathcal{D}_r(X_1,\ldots,X_n;Y)$ y $\|T\|_{\mathcal{D}_r(X_1,\ldots,X_n;Y)} \leq \|T\|_{\left(\otimes_{j=1}^n X_j\otimes Y';\beta_{(t,r)}\right)'}$.

De la misma forma se demuestra que $\mathcal{D}_r(X_1,\ldots,X_n;Y') = \big(\otimes_{j=1}^n X_j \otimes Y; \beta_{(t,r)}\big)'$. En conclusión, $\mathcal{D}_r$ es un ideal de operadores multilineales maximal.

□

Siguiendo la terminología para operadores lineales [DF93, Chapters 17 y 18] y teniendo en cuenta que en dicho contexto $\mathcal{D}_r = \Pi_r$, es natural llamar r-integrales y r-nucleares a los ideales de operadores multilineales maximal y minimal asociados a $\beta_{(t,r)}$ respectivamente. Es decir,

$$\mathcal{D}_r^* = \mathcal{I}_r, \quad \mathcal{I}_r^{min} = \mathcal{N}_r \ \text{ y } \ \mathcal{N}_r^* = \mathcal{I}_r^* = \mathcal{D}_r.$$

Del Teorema de representación para ideales maximales, se desprende que $\mathcal{D}_r \sim \beta'_{(t,r)}$ ya que $\mathcal{I}_r = \mathcal{D}_r^* \sim \beta_{(t,r)}$ y $(\mathcal{D}_r^*)^* = \mathcal{D}_r$. Con esta descripción de la norma tensorial, podemos caracterizar $\mathcal{I}_r$. Dados $M_1, \ldots, M_n, N \in FIN$, se tiene que

$$\mathcal{I}_r(M_1, \ldots, M_n; N) \overset{1}{=} \left(\otimes_{j=1}^n M_j' \otimes N; \beta_{(t,r)}\right).$$

De la Proposición 3.2.6 y la ecuación (3.5) se obtiene

$$\ell_n(\mathcal{I}_r; E, F) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{D}_r; E^\times, F^\times)^\times, \quad \text{si } F \text{ es maximal,}$$

$$\ell_n(\mathcal{N}_r; E, F) \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{I}_r; E, F)^{min}, \quad \text{si } F \text{ es minimal.}$$

3.4.5. Sobre un teorema de inclusión y composición para operadores multilineales (E,p)-dominados

Teniendo en cuenta la definición de operadores multilineales (q,p)-dominados y la de operadores lineales (E,p)-sumantes (ver Apéndice A.4), es natural definir operadores multineales (E,p)-dominados.

Sea E un espacio de sucesiones n-convexo con $M^{(n)}(E) = 1$ y tal que verifica $\ell_p \hookrightarrow E$. Decimos que un operador n-lineal $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ es (E,p)-*dominado* (y lo notamos $T \in \mathcal{D}_{(E,p)}(X_1, \ldots, X_n; Y)$) si existe $C > 0$ tal que para todas las sucesiones finitas $x_1 = (x_{1,i})_{i=1}^m \subseteq X_1, \ldots,$ $x_n = (x_{n,i})_{i=1}^m \subseteq X_n$ vale que

$$\left\| \left(\|T(x_{1,i}, \ldots, x_{n,i})\|_Y \right)_{i=1}^m \right\|_{E^n} \leq C \cdot c_p^E \cdot w_p(x_1) \cdots w_p(x_n), \tag{3.7}$$

donde $c_p^E = \|i : \ell_p \hookrightarrow E\|$. Es fácil ver que $\mathcal{D}_{(E,p)}$ es un ideal de Banach de operadores n-lineales con la norma dada por $D_{(E,p)}(T) = \inf\{C > 0 \ : \ T \text{ verifica } (3.7)\}$.

Es importante notar que en el caso que $n = 1$, se tiene que $\mathcal{D}_{(E,p)} = \Pi_{(E,p)}$. Basándonos en el artículo de Defant, Mastyło y Michels [DMM02], donde se prueban teoremas de inclusión y composición para operadores lineales absolutamente (E,p)-sumantes (ver Apéndice Proposición A.6.8, Teorema A.6.9 y Teorema A.6.11), extendemos dichos teoremas al contexto multilineal para operadores (E,p)-dominados.

Observemos que en el caso que $\ell_p \hookrightarrow E$ y $\frac{n}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, se tiene que

$$\ell_q \overset{1}{=} \ell_n(\mathcal{L}; \ell_r, \ell_p) \hookrightarrow \ell_n(\mathcal{L}; \ell_r, E), \tag{3.8}$$

con $\|\alpha\|_{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)} \leq c_p^E \cdot \|\alpha\|_{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,\ell_p)}$. Es decir, $c_q^{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)} \leq c_p^E$.

Teorema 3.4.5 (Teorema de inclusión para (E, p)-dominados).
Sea E un espacio de sucesiones n-convexo con $M^{(n)}(E) = 1$ y tal que verifica $\ell_p \hookrightarrow E$. Si $\frac{n}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, entonces

$$\mathcal{D}_{(E,p)} \subseteq \mathcal{D}_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)},$$

con $D_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}(T) \leq c_p^E \cdot \left(c_q^{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)}\right)^{-1} \cdot D_{(E,p)}(T)$ para todo $T \in \mathcal{D}_{(E,p)}$.

Si además los espacios $X_1, \ldots, X_n$ tienen cotipo 2, entonces para todo espacio de Banach Y se tiene que

$$\mathcal{D}_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_{2n},E),2)}(X_1, \ldots, X_n; Y) = \mathcal{D}_{(E,1)}(X_1, \ldots, X_n; Y). \tag{3.9}$$

Demostración. Observemos primero que $\mathcal{D}_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}$ está definido en estas condiciones. En efecto, en virtud de la Proposición 3.1.9, por ser E n-convexo con $M^{(n)}(E) = 1$, se tiene que el espacio $\ell_n(\mathcal{L}; \ell_r, E)$ es n-convexo con constante de convexidad igual a 1. Además, $\ell_q \hookrightarrow \ell_n(\mathcal{L}; \ell_r, E)$, como muestra la condición (3.8).

Veamos entonces que dado $T \in \mathcal{D}_{(E,p)}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ y dadas sucesiones finitas $x_1 = (x_{1,i})_{i=1}^m \subseteq X_1, \ldots, x_n = (x_{n,i})_{i=1}^m \subseteq X_n$, vale que

$$\left\| \left(\|T(x_{1,i}, \ldots, x_{n,i})\|_Y \right)_{i=1}^m \right\|_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E))^n} \leq C \cdot c_q^{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)} \cdot w_q(x_1) \cdots w_q(x_n).$$

Comencemos considerando $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ e $y \in \ell_{\frac{r}{n}}$. Como $\frac{n}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, se tiene que

$$w_p(y \cdot x) \leq \|y\|_{r/n} \cdot w_q(x).$$

En efecto,

$$\begin{aligned} w_p(y \cdot x) &= \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x'(y_k \cdot x_k)|^p \right)^{1/p} = \sup_{x' \in B_{E'}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |y_k|^p \cdot |x'(x_k)|^p \right)^{1/p} \\ &= \sup_{x' \in B_{E'}} \|y \cdot x'(x)\|_{\ell_p} \leq \sup_{x' \in B_{E'}} \|y\|_{r/n} \cdot \|x'(x)\|_q \\ &= \|y\|_{r/n} \cdot w_q(x). \end{aligned}$$

Llamemos α a la sucesión que satisface $\alpha_i = \|T(x_{1,i}, \ldots, x_{n,i})\|_Y$ y $\alpha^{1/n} = (\alpha_i^{1/n})_i$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\alpha\|_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E))^n} &= \left\| \left(|\alpha_i|^{1/n}\right)_{i=1}^m \right\|^n_{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)} = \|T_{\alpha^{1/n}}\|^n_{\mathcal{L}(^m\ell_r;E)} \\
&= \sup_{y_j \in B_{\ell_r}} \|\alpha^{1/n} \cdot y_1 \cdots y_n\|^n_E = \sup_{y_j \in B_{\ell_r}} \|(\alpha \cdot y_1^n \cdots y_n^n)^{1/n}\|^n_E \\
&= \sup_{y_j \in B_{\ell_r}} \|\alpha \cdot y_1^n \cdots y_n^n\|_{E^n} = \sup_{y_j \in B_{\ell_r}} \left\| \left(\|T(y_1^n \cdot x_{1,i}, \cdots, y_n^n \cdot x_{n,i})\|_Y\right)_{i=1}^m \right\|_{E^n} \\
&\leq \sup_{y_j \in B_{\ell_{\frac{r}{n}}}} \left\| \left(\|T(y_{1,i} \cdot x_{1,i}, \ldots, y_{n,i} \cdot x_{n,i})\|_Y\right)_{i=1}^m \right\|_{E^n} \\
&\leq \sup_{y_j \in B_{\ell_{\frac{r}{n}}}} D_{(E,p)}(T) \cdot c_p^E \cdot w_p(y_1 \cdot x_1) \cdots w_p(y_n \cdot x_n) \\
&\leq \sup_{y_j \in B_{\ell_{\frac{r}{n}}}} D_{(E,p)}(T) \cdot c_p^E \cdot \|y_1\|_{r/n} \cdot w_q(x_1) \cdots \|y_n\|_{r/n} \cdot w_q(x_n) \\
&= D_{(E,p)}(T) \cdot c_p^E \cdot w_q(x_1) \cdots w_q(x_n),
\end{aligned}$$

donde $D_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}(T) \leq c_p^E \cdot \left(c_q^{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)}\right)^{-1} \cdot D_{(E,p)}(T)$.

Por último, para probar la identidad (3.9), una de las inclusiones se sigue de lo ya visto en el caso en que $p = 1$ y $q = 2$ (y, en consecuencia, $r = 2n$). La inclusión inversa se obtiene de los resultados que veremos a continuación. (Ver conclusión después de la Proposición 3.4.7). □

Teorema 3.4.6 (Teorema de composición para aplicaciones (E, p)-dominadas). *Sea E un espacio de sucesiones n-convexo con $M^{(n)}(E) = 1$ y tal que verifica $\ell_p \hookrightarrow E$. Si $\frac{n}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, entonces*

$$\mathcal{D}_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)} \circ (\Pi_{\frac{r}{n}}, \ldots, \Pi_{\frac{r}{n}}) \subseteq \mathcal{D}_{(E,p)}.$$

Además se tiene que $D_{(E,p)}(T \circ (A_1, \ldots, A_n)) \leq D_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}(T) \cdot \pi_{\frac{r}{n}}(A_1) \cdots \pi_{\frac{r}{n}}(A_n)$, donde $T \in \mathcal{D}_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}(Y_1, \ldots, Y_n; Z)$, $A_1 \in \Pi_{\frac{r}{n}}(X_1; Y_1)$, $\ldots$, $A_n \in \Pi_{\frac{r}{n}}(X_n; Y_n)$.

Demostración. Sean $A_j \in \Pi_{\frac{r}{n}}(X_j; Y_j)$ para $1 \leq j \leq n$ y $T \in \mathcal{D}_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}(Y_1, \ldots, Y_n; Z)$. Por el Teorema de dominación de Pietsch para operadores lineales absolutamente p-sumantes (ver en Apéndice A.6.4), existen medidas de probabilidad μ_j en $(B_{X_j'}; w^*)$ para $1 \leq j \leq n$ tales que

$$\|A_j x\|_{Y_j} \leq \pi_{\frac{r}{n}}(A_j) \cdot \left(\int_{B_{X_j'}} |x'(x)|^{r/n} d\mu_j(x') \right)^{n/r}.$$

Para cada $1 \leq j \leq n$, consideramos sucesiones finitas con todos sus elementos no nulos $(x_{j,i})_{i=1}^m \subseteq X_j$ y escribimos cada $x_{j,i}$ como

$$x_{j,i} = \left(\int_{B_{X_j'}} |x_j'(x_{j,i})|^p d\mu_j(x_j') \right)^{n/r} \cdot x^0_{j,i}.$$

Para facilitar la notación, llamaremos

$$x_j = (x_{j,i})_{i=1}^m, \quad x_j^0 = (x_{j,i}^0)_{i=1}^m \quad \text{y} \quad \gamma_j = \left[\left(\int_{B_{X_j'}} |x_j'(x_{j,i})|^p d\mu_j(x_j') \right)^{n/r} \right]_{i=1}^m .$$

Notemos que $\|\gamma_j\|_{\frac{r}{n}} \leq w_p(x_j)^{np/r}$. En [TJ70] se prueba que bajo estas condiciones vale que para $A_j \in \Pi_{\frac{r}{n}}(X_j; Y_j)$

$$w_q(A_j x_j^0) \leq \pi_{\frac{r}{n}}(A_j) \cdot \sup_{x_j' \in B_{X_j'}} \left(\sum_{i=1}^m |x_j'(x_{j,i})|^p \right)^{1/q} = \pi_{\frac{r}{n}}(A_j) \cdot w_p(x_j)^{p/q}. \tag{3.10}$$

Observemos también que si $\alpha \in \ell_n(\mathcal{L}; \ell_r, E)$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \ell_r$ son no nulos, entonces

$$\|\alpha \cdot \beta_1 \cdots \beta_n\|_E \leq \|\alpha\|_{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)} \cdot \|\beta_1\|_r \cdots \|\beta_n\|_r .$$

Luego, usando la desigualdad (3.10) y que $c_q^{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)} \leq c_p^E$ como vimos en la ecuación (3.8), se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\|T(A_1 x_{1,i}, \ldots, A_n x_{n,i})\|_Z \right)_{i=1}^m \right\|_{E^n} \\
&= \left\| \|T(A_1(\gamma_1 \cdot x_1^0), \ldots, A_n(\gamma_n \cdot x_n^0))\|_Z^{1/n} \right\|_E^n \\
&= \left\| \|T(A_1 x_1^0, \ldots, A_n x_n^0)\|_Z^{1/n} \cdot \gamma_1^{1/n} \cdots \gamma_n^{1/n} \right\|_E^n \\
&\leq \left\| \|T(A_1 x_1^0, \ldots, A_n x_n^0)\|_Z^{1/n} \right\|_{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)}^n \cdot \|\gamma_1^{1/n}\|_r^n \cdots \|\gamma_n^{1/n}\|_r^n \\
&\leq D_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}(T) \cdot c_q^{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)} \cdot w_q(A_1 x_1^0) \cdots w_q(A_n x_n^0) \cdot \|\gamma_1^{1/n}\|_r^n \cdots \|\gamma_n^{1/n}\|_r^n \\
&\leq D_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}(T) \cdot c_p^E \cdot \pi_{\frac{r}{n}}(A_1) \cdot w_p(x_1)^{p/q} \cdots \pi_{\frac{r}{n}}(A_n) \cdot w_p(x_n)^{p/q} \cdot w_p(x_1)^{np/r} \cdots w_p(x_n)^{np/r} \\
&= D_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}(T) \cdot c_p^E \cdot \pi_{\frac{r}{n}}(A_1) \cdots \pi_{\frac{r}{n}}(A_n) \cdot w_p(x_1) \cdots w_p(x_n).
\end{aligned}$$

En consecuencia, $T(A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{D}_{(E,p)}$ y

$$D_{(E,p)}\left(T \circ (A_1, \ldots, A_n)\right) \leq D_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}(T) \cdot \pi_{\frac{r}{n}}(A_1) \cdots \pi_{\frac{r}{n}}(A_n),$$

como queríamos ver. □

Proposición 3.4.7. *Sea $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Son equivalentes*

(1) $T \in \mathcal{D}_{(E,p)}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ y $D_{(E,p)}(T) \leq C$.

(2) $D_{(E,p)}\left(T \circ (A_1, \ldots, A_n)\right) \leq C$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $A_j \in \mathcal{L}(\ell_{p'}^m; X_j)$ con $\|A_j\| \leq 1$.

Demostración. La implicación *(1)⇒(2)* es consecuencia de que $\mathcal{D}_{(E,p)}$ es un ideal.

Recíprocamente, supongamos que $D_{(E,p)}(T \circ (A_1, \dots, A_n)) \leq C$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $A_j \in \mathcal{L}(\ell_{p'}^m; X_j)$ con $\|A_j\| \leq 1$. Observemos que $\|A_j\| = w_p\big((A_j e_i)_{i=1}^m\big)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \|A_j\| &= \sup_{\alpha \in B_{\ell_{p'}^m}} \|A_j(\alpha)\|_{X_j} = \sup_{\alpha \in B_{\ell_{p'}^m}} \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot A_j(e_i) \right\|_{X_j} = \sup_{\alpha \in B_{\ell_{p'}^m}} \sup_{x_j' \in B_{X_j'}} \left| \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot x_j'(A_j(e_i)) \right| \\ &= \sup_{x_j' \in B_{X_j'}} \big\| \big(x_j'(A_j(e_i))\big)_{i=1}^m \big\|_{\ell_p} = w_p\big((A_j e_i)_{i=1}^m\big). \end{aligned}$$

Para ver que $T \in \mathcal{D}_{(E,p)}(X_1, \dots, X_n; Y)$, dadas las sucesiones finitas $x_j = (x_{j,i})_{i=1}^m \subseteq X_j$ (para $1 \leq j \leq n$), definimos operadores lineales $A_j \in \mathcal{L}(\ell_{p'}^m; X_j)$ como $A_j(\alpha) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot x_{j,i}$. Por ser $A_j(e_i) = x_{j,i}$, resulta $\|A_j\| = w_p(x_j)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \big\| (\|T(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})\|_Y)_{i=1}^m \big\|_{E^n} &= \|(\|T(A_1 e_i, \dots, A_n e_i)\|_Y)_{i=1}^m\|_{E^n} \\ &\leq D_{(E,p)}(T \circ (A_1, \dots, A_n)) \cdot w_p\big((e_i)_{i=1}^m\big)^n \\ &\leq C \cdot \|A_1\| \cdots \|A_n\| \\ &\leq C \cdot w_p(x_1) \cdots w_p(x_n). \end{aligned}$$

En consecuencia, $T \in \mathcal{D}_{(E,p)}(X_1, \dots, X_n; Y)$ y $D_{(E,p)}(T) \leq C$. □

Por último, veamos que vale la igualdad (3.9) del Teorema 3.4.5.
Sea $T \in \mathcal{D}_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_{2n},E),2)}(X_1, \dots, X_n; Y)$, donde $X_1, \dots, X_n$ tienen cotipo 2. Aplicamos un resultado de Maurey (ver [DF93, 31.7]) que dice que si un espacio X tiene cotipo 2, entonces $\mathcal{L}(\ell_\infty^m; X) = \Pi_2(\ell_\infty^m; X)$ y que dado $A \in \mathcal{L}(\ell_\infty^m; X)$, existe $C > 0$ tal que $\pi_2(A) \leq C \cdot \|A\|$. Ahora bien, dados $A_j \in \mathcal{L}(\ell_\infty^m; X_j)$ con $\|A_j\| \leq 1$ para $1 \leq j \leq n$, por el Teorema 3.4.6 para $p = 1$, $q = 2$ (y $r = 2n$), tenemos que

$$D_{(E,1)}(T \circ (A_1, \dots, A_n)) \leq C^n \cdot D_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_{2n},E),2)}(T).$$

Finalmente, la Proposición 3.4.7 permite concluir que $T \in \mathcal{D}_{(E,1)}(X_1, \dots, X_n; Y)$.

En vista de la definición de operadores multilineales fuertemente (q,p)-sumantes, es natural introducir el concepto de operador multilineal fuertemente (E,p)-sumante.

Sea E un espacio de sucesiones tal que $\ell_p \hookrightarrow E$. Decimos que un operador n-lineal $T \in \mathcal{L}(X_1, \dots, X_n; Y)$ es *fuertemente* (E,p)*-sumante* si existe $C > 0$ tal que para sucesiones finitas $(x_{1,i})_{i=1}^m \subseteq X_1$, …,$(x_{n,i})_{i=1}^m \subseteq X_n$, vale que

$$\big\| \big(\|T(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})\|_Y\big)_{i=1}^m \big\|_E \leq C \cdot c_p^E \cdot \sup_{\phi \in B_{\mathcal{L}(X_1,\dots,X_n)}} \left(\sum_{i=1}^m |\phi(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})|^p \right)^{1/p}. \qquad (3.11)$$

Al espacio de operadores fuertemente (E,p)-sumantes lo notamos con $\mathcal{S}_{(E,p)}$ y y puede verse que es un ideal de Banach de operadores n-lineales con la norma dada por

$$S_{(E,p)}(T) = \text{ínf}\{C \ : \ T \text{ verifica } (3.11)\}.$$

Aplicando los mismos argumentos que para el ideal $\mathcal{D}$, se puede probar el siguiente teorema de inclusión para operadores multilineales fuertemente (E,p)-sumantes.

Teorema 3.4.8 (Teorema de inclusión para aplicaciones fuertemente (E,p)-sumantes)**.** *Sea E un espacio de sucesiones que verifica $\ell_p \hookrightarrow E$. Si $\frac{n}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, entonces*

$$\mathcal{S}_{(E,p)} \subseteq \mathcal{S}_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}.$$

Además, si $T \in \mathcal{S}_{(E,p)}$ entonces $S_{(\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E),q)}(T) \leq c_p^E \cdot \left(c_q^{\ell_n(\mathcal{L};\ell_r,E)}\right)^{-1} \cdot S_{(E,p)}(T).$

3.4.6. Sobre espacios de sucesiones en espacios de Lorentz

Veamos ahora aplicaciones al cálculo de espacios asociados al ideal de operadores n-lineales continuos, nucleares e integrales en espacios de Lorentz. Las definiciones que daremos a continuación pueden encontrarse en [LTI77, Section 4.e].

Para cada $x \in E$, se define su *reordenamiento decreciente* $(x^\star(k))_{k\in\mathbb{N}}$ como

$$x^\star(k) := \text{ínf}\left\{\sup_{j\in\mathbb{N}\setminus J} |x(j)| \ : \ J \subseteq \mathbb{N}, \ card(J) < k\right\}.$$

Sea $1 \leq p < \infty$ y sea $w = (w(k))_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de términos positivos tal que $w(1) = 1$, $\text{lím}_{k\to\infty} w(k) = 0$ y $\sum_{k\in\mathbb{N}} w(k) = \infty$. Se define el *espacio de Lorentz* $d(w,p)$ como

$$\begin{aligned} d(w,p) \ &:= \ \left\{x = (x(k))_k \ : \ \sup_{\sigma\in\Sigma_\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_\sigma(k)|^p \cdot w(k) < \infty\right\} \\ &= \ \left\{x = (x(k))_k \ : \ \sum_{k\in\mathbb{N}} |x^*(k)|^p \cdot w(k) < \infty\right\}, \end{aligned}$$

con la norma dada por

$$\|x\|_{d(w,p)} := \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x^*(k)|^p \cdot w(k)\right)^{1/p} = \sup_{\sigma\in\Sigma_\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_\sigma(k)|^p \cdot w(k)\right)^{1/p},$$

donde $\Sigma_\mathbb{N} = \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ : \ \sigma \text{ es biyectiva}\}$ y $x_\sigma(k) = x(\sigma(k))$.

Se dice que la sucesión w es *α-regular* $(0 < \alpha < \infty)$ si $w(k)^\alpha \asymp \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n w(k)^\alpha$, y que es *regular* si es α-regular para algún α.

Observación 3.4.9. *Estos son algunos resultados conocidos acerca de los espacios de Lorentz que pueden encontrarse en [Rei81].*

(1) El espacio de Lorentz $d(w,p)$ es simétrico, maximal y minimal. Además, se tiene que $\lambda_{d(w,p)}(n) = (\sum_{k=1}^{n} w(k))^{1/p}$.

(2) El espacio de Lorentz $d(w,p)$ es r-convexo (con $M^{(r)}(d(w,p)) = 1$) para todo $1 \leq r \leq p$ y se tiene que $d(w,p)^r = d(w, \frac{p}{r})$. El espacio de Lorentz $d(w,p)$ no es r-convexo para $r > p$.

(3) Para $p < s < \infty$, el espacio de Lorentz $d(w,p)$ es s-cóncavo si y solo si w es $\frac{q}{p}$-regular, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$.

(4) El espacio de Lorentz $d(w,p)$ tiene concavidad no trivial (i.e. es q-cóncavo para algún $q < \infty$) si y solo si w es 1-regular y en ese caso se tiene que $\lambda_{d(w,p)}(n) \asymp n^{1/p}(w(n))^{1/p}$.

El espacio dual al espacio de Lorentz $d(w,p)$ (que coincide con su dual de Köthe por ser minimal) está dado para $p = 1$ [LTII79, Example 2.a.11] por

$$d(w,1)^{\times} := \left\{ x \ : \ \|x\|_{d(w,1)'} := \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{k=1}^{N} x^*(k)}{\sum_{k=1}^{N} w(k)} < \infty \right\}.$$

Para $p > 1$, $d(w,p)^{\times}$ es el espacio formado por las sucesiones x tales que existe una sucesión decreciente $y \in B_{\ell_{p'}}$ con

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{k=1}^{N} x^*(k)}{\sum_{k=1}^{N} y(k) w(k)^{1/p}} < \infty,$$

donde la norma está dada por el ínfimo de la expresión anterior sobre todos los $y \in B_{\ell_{p'}}$ decrecientes [Gar69]. Pero si w es regular, $d(w,p)^{\times}$ para $p > 1$ tiene una descripción más simple [All78]

$$d(w,p)^{\times} = \left\{ x \ : \ \left(\frac{x^*(k)}{w(k)^{1/p}} \right)_k \in \ell_{p'} \right\}.$$

Los espacios de Lorentz $d(w,p)$ son reflexivos para $p > 1$. Si $p = 1$, podemos describir el predual de $d(w,p)$ como

$$d_{\times}(w,1) = \left\{ x \in c_0 \ : \ \lim_{N \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{N} x^*(k)}{\sum_{k=1}^{N} w(k)} = 0 \right\},$$

con la norma dada por

$$\|x\|_{d_{\times}(w,1)} := \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{k=1}^{N} x^*(k)}{\sum_{k=1}^{N} w(k)}.$$

Por último, dada una sucesión Ψ estrictamente positiva y creciente con $\Psi(0) = 0$, el *espacio de sucesiones de Marcinkiewicz* m_{Ψ} está dado por todas las sucesiones x tales que

$$\|x\|_{m_{\Psi}} = \sup_{N \in \mathbb{N}} \frac{\sum_{k=1}^{N} x^*(k)}{\Psi(N)} < \infty.$$

Observación 3.4.10. *En [CDS09, Section 5] se calculan los siguientes espacios de sucesiones,* $\ell_n(\mathcal{L}; d(w,p))$, $\ell_n(\mathcal{L}; d(w,p)^\times)$, $\ell_n(\mathcal{I}; d(w,p))$ *y* $\ell_n(\mathcal{I}; d(w,p)^\times)$.

Aplicando la Proposición 3.1.5 y los resultados mencionados de [CDS09], obtenemos las siguientes conclusiones.

- Para $E = d(w,p)$, tenemos que

$$\ell_n(\mathcal{L}; d(w,p), F^\times) \stackrel{1}{=} M(F, \ell_n(\mathcal{L}; d(w,p))) \stackrel{1}{=} \begin{cases} M(F, d(w,p/n)^\times) & \text{si } n \leq p; \\ M(F, m_\Psi) & \text{si } n > p, \end{cases}$$

  donde $\Psi(N) = \left(\sum_{k=1}^{N} w(k)\right)^{n/p}$. Además, si $n > p$ y w es $\frac{n}{n-p}$-regular, entonces resulta que $\ell_n(\mathcal{L}; d(w,p), F^\times) = M(F, \ell_\infty) = \ell_\infty$.

  En particular, si $n \leq p$, tenemos que $d(w,p)$ es n-convexo con $M^{(n)}(d(w,p)) = 1$. Entonces por la Proposición 3.1.7, tenemos que $\ell_n(\mathcal{L}; d(w,p), F) = M(d(w,p)^n, F) = M(d(w,p/n), F)$.

- Para $E = d(w,p)^\times$, tenemos que

$$\ell_n(\mathcal{L}; d(w,p)^\times, F^\times) \stackrel{1}{=} M(F, \ell_n(\mathcal{L}; d(w,p)^\times)) \stackrel{1}{=} \begin{cases} M(F, \ell_\infty) = \ell_\infty & \text{si } n' \leq p; \\ M(F, d(w^{\frac{n'}{n'-p}}, \frac{p'}{p'-n})) & \text{si } 1 < p < n' \\ M(F, d(w^n, 1)) & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

Aplicando la Proposición 3.3.2 y usando que $\mathcal{I}^* = \mathcal{L}$, obtenemos los espacios de sucesiones asociados a $\mathcal{I}$ en espacios de Lorentz.

$$\ell_n(\mathcal{I}; d(w,p), F^\times) = \ell_n(\mathcal{L}; d_\times(w,p), F)^\times,$$

$$\ell_n(\mathcal{I}; d(w,p)^\times, F^\times) = \ell_n(\mathcal{L}; d(w,p), F)^\times,$$

$$\ell_n(\mathcal{I}; d_\times(w,p), F)^\times = \ell_n(\mathcal{L}; d(w,p), F^\times).$$

Calculemos ahora los espacios de multiplicadores en el caso que $F = \ell_q$. Afirmamos que:

$$M\left(\ell_q, d(w,p)\right) = \begin{cases} d\left(w^{\frac{q}{q-p}}, \frac{pq}{q-p}\right) & \text{si } p < q; \\ \ell_\infty & \text{si } p \geq q. \end{cases}$$

En efecto, para el caso $p \geq q$, veamos que si $\alpha \in \ell_\infty$, entonces $\alpha \in M\left(\ell_q, d(w,p)\right)$. Sea $\beta \in \ell_q$, por ser $p \geq q$, tenemos que β^p pertenece a ℓ_1 y entonces $(\beta^*)^p$ también pertenece a ℓ_1, luego

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |\alpha^*(k)|^p |\beta^*(k)|^p w(k) < \infty,$$

para todo $\alpha \in \ell_\infty$.

En el caso que $p < q$,

$$\begin{aligned}
\|\alpha\|_{M(\ell_q, d(w,p))} &= \sup_{\beta \in B_{\ell_q}} \|\alpha\beta\|_{d(w,p)} \\
&= \sup_{\beta \in B_{\ell_q}} \sup_{\sigma \in \Sigma_{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_\sigma(k)|^p \cdot |\beta_\sigma(k)|^p \cdot w(k) \right)^{1/p} \\
&= \sup_{\sigma \in \Sigma_{\mathbb{N}}} \sup_{\beta \in B_{\ell_q}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_\sigma(k)|^p \cdot |\beta_\sigma(k)|^p \cdot w(k) \right)^{1/p} \\
&= \sup_{\sigma \in \Sigma_{\mathbb{N}}} \sup_{\beta \in B_{\ell_q}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_\sigma(k)|^p \cdot |\beta(k)|^p \cdot w(k) \right)^{1/p} \\
&= \sup_{\sigma \in \Sigma_{\mathbb{N}}} \sup_{\gamma \in B_{\ell_{\frac{q}{p}}}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_\sigma(k)|^p \cdot |\gamma(k)| \cdot w(k) \right)^{1/p} \\
&= \sup_{\sigma \in \Sigma_{\mathbb{N}}} \left(\|\alpha_\sigma^p \cdot w\|_{(\frac{q}{p})'} \right)^{1/p} \\
&= \sup_{\sigma \in \Sigma_{\mathbb{N}}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_\sigma(k)|^{p(\frac{q}{p})'} \cdot w(k)^{(\frac{q}{p})'} \right)^{\frac{1}{p(\frac{q}{p})'}} \\
&= \|\alpha\|_{d\left(w^{(\frac{q}{p})'}, p(\frac{q}{p})'\right)} = \|\alpha\|_{d\left(w^{\frac{q}{q-p}}, \frac{pq}{q-p}\right)}.
\end{aligned}$$

Capítulo 4

Resultados de coincidencia entre un ideal y su núcleo minimal

Una pregunta natural en la teoría de operadores multilineales —y de polinomios homogéneos también— es la de encontrar condiciones bajo las cuales un ideal $\mathfrak{A}$ coincide isométricamente con su núcleo minimal $\mathfrak{A}^{min}$. En [Ale85a, Ale85b, BR01, CD00, CG11, Lew77] y [DF93, 33] se plantean problemas de esta misma naturaleza. La razón por la que uno se pregunta este tipo de cuestiones es que, en muchos casos, esta coincidencia permite dar una representación tensorial del ideal. Frecuentemente, el producto tensorial hereda algunas de las características estructurales que tenían los espacios involucrados en dicho producto. Por ejemplo, un resultado conocido de Gelbaum y Gil de Lamadrid [GGL61, GdL63] dice que el producto tensorial $(X_1\tilde{\otimes}_\alpha X_2)$ tiene base de Schauder si ambos espacios X_1 y X_2 tienen base. Esta idea puede extenderse al producto tensorial de un número arbitrario de espacios definiendo el orden adecuado recursivamente, ya que el producto tensorial es asociativo (ver comentarios antes del Teorema 4.1.17).

Otras propiedades —como ser separable, ser Asplund o tener la propiedad de Radon-Nikodým— también se preservan por el producto tensorial en muchos casos (ver [Bu03, BB06, BDDO03, CG11, RS82]). Entonces, tener una representación tensorial de un ideal y este tipo de resultados de transferencia nos permiten deducir propiedades sobre el espacio $\mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y)$. Es más, como los elementos de $\mathfrak{A}^{min}$ generalmente pueden aproximarse por operadores de tipo finito (ver 1.1.1), obtenemos esta misma propiedad para el ideal $\mathfrak{A}$.

El Teorema de representación para ideales minimales 1.2.4 nos dice que hay una inclusión natural de norma uno de $(X_1'\widetilde{\otimes}\dots\widetilde{\otimes}X_n'\widetilde{\otimes}Y;\alpha)$ en $\mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y)$ definida por

$$\varrho : (X_1'\widetilde{\otimes}\cdots\widetilde{\otimes}X_n'\widetilde{\otimes}Y;\alpha) \xrightarrow{\quad 1 \quad}\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{A}^{min}(X_1,\dots,X_n;Y) \hookrightarrow^{\le 1} \mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y)\ , \quad (4.1)$$

donde α es la norma tensorial asociada a $\mathfrak{A}$. Luego, para responder a la pregunta planteada en este capítulo, nos va a interesar saber cuándo esta inclusión natural resulta un isomorfismo isométrico. Es importante notar que $\mathfrak{A}^{min}(X_1,\dots,X_n;Y) \overset{1}{=} \mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y)$ si y solo si ϱ es una metric surjection.

Por último, para estudiar cuándo la aplicación ϱ es efectivamente una metric surjection, es necesario estudiar una condición sobre la norma tensorial asociada. Un ingrediente fundamental en [Lew77] y [CG11], donde se estudian resultados de coincidencia en el contexto de operadores lineales y formas multilineales (y polinomios homogéneos escalares), respectivamente, es la propiedad de Radon-Nikodým para normas tensoriales. Basados en aquellas definiciones, daremos en este capítulo una versión vectorial de esta noción pero no para normas tensoriales sino para ideales de operadores multilineales.

4.1. Resultados de coincidencia en ideales de operadores multilineales

Para dar una definición de la propiedad de Radon-Nikodým para ideales de operadores multilineales, recordemos las definiciones de los siguientes espacios, para J un conjunto de índices cualquiera.

$$\begin{aligned}
\ell_1(J) &= \{(x_j)_{j\in J} \ : \ \sum_{j\in J} |x_j| < \infty\} \\
\ell_\infty(J) &= \{(x_j)_{j\in J} \ : \ \sup_{j\in J} |x_j| < \infty\} \\
c_0(J) &= \overline{span\{e_k \ : k \in J\}}, \text{ donde } (e_k)_j = \delta_{j,k}, \text{ para } j \in J.
\end{aligned}$$

Para estos espacios vale que $c_0(J)' = \ell_1(J)$ y que $\ell_1(J)' = \ell_\infty(J)$.

Ahora si, dados $\mathfrak{A} \sim \alpha$ un ideal de operadores multilineales e Y un espacio de Banach, decimos que $\mathfrak{A}$ tiene la *Y-propiedad de Radon-Nikodým* (Y-RNp) si

$$\big(\ell_1(J_1)\widetilde{\otimes} \dots \widetilde{\otimes}\ell_1(J_n)\widetilde{\otimes}Y;\alpha\big) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{A}\big(c_0(J_1),\dots,c_0(J_n);Y\big), \tag{4.2}$$

para todo $J_1,\dots,J_n$ conjuntos de índices.
Si $\mathfrak{A}$ tiene la Y-propiedad de Radon-Nikodým para todo Y, decimos que $\mathfrak{A}$ tiene la *propiedad de Radon-Nikodým vectorial* (vector-RNp).

Es decir, si $\mathfrak{A}$ tiene la Y-RNp, entonces se tiene que

$$\mathfrak{A}\big(c_0(J_1),\dots,c_0(J_n);Y\big) \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}\big(c_0(J_1),\dots,c_0(J_n);Y\big)$$

para todo $J_1,\dots,J_n$ conjuntos de índices, ya que la propiedad (4.2) dice que la aplicación ϱ dada en la ecuación (4.1) resulta una metric surjection.

Antes de comenzar con los resultados de este capítulo, haremos comentarios acerca de la relación entre nuestra definición de la propiedad de Radon-Nikodým para ideales de operadores multilineales y las previamente definidas en [Lew77] y [CG11] para normas tensoriales.

En [Lew77] (ver [DF93, Section 33]), se dice que una norma tensorial β finitamente generada de orden 2 tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* si para todo espacio de Banach X se satisface

$$X'\widetilde{\otimes}_\beta \ell_1 \overset{1}{=} (X \otimes_{\beta'} c_0)'.$$

Esta propiedad se traduce en términos de ideales de operadores lineales como

$$\mathcal{A}^{min}(X;\ell_1) \overset{1}{=} \mathcal{A}(X;\ell_1),$$

donde $\mathcal{A}$ es el ideal de operadores lineales maximal asociado a la norma β. Seguido, se prueba que esta identidad puede ser extendida a

$$\mathcal{A}^{min}(X;\ell_1(J)) \overset{1}{=} \mathcal{A}(X;\ell_1(J)),$$

para todo conjunto de índices J.

Es importante destacar en este momento, que nosotros buscamos propiedades donde el rol que ocupa el espacio ℓ_1 pertenezca al dominio del operador. De alguna manera, queremos escribir estas mismas propiedades para la norma tensorial traspuesta. Es decir, si β tiene la propiedad de Radon-Nikodým, entonces

$$\ell_1\widetilde{\otimes}_{(\beta)^t} X' \overset{1}{=} (c_0 \otimes_{(\beta^t)'} X)'.$$

En consecuencia,

$$(\mathcal{A}^{dual})^{min}(c_0(J);X') \overset{1}{=} \mathcal{A}^{dual}(c_0(J);X'),$$

para todo J conjunto de índices, donde $\mathcal{A}^{dual}$ es el ideal maximal asociado a la norma β^t (ver [DF93, Section 17.8]). En definitiva, la propiedad de Radon-Nikodým para normas tensoriales de orden 2 está relacionada con una identidad entre un ideal de operadores lineales maximal y su núcleo minimal sobre $c_0(J)$.

Por otro lado, en [CG11], se dice que una norma tensorial δ finitamente generada de orden n tiene la *propiedad de Radon-Nikodým simétrica* (sRNp) si

$$\left(\tilde{\otimes}^n \ell_1;\delta\right) = \left(\tilde{\otimes}^n c_0;\delta'\right)'.$$

En términos de ideales de formas multilineales dice que, si $\mathfrak{A}$ es el ideal maximal asociado a δ,

$$\mathfrak{A}^{min}(c_0,\ldots,c_0) \overset{1}{=} \mathfrak{A}(c_0,\ldots,c_0).$$

También se muestra que dicha propiedad puede extenderse a espacios c_0 generales. Es decir,

$$\mathfrak{A}^{min}(c_0(J_1),\ldots,c_0(J_n)) \overset{1}{=} \mathfrak{A}(c_0(J_1),\ldots,c_0(J_n)),$$

para todo $J_1,\ldots,J_n$ conjuntos de índices.

Como puede verse, nuestra definición de la propiedad de Radon-Nikodým para ideales de operadores multilineales está estrechamente relacionada con las anteriores dadas para normas tensoriales. El hecho de definirla para normas tensoriales, obliga a relacionar un ideal maximal con su núcleo minimal. Nosotros queremos relajar esa condición y considerar un ideal no necesariamente maximal, es por eso que definimos esta propiedad sobre ideales de operadores multilineales directamente. Notemos también, que las propiedades definidas para normas tensoriales involucran al espacio c_0 clásico y luego se deduce que la propiedad también vale para espacios c_0 generales. Nuestro primer objetivo es establecer dicha relación. Para un ideal de operadores multilineales $\mathfrak{A}$, buscamos condiciones sobre el espacio Y que aseguren que a partir de la siguiente propiedad

$$\mathfrak{A}^{min}(c_0, \ldots, c_0; Y) \stackrel{1}{=} \mathfrak{A}(c_0, \ldots, c_0; Y),$$

se pueda deducir

$$\mathfrak{A}^{min}(c_0(J_1), \ldots, c_0(J_n); Y) \stackrel{1}{=} \mathfrak{A}(c_0(J_1), \ldots, c_0(J_n); Y),$$

para todo $J_1, \ldots, J_n$ conjunto de índices. Es decir, la Y-propiedad de Radon-Nikodým.

Para lograr este cometido, necesitamos antes demostrar una versión vectorial del teorema de Littlewood-Bogdanowicz-Pełczyński (ver [Lit30, Bog57, Pel57] y también [Din99]) establece que toda forma multilineal $T : c_0 \times \cdots \times c_0 \to \mathbb{K}$ es aproximable. Más precisamente, probaremos que si Y no contiene una copia (isomorfa) de c_0, entonces se tiene que $\mathcal{L}(^n c_0; Y) = \mathcal{L}_{app}(^n c_0; Y)$. Este resultado puede obtenerse a partir de lo elaborado en [GG94], sin embargo, preferimos acá dar una demostración independiente.

Observación 4.1.1. Debido a que c_0 no contiene copia de ℓ_1 y además $c_0' = \ell_1$ es separable, es sabido que $\mathcal{L}_{app}(^n c_0; Y) = \mathcal{L}_{wsc}(^n c_0; Y)$ (las demostraciones de estos hechos para polinomios dadas en [AHV83, Proposition 2.12] y [AP80, Proposition 2.7] se trasladan de forma natural al contexto de operadores multilineales). Además, si toda aplicación k-lineal $T \in \mathcal{L}(^k c_0; Y)$ es débilmente secuencialmente continua en 0 para todo $1 \leq k \leq n$, entonces $\mathcal{L}_{app}(^n c_0; Y) = \mathcal{L}_{wsc}(^n c_0; Y)$ (este resultado aparece en [DG01, Corollary 1.7] para polinomios escalares y puede extenderse canónicamente a operadores multilineales).

Recordemos que una serie (formal) $\sum_{j \in \mathbb{N}} x_j$ en un espacio de Banach X es *débilmente incondicionalmente de Cauchy* (WUC) si para todo $x' \in X'$, vale que $\sum_{j \in \mathbb{N}} |x'(x_j)| < \infty$.

Proposición 4.1.2. $\mathcal{L}(^n c_0; Y) = \mathcal{L}_{app}(^n c_0; Y)$ *si y solo si* Y *no contiene una copia de* c_0.

Demostración. Si $Y = c_0$ es fácil ver que existe un operador multilineal T que pertenece a $\mathcal{L}(^n c_0; c_0)$ pero que no pertenece a $\mathcal{L}_{app}(^n c_0; c_0)$. En efecto, tomemos $T \in \mathcal{L}(^n c_0; c_0)$ dado por

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_1(1) \cdots x_{n-1}(1) \cdot x_n(j)\big)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Si T fuera aproximable, entonces el operador lineal acotado de c_0 en c_0 dado por evaluar en e_1 en las primeras $(n-1)$-coordenadas y dejar libre la última también resultaría aproximable, pero

$$T(e_1, \ldots, e_1, \ \cdot\ ) = Id_{c_0}(\ \cdot\ )$$

y la identidad de c_0 no es aproximable. Luego $T \in \mathcal{L}(^n c_0; c_0) \setminus \mathcal{L}_{app}(^n c_0; c_0)$. El caso en que Y contiene una copia de c_0 se deduce de este hecho.

Recíprocamente, supongamos que Y no contiene una copia de c_0. Por la observación anterior, basta ver que, para todo $1 \leq k \leq n$, se tiene que todo operador k-lineal continuo de $c_0 \times \cdots \times c_0$ en Y es débilmente secuencialmente continuo en el origen. Supongamos que no, es decir, que existen $1 \leq r \leq n$ y un operador multilineal $T \in \mathcal{L}(^r c_0; Y)$ que no es débilmente secuencialmente continuo en el origen. Usando la continuidad de la norma de T, la base de c_0 y tomando subsucesiones (si fuera necesario), podemos construir sucesiones $(u_j^1)_j, \ldots, (u_j^r)_j \subseteq c_0$ y una sucesión estrictamente creciente de números naturales $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\left\|T(u_j^1, \ldots, u_j^r)\right\|_Y \geq \delta, \tag{4.3}$$

para algún $\delta > 0$, con

$$u_j^i = \sum_{l=1}^{k_{j+1}} x_j^i(l) \cdot e_l, \qquad \left\|\sum_{l=1}^{k_j} x_j^i(l) \cdot e_l\right\| \leq \frac{1}{2^j} \qquad \text{y} \qquad \left\|\sum_{l=k_j+1}^{k_{j+1}} x_j^i(l) \cdot e_l\right\| = 1,$$

para todo $1 \leq i \leq r$ y $j \in \mathbb{N}$. Llamemos v_j^i a

$$v_j^i = \sum_{l=k_j+1}^{k_{j+1}} x_j^i(l) \cdot e_l,$$

entonces, $\|v_j^i\| = 1$. Por el principio de selección de Bessaga-Pełczyński [AK06, Proposition 1.3.10] (o ver Apéndice A.5.2), se tiene que $(v_j^i)_j$ es una base en bloque de un subespacio de c_0 equivalente a la base canónica de c_0 para cada $1 \leq i \leq r$. En consecuencia,

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left|y'\left(T(v_j^1, \ldots, v_j^r)\right)\right| \leq \|y' \circ T\| < \infty$$

para todo $y' \in Y'$ [Zal93, Proposition 2], ya que $y' \circ T \in \mathcal{L}(^r c_0)$. Luego, la serie formal $\sum_{j\in\mathbb{N}} T(v_j^1, \ldots, v_j^r)$ es WUC. El hecho de que Y no contiene una copia de c_0, implica que la serie $\sum_{j\in\mathbb{N}} T(v_j^1, \ldots, v_j^r)$ es incondicionalmente convergente [AK06, Theorem 2.4.11], de donde se deduce que $\lim\limits_{j\to\infty} T(v_j^1, \ldots, v_j^r) = 0$.

Ahora bien, teniendo en cuenta que $u_j^i = (u_j^i - v_j^i) + v_j^i$ y que $\|u_j^i - v_j^i\| \leq 1/2^j$, se deduce que

$$\|T(u_j^1, \ldots, u_j^r)\| \quad \leq \quad \|T(v_j^1, \ldots, v_j^r)\| + \|T\| \left(\sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} \frac{1}{2^{lj}}\right),$$

usando la multilinealidad de T y la desigualdad triangular.

Como los dos términos del lado derecho de la desigualdad tienden a cero cuando j tiende a infinito, se contradice la condición (4.3). En definitiva, probamos que si Y no contiene una copia de c_0, todo operador k-lineal en $\mathcal{L}(^k c_0; Y)$ es débilmente secuencialmente continuo en el origen para todo $1 \leq k \leq n$.

$\square$

Como habíamos anticipado, veremos ahora que bajo ciertas condiciones es suficiente chequear la propiedad (4.2) para $J_1 = \cdots = J_n = \mathbb{N}$. Nuestra demostración se inspira en la prueba de [CG11, Proposition 3.2].

Proposición 4.1.3. *Sea $\mathfrak{A} \sim \alpha$ un ideal de operadores multilineales que satisface*

$$\big(\ell_1 \tilde{\otimes} \dots \tilde{\otimes} \ell_1 \tilde{\otimes} Y; \alpha\big) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{A}(c_0, \dots, c_0; Y).$$

Si Y no contiene una copia de c_0 o si $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{L}_{wsc}$, entonces $\mathfrak{A}$ tiene la Y-RNp.

En otras palabras, si $\mathfrak{A}(c_0, \dots, c_0; Y)$ coincide isométricamente con $\mathfrak{A}^{min}(c_0, \dots, c_0; Y)$, podemos asegurar la existencia de una metric surjection sobre espacios c_0 más generales. Es decir,

$$\mathfrak{A}\big(c_0(J_1), \dots, c_0(J_n); Y\big) \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}\big(c_0(J_1), \dots, c_0(J_n); Y\big),$$

para todo $J_1, \dots, J_n$ conjuntos de índices.

Demostración. Sea $T \in \mathfrak{A}\big(c_0(J_1), \dots, c_0(J_n); Y\big)$. Consideremos el conjunto de índices dado por

$$L = \{(j_1, \dots, j_n) : T(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \neq 0\}.$$

Afirmamos que L es un conjunto numerable. En efecto, supongamos que no. Entonces, existe un conjunto de índices distintos dos a dos $\big(j_1^k, \dots, j_n^k\big)_{k \in \mathbb{N}}$ y un $\varepsilon > 0$ tales que

$$\Big|T(e_{j_1^k}, \dots, e_{j_n^k})\Big| > \varepsilon, \tag{4.4}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Pues, si para todo $\varepsilon = 1/m$, con $m \in \mathbb{N}$, se tienen finitos elementos de L que satisfacen $|T(e_{j_1}, \dots, e_{j_n})| > \varepsilon$, entonces el conjunto L resultaría a lo sumo numerable y estamos suponiendo que no lo es. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la sucesión de las primeras coordenadas j_1^k tiene todos sus elementos distintos dos a dos. Pasando por subsucesiones, podemos asumir también que $e_{j_i^k}$ tiende débilmente a cero para cada $1 \leq i \leq n$.

Ahora bien, si Y no contiene una copia de c_0, aplicando la Proposición 4.1.2 sobre las sucesiones $(e_{j_1^k}), \dots, (e_{j_n^k})$ —que son equivalentes a una base de c_0—, obtenemos que $T(e_{j_1^k}, \dots, e_{j_n^k})$ tiende a cero (por ser débilmente secuencialmente continua). Esto contradice la condición (4.4). Por otro lado, si suponemos $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{L}_{wsc}$, se obtiene trivialmente la contradicción. En conclusión, en ambos casos obtenemos que el conjunto de índices L es numerable.

Sea $\Omega_k : J_1 \times \cdots \times J_n \longrightarrow J_k$ la aplicación dada por

$$\Omega(j_1, \ldots, j_n) = j_k$$

y llamemos $L_k := \Omega_k(L) \subset J_k$.
Consideremos las aplicaciones $\xi_k : c_0(J_k) \to c_0(L_k)$ e $\imath_k : c_0(L_k) \to c_0(J_k)$ definidas por

$$\xi_k\big((a_j)_{j \in J_k}\big) = (a_j)_{j \in L_k},$$

$$\imath_k\big((a_j)_{j \in L_k}\big) = (b_j)_{j \in J_k},$$

donde b_j es igual a a_j si $j \in L_k$ y vale cero en los otros casos. Si definimos el operador $\overline{T}$ como $\overline{T} := T \circ (\imath_1, \ldots, \imath_n)$, entonces $\overline{T} \in \mathfrak{A}\big(c_0(L_1), \ldots, c_0(L_n); Y\big)$ y $\|\overline{T}\|_{\mathfrak{A}} \leq \|T\|_{\mathfrak{A}}$. Es más, como $c_0(J) = \overline{span\{e_k \ : \ k \in J\}}$ (donde $(e_k)_j = \delta_{k,j}$, para $j \in J$), se deduce que $\overline{T} \circ (\xi_1, \ldots, \xi_n) = T$. En consecuencia, $\|T\|_{\mathfrak{A}} = \|\overline{T}\|_{\mathfrak{A}}$.

Por último, notando que $c_0(L_k) = c_0$, resulta que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\big(\ell_1(L_1)\widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes}\ell_1(L_n)\widetilde{\otimes}Y; \alpha\big) \arrow[r, two heads, "1"] \arrow[d, "\xi_1' \otimes \cdots \otimes \xi_n' \otimes Id_Y"'] & \mathfrak{A}\big(c_0(L_1), \ldots, c_0(L_n); Y\big) \arrow[d] & S \arrow[d, squiggly] \\
\big(\ell_1(J_1)\widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes}\ell_1(J_n)\widetilde{\otimes}Y; \alpha\big) \arrow[r, "R"] & \mathfrak{A}\big(c_0(J_1), \ldots, c_0(J_n); Y\big) & S \circ (\xi_1, \ldots, \xi_n)
\end{tikzcd}.$$

Además, la aplicación $(\xi_1' \otimes \cdots \otimes \xi_n' \otimes Id_Y)$ es una isometría ya que $\ell_1(L_k)$ es un subespacio 1-complementado de $\ell_1(J_k)$ (via $\imath_k'$). Luego, R es una metric surjection como queríamos ver. $\square$

La Proposición 4.1.3 nos da un modo de saber si un ideal dado posee la Y-propiedad de Radon-Nikodým. Para formular el resultado principal de este capítulo —el resultado de coincidencia para ideales de operadores multilineales— necesitamos antes recordar algunas definiciones.

Para $1 \leq k \leq n$, se define una aplicación canónica llamada la *k-extensión de Arens*,

$$Ext_k : \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y) \to \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_k'', X_{k+1}, \ldots, X_n; Y''),$$

de la siguiente forma:
dado $T \in \mathcal{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, consideramos la forma $(n+1)$-lineal asociada a $(J_Y \circ T)$ que llamamos $\overleftarrow{(J_Y \circ T)} : X_1 \times \cdots \times X_n \times Y' \to \mathbb{K}$. Entonces,

$$Ext_k(T)(x_1, \ldots, x_k'', \ldots, x_n)(y') := x_k''\left(z \mapsto \overleftarrow{(J_Y \circ T)}(x_1, \ldots, x_{k-1}, z, x_{k+1}, \ldots, x_n, y')\right).$$

Decimos que $\mathfrak{A}$ es un *ideal Arens estable para* Y si la aplicación

$$Ext_k : \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y) \to \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_{k-1}, X_k'', X_{k+1}, \ldots, X_n; Y)$$

está bién definida y resulta una isometría para todo $1 \leq k \leq n$. Notemos que la condición anterior dice que la imagen de toda extensión de Arens se mantiene en el espacio Y. Decimos que $\mathfrak{A}$ es un *ideal Arens estable* si $\mathfrak{A}$ es Arens estable para Y, para todo espacio de Banach Y. Es importante observar que para todo espacio dual Y', todo ideal de operadores multilineales maximal es Arens estable para Y' (ver, por ejemplo, [DF93, Extension Lemma 13.2]).

Por otro lado, decimos que $\mathfrak{A}$ es un *ideal extendible* si verifica que para $X_1, \ldots, X_n$ espacios de Banach, $Z_1, \ldots, Z_n$ superespacios de $X_1, \ldots, X_n$ respectivamente y para todo operador multilineal $T \in \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, existe $\widetilde{T} \in \mathfrak{A}(Z_1, \ldots, Z_n; Y)$, una extensión de T, con

$$\|\widetilde{T}\|_{\mathfrak{A}(Z_1,\ldots,Z_n;Y)} = \|T\|_{\mathfrak{A}(X_1,\ldots,X_n;Y)}.$$

Por ejemplo, los ideales $\mathcal{PI}$ y $\mathcal{E}$ son extendibles. Estas propiedades se estudiaron en el contexto de ideales de polinomios en [Car99, CZ99, KR98].

Observación 4.1.4. Si un ideal de operadores multilineales $\mathfrak{A}$ es extendible, entonce su norma tensorial asociada α es proyectiva en las primeras n coordenadas (ver [Gal12, Chapter 3]). En otras palabras, si $q_1 : X_1 \overset{1}{\twoheadrightarrow} Y_1, \ldots, q_n : X_n \overset{1}{\twoheadrightarrow} Y_n$ son metric surjections, entonces la aplicación

$$q_1 \otimes \ldots q_n \otimes id_Z : (X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Z, \alpha) \overset{1}{\twoheadrightarrow} (Y_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} Y_n \tilde{\otimes} Z, \alpha)$$

es una metric surjection.

A partir de estas definiciones, demostraremos algunos resultados con el objetivo de establecer un resultado de coincidencia entre un ideal de opeardores multilineales y su núcleo minimal.

Todo espacio de Banach X, tiene asociadas dos aplicaciones naturales, la inclusión canónica de X en $\ell_\infty(B_{X'})$ y la proyección de $\ell_1(B_X)$ sobre X.

$$\begin{array}{rcl} I_X : X & \overset{1}{\hookrightarrow} & \ell_\infty(B_{X'}) \\ x & \mapsto & (x'(x))_{x'}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Q_X : \ell_1(B_X) & \overset{1}{\twoheadrightarrow} & X \\ (a_x)_x & \mapsto & \displaystyle\sum_{x \in B_X} a_x \cdot x. \end{array}$$

Para $\mathfrak{A}$, un ideal de operadores multilineales Arens estable para Y, para cada $1 \leq k \leq n$ definimos la aplicación

$$\Psi_k : \mathfrak{A}\big(X_1, \ldots, X_{k-1}, c_0(B_{X_k'}), X_{k+1}, \ldots, X_n; Y\big) \to \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$$

dada por

$$\Psi_k(T) := Ext_k(T) \circ \big(Id_{X_1}, \ldots, Id_{X_{k-1}}, I_{X_k}, Id_{X_{k+1}}, \ldots, Id_{X_n}\big). \tag{4.5}$$

Proposición 4.1.5. *Si $\mathfrak{A} \sim \alpha$ es Arens estable para Y, entonces el siguiente diagrama es conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
\Big((\widetilde{\otimes}_{j=1}^{k-1} X_j')\widetilde{\otimes}\ell_1(B_{X_k'})\widetilde{\otimes}(\widetilde{\otimes}_{j=k+1}^{n} X_j')\widetilde{\otimes}Y;\alpha\Big) \arrow[r] \arrow[d, "(\otimes_{j=1}^{k-1} Id_{X_j'})\otimes Q_{X_k'}\otimes(\otimes_{j=k+1}^{n} Id_{X_j'})\otimes Id_Y"] & \mathfrak{A}\big(X_1\dots,X_{k-1},c_0(B_{X_k'}),X_{k+1},\dots,X_n;Y\big) \arrow[d, "\Psi_k"] \\
\Big((\widetilde{\otimes}_{j=1}^{k-1} X_j')\widetilde{\otimes}X_k'\widetilde{\otimes}(\widetilde{\otimes}_{j=k+1}^{n} X_j')\widetilde{\otimes}Y;\alpha\Big) \arrow[r] & \mathfrak{A}\big(X_1\dots,X_{k-1},X_k,X_{k+1},\dots,X_n;Y\big).
\end{tikzcd}$$

Demostración. Para verificar que efectivamente es un diagrama conmutativo, hagamos la cuenta en el caso $k=1$ para simplificar la escritura. Tomemos entonces $a=(a_{x'})_{x'\in B_{X_1'}}$ un elemento de $\ell_1(B_{X_1'})$ y consideremos un tensor elemental

$$z = a\otimes x_2'\otimes\cdots\otimes x_n'\otimes y \in \big(\ell_1(B_{X_1'})\widetilde{\otimes}X_2'\widetilde{\otimes}\cdots\widetilde{\otimes}X_n'\widetilde{\otimes}Y;\alpha\big).$$

Por un lado, aplicamos el operador $Q_{X_1'}\otimes Id_{X_2'}\otimes\cdots\otimes Id_{X_n'}\otimes Id_Y$ y obtenemos el tensor

$$\widetilde{z} = Q_{X_1'}(a)\otimes x_2'\otimes\cdots\otimes x_n'\otimes y\in\big(X_1'\widetilde{\otimes}\cdots\widetilde{\otimes}X_n'\widetilde{\otimes}Y;\alpha\big),$$

que representa a $T_{\widetilde{z}}\in\mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y)$ dado por

$$T_{\widetilde{z}}(x_1,\dots,x_n) = Q_{X_1'}(a)(x_1)\cdot x_2'(x_2)\cdots x_n'(x_n)\cdot y.$$

Por el otro, z se asocia a $T_z\in\mathfrak{A}\big(c_0(B_{X_1'}),X_2,\dots,X_n;Y\big)$ dado por

$$T_z(b,x_2,\dots,x_n) = a(b)\cdot x_2'(x_2)\cdots x_n'(x_n)\cdot y.$$

Entonces, al actuar el operador Ψ_1 produce:

$$\begin{aligned}
y'\big(\Psi_1(T_z)(x_1,\dots,x_n)\big) &= \Big[Ext_1(T_z)\big(I_{X_1}(x_1),x_2,\dots,x_n\big)\Big](y') \\
&= I_{X_1}(x_1)\Big[b\mapsto \overleftarrow{(J_Y\circ T_z)}(b,x_2,\dots,x_n,y')\Big] \\
&= I_{X_1}(x_1)\Big[b\mapsto y'\big(T_z(b,x_2,\dots,x_n)\big)\Big] \\
&= I_{X_1}(x_1)\Big[b\mapsto a(b)\cdot x_2'(x_2)\cdots x_n'(x_n)\cdot y'(y)\Big] \\
&= \left(\sum_{x'\in B_{X_1'}} a_{x'}\cdot x'(x_1)\right)\cdot x_2'(x_2)\cdots x_n'(x_n)\cdot y'(y) \\
&= Q_{X_1'}(a)(x_1)\cdot x_2'(x_2)\cdots x_n'(x_n)\cdot y'(y) \\
&= y'\big(T_{\widetilde{z}}(x_1,\dots,x_n)\big).
\end{aligned}$$

Luego, $\Psi_1(T_z)=T_{\widetilde{z}}$. Como este resultado vale para tensores elementales, por linealidad y continuidad se extiende a cualquier tensor $z\in\big(\ell_1(B_{X_1'})\widetilde{\otimes}X_2'\widetilde{\otimes}\cdots\widetilde{\otimes}X_n'\widetilde{\otimes}Y;\alpha\big)$. $\square$

A continuación, veremos un resultado que será de suma importancia a lo largo de este capítulo. Para demostrarlo haremos uso del Teorema de Lewis-Stegall (ver [DF93, 33.1] o [DU77, Ch5.Th8]), que recordamos a continuación.

Teorema 4.1.6 (Lewis-Stegall). *Si X es un espacio de Banach con la propiedad de Radon-Nikodým, entonces para todo operador lineal $B \in \mathcal{L}\big(L_1(\mu); X\big)$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un operador lineal $A \in \mathcal{L}\big(L_1(\mu); \ell_1(B_X)\big)$ con $\|A\| \leq (1+\varepsilon)$ tal que el siguiente diagrama resulta conmutativo*

$$\begin{tikzcd} L_1(\mu) \arrow[rr, "B"] \arrow[dr, "A"'] & & X \\ & \ell_1(B_X) \arrow[ur, "Q_X"'] & \end{tikzcd},$$

Probemos la proposición, recordemos que Ψ_k está definida en (4.5).

Proposición 4.1.7. *Sean $X_1, \ldots, X_n, Y$ espacios de Banach y sea $\mathfrak{A}$ un ideal extendible y Arens estable para Y. Si X_k es un espacio Asplund, entonces Ψ_k es una metric surjection.*

Demostración. Asumimos, una vez más, que $k = 1$ por simplicidad, ya que los otros casos son análogos. Por Proposición 4.1.5, vale que Ψ_1 tiene norma menor o igual a uno, pues

$$\|\Psi_1(T_z)\|_{\mathfrak{A}} = \|T_{\widetilde{z}}\|_{\mathfrak{A}} = \alpha(\widetilde{z}) \leq \alpha(z) = \|T_z\|_{\mathfrak{A}}.$$

Como $\mathfrak{A}$ es extendible, dado $T \in \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, existe $\widetilde{T} \in \mathfrak{A}\big(\ell_\infty(B_{X_1'}), X_2, \ldots, X_n; Y\big)$ una extensión de T con la misma norma en $\mathfrak{A}$. Además, X_1' tiene la propiedad de Radon-Nikodým, pues X_1 es un espacio Asplund. Por el Teorema de Lewis-Stegall (Teorema 4.1.6), dado $\varepsilon > 0$, se tiene que el operador adjunto de la inclusión canónica $I_{X_1} : X_1 \to \ell_\infty(B_{X_1'})$ se factoriza a través de $\ell_1(B_{X_1'})$ vía la factorización

$$\begin{tikzcd} \ell_\infty(B_{X_1'})' \arrow[rr, "I_{X_1}'"] \arrow[dr, "A"'] & & X_1' \\ & \ell_1(B_{X_1'}) \arrow[ur, "Q_{X_1'}"'] & \end{tikzcd},$$

con $\|A\| \leq (1+\varepsilon)$.

Definimos $S : c_0(B_{X_1'}) \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$ el operador n-lineal dado por

$$S(a, x_2, \ldots, x_n) = Ext_1(\widetilde{T})\big(A' \circ J_{c_0(B_{X_1'})}(a), x_2, \ldots, x_n\big).$$

Usando la propiedad de ideal y el hecho de que $\mathfrak{A}$ es Arens estable para Y (Ext_1 es un isometría), se deduce que $S \in \mathfrak{A}\big(c_0(B_{X_1'}), X_2, \ldots, X_n; Y\big)$ y

$$\|S\|_{\mathfrak{A}} \leq \|Ext_1(\widetilde{T})\|_{\mathfrak{A}} \cdot \|A' \circ J_{c_0(B_{X_1'})}\| \leq \|T\|_{\mathfrak{A}} \cdot (1+\varepsilon).$$

Nuestro objetivo es demostrar que $\Psi_1(S) = T$. Pues de ser así, dado un operador multilineal T, hallamos un operador multilineal S tal que $\Psi_1(S) = T$ con $\|S\|_{\mathfrak{A}} \leq \|T\|_{\mathfrak{A}} \cdot (1+\varepsilon)$. Es decir, Ψ_1 es una metric surjection.

Observemos que para $x_1 \in X_1$ y $a \in \ell_1(B_{X_1'})$, vale que

$$I_{X_1}(x_1)(a) = \big(x'(x_1)\big)_{x' \in B_{X_1'}} \Big((a_{x'})_{x' \in B_{X_1'}}\Big) = \sum_{x' \in B_{X_1'}} x'(x_1) \cdot a_{x'} = Q_{X_1'}(a)(x_1). \tag{4.6}$$

Afirmamos que

$$\overleftarrow{(J_Y \circ S)}(\,\cdot\,, x_2, \ldots, x_n, y') = A\left[b \mapsto y'\left(\widetilde{T}(b, x_2, \ldots, x_n)\right)\right], \tag{4.7}$$

donde $\left[b \mapsto y'\left(\widetilde{T}(b, x_2, \ldots, x_n)\right)\right]$ es un funcional lineal definido sobre $\ell_\infty(B_{X_1'})$.
En efecto, sea $a \in c_0(B_{X_1'})$, entonces

$$\begin{aligned}
A\left[b \mapsto y'\left(\widetilde{T}(b, x_2, \ldots, x_n)\right)\right](a) &= J_{c_0(B_{X_1'})}(a)\left(A\left[b \mapsto y'\left(\widetilde{T}(b, x_2, \ldots, x_n)\right)\right]\right) \\
&= A' \circ J_{c_0(B_{X_1'})}(a)\left[b \mapsto y'\left(\widetilde{T}(b, x_2, \ldots, x_n)\right)\right] \\
&= \left[Ext_1(\widetilde{T})\left(A' \circ J_{c_0(B_{X_1'})}(a), x_2, \ldots, x_n\right)\right](y') \\
&= y'\big(S(a, x_2, \ldots, x_n)\big) \\
&= \overleftarrow{(J_Y \circ S)}(\,\cdot\,, x_2, \ldots, x_n, y')(a).
\end{aligned}$$

Por último, verifiquemos que $\Psi_1(S) = T$. Sea $y' \in Y'$, aplicando las identidades (4.6) y (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned}
y'\big(\Psi_1(S)(x_1, \ldots, x_n)\big) &= y'\Big(Ext_1(S)\big(I_{X_1}(x_1), x_2, \ldots, x_n\big)\Big) \\
&= Ext_1(S)\big(I_{X_1}(x_1), x_2, \ldots, x_n\big)(y') \\
&= \big(I_{X_1}(x_1)\big)\left[\overleftarrow{(J_Y \circ S)}(\,\cdot\,, x_2, \ldots, x_n, y')\right] \\
&\overset{(4.6)}{=} Q_{X_1'}\left(\overleftarrow{(J_Y \circ S)}(\,\cdot\,, x_2, \ldots, x_n, y')\right)(x_1) \\
&\overset{(4.7)}{=} \left(Q_{X_1'} A\left[b \mapsto y'\left(\widetilde{T}(b, x_2, \ldots, x_n)\right)\right]\right)(x_1) \\
&= \left(I_{X_1}'\left[b \mapsto y'\left(\widetilde{T}(b, x_2, \ldots, x_n)\right)\right]\right)(x_1) \\
&= y'\left(\widetilde{T}\big(I_{X_1}(x_1), x_2, \ldots, x_n\big)\right) \\
&= y'\big(T(x_1, \ldots, x_n)\big),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Estamos en condiciones de enunciar nuestro teorema de tipo Lewis, un resultado de coincidencia para ideales de operadores multilineales.

Teorema 4.1.8. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios Asplund. Si $\mathfrak{A} \sim \alpha$ es un ideal extendible, Arens estable para Y y con la Y-RNp, entonces*

$$(X_1' \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} X_n' \widetilde{\otimes} Y; \alpha) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y). \tag{4.8}$$

En particular,

$$\mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y).$$

Demostración. Por Observación 4.1.4, las aplicaciones que bajan en la parte izquierda de la Figura 4.1 son todas metric surjections.

Figura 4.1: **Diagrama conmutativo usado en la prueba de 4.1.8**

$$\begin{tikzcd}
\big(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n \ell_1(B_{X_i'}) \widetilde{\otimes} Y; \alpha\big) \arrow[r, "\varrho_0"] \arrow[d, two heads, "\otimes_{i=1}^{n-1} Id_{\ell_1(B_{X_i'})} \otimes Q_{X_n'} \otimes Id_Y"] & \mathfrak{A}\big(c_0(B_{X_1'}), \ldots, c_0(B_{X_n'}); Y\big) \arrow[d, two heads, "\Psi_n"'] \\
\Big((\widetilde{\otimes}_{i=1}^{n-1} \ell_1(B_{X_i'})) \widetilde{\otimes} X_n' \widetilde{\otimes} Y; \alpha\Big) \arrow[r, "\varrho_1"] \arrow[d, two heads, "(\otimes_{i=1}^{n-2} Id_{\ell_1(B_{X_i'})}) \otimes Q_{X_{n-1}'} \otimes Id_{X_n'} \otimes Id_Y"] & \mathfrak{A}\big(c_0(B_{X_1'}), \ldots, c_0(B_{X_{n-1}'}), X_n; Y\big) \arrow[d, two heads, "\Psi_{n-1}"'] \\
\Big((\widetilde{\otimes}_{i=1}^{n-2} \ell_1(B_{X_i'})) \widetilde{\otimes} X_{n-1}' \widetilde{\otimes} X_n' \widetilde{\otimes} Y; \alpha\Big) \arrow[r, "\varrho_2"] \arrow[d, two heads] & \mathfrak{A}\big(c_0(B_{X_1'}), \ldots, c_0(B_{X_{n-2}'}), X_{n-1}, X_n; Y\big) \arrow[d, two heads] \\
\vdots & \ldots & \vdots \\
 & \ldots & \\
\big(\ell_1(B_{X_1'}) \widetilde{\otimes} (\widetilde{\otimes}_{i=2}^n X_i') \widetilde{\otimes} Y; \alpha\big) \arrow[r, "\varrho_{n-1}"] \arrow[d, two heads, "Q_{X_1'} \otimes (\otimes_{i=2}^n Id_{X_i'}) \otimes Id_Y"] & \mathfrak{A}\big(c_0(B_{X_1'}), X_2, \ldots, X_n; Y\big) \arrow[d, two heads, "\Psi_1"'] \\
\big(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i' \widetilde{\otimes} Y; \alpha\big) \arrow[r, "\varrho_n"] & \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, $X_1, \ldots, X_n$ son espacios Asplund (por hipótesis) y también lo son los espacios $c_0(B_{X_1'}), \ldots, c_0(B_{X_n'})$ —ya que $\ell_1(J)$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým para todo J conjunto de índices [DF93, Apendix D3]—. Además, como $\mathfrak{A}$ es Arens estable para Y, las aplicaciones que bajan en la parte derecha de la Figura 4.1 también son metric surjections por la Proposición 4.1.7.

Por último, cada cuadrado de la Figura 4.1 es conmutativo por la Proposición 4.1.5. Además, como $\mathfrak{A}$ tiene la Y-RNp, la aplicación ϱ_0 es una metric surjection. En consecuencia, ϱ_1 también es una metric surjection y —procediendo de manera inductiva en cada cuadrado— se deduce que ϱ_n es una metric surjection que es lo que queríamos probar. □

Observación 4.1.9. En el teorema anterior, la hipótesis de extendibilidad del ideal, se usa para obtener una extensión de T manteniendo el espacio de llegada y su norma en el ideal. Vimos también que $\mathfrak{A}$ extendible implica que la norma asociada es proyectiva en las primeras n coordenadas. Para el caso en que el espacio de llegada sea un espacio dual, se tiene la recíproca. Es decir, si la norma asociada al ideal $\mathfrak{A}$ es proyectiva en las primeras n coordenadas, dado $T \in \mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n; Y')$ y $Z_1, \dots, Z_n$ superespacios de $X_1, \dots, X_n$, respectivamente, existe una extensión $\tilde{T} \in \mathfrak{A}(Z_1, \dots, Z_n; Y')$ con $\|\tilde{T}\|_{\mathfrak{A}} = \|T\|_{\mathfrak{A}}$. (ver [DF93, Exercise 20.6]).

Es importante notar que el Teorema 4.1.8 generaliza el Teorema de Lewis [DF93, Theorem 33.3] y también [CG11, Theorem 3.5] para formas multilineales. A continuación, daremos las definiciones necesarias para enunciar dichos teoremas y mostraremos que los podemos deducir a partir del Teorema 4.1.8.

Recordemos que una norma tensorial β finitamente generada de orden 2 tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* si para todo espacio de Banach X se satisface

$$X' \tilde{\otimes}_\beta \ell_1 \overset{1}{=} (X \otimes_{\beta'} c_0)'.$$

A partir de β una norma tensorial finitamente generada de orden 2, se define la norma asociada proyectiva a derecha $\beta/$, como la única norma mayor o igual a β tal que, para X e Y espacios de Banach, se cumple que

$$X \otimes_\beta \ell_1(B_Y) \overset{1}{\twoheadrightarrow} X \otimes_{\beta/} Y.$$

De la misma manera se define la norma asociada proyectiva a izquierda $\backslash\beta$. Estas normas están relacionadas de la siguiente manera, $(\beta/)^t = \backslash(\beta^t)$ y $(\beta/)' = \backslash(\beta')$ (ver [DF93, Section 20]). Se tiene el siguiente resultado [DF93, Exercise 20.6], sea $\mathcal{A}$ es un ideal de operadores lineales maximal asociado a β. Entonces, β es proyectiva a izquierda (es decir, $\beta = \backslash\beta$) si y solo si para X e Y espacios de Banach, Z superespacio de X y $T \in \mathcal{A}(X; Y)$ existe una extensión de $J_Y \circ T$, $\tilde{T} \in \mathcal{A}(Z; Y'')$, con $\|T\|_{\mathcal{A}} = \|\tilde{T}\|_{\mathcal{A}}$.

Teorema 4.1.10 (Lewis)**.** *Sea β una norma tensorial finitamente generada de orden 2 con la propiedad de Radon-Nikodým y sea $\mathcal{A}$ el ideal de operadores lineales maximal asociado a la norma β. Si Y' tiene la propiedad de Radon-Nikodým, entonces*

$$X' \tilde{\otimes}_{\beta/} Y' \overset{1}{\twoheadrightarrow} (X \otimes_{(\beta/)'} Y)'$$

es una metric surjection y para todo espacio de Banach X vale que

$$(\mathcal{A}/)^{min}(X;Y') \overset{1}{=} \mathcal{A}/(X;Y').$$

Para ver que el Teorema 4.1.8 generaliza el Teorema de Lewis, supongamos que β es una norma tensorial finitamente generada de orden 2 con la propiedad de Radon-Nikodým asociada al ideal de operadores lineales maximal $\mathcal{A}$ y sea Y un espacio Asplund. Debemos mostrar que aplicando el Teorema 4.1.8 obtenemos una metric surjection

$$X'\widetilde{\otimes}_{\beta/}Y' \overset{1}{\twoheadrightarrow} (X \otimes_{(\beta/)'} Y)'.$$

Recordemos que si $\mathcal{A} \sim \beta$, entonces $\mathcal{A}^{dual} \sim \beta^t$ y $\backslash(A^{dual}) \sim \backslash(\beta^t)$ [DF93, 17.8 y 20.12]. Además, $\backslash(\beta^t) = (\beta/)^t$.

Ahora bien, [DF93, Proposition 33.2] dice que β tiene la propiedad de Radon-Nikodým si y solo si $\beta/$ la tiene. Además, por [DF93, Lemma 33.3], se puede extender la metric surjection de la definición de la propiedad de Radon-Nikodým a espacios con cualquier índice. Es decir, tenemos una metric surjection

$$X'\widetilde{\otimes}_{\beta/}\ell_1(J) \overset{1}{\twoheadrightarrow} (X \otimes_{(\beta/)'} c_0(J))',$$

para todo conjunto de índices J. En otras palabras, trasponiendo obtenemos

$$\ell_1(J)\widetilde{\otimes}_{(\beta/)^t}X' = \ell_1(J)\widetilde{\otimes}_{\backslash(\beta^t)}X' \overset{1}{\twoheadrightarrow} (c_0(J) \otimes_{(\backslash(\beta^t))'} X)' = \backslash(\mathcal{A}^{dual})(c_0(J);X'),$$

Esto implica que el ideal $\backslash(\mathcal{A}^{dual})$ tiene la X'-RNp en el sentido de la definición (4.2). Notemos también que el ideal $\backslash(\mathcal{A}^{dual})$ es Arens estable para X' (X' es un espacio dual y el ideal es maximal) y se cumple la propiedad de extendibilidad ya que el ideal está asociado a una norma tensorial proyectiva a izquierda y X' es un espacio dual (ver Observación 4.1.9).

Luego, estamos en condiciones de usar el Teorema 4.1.8 y obtenemos la metric surjection

$$Y\widetilde{\otimes}_{\backslash(\alpha^t)}X' \overset{1}{\twoheadrightarrow} \backslash(\mathcal{A}^{dual})(Y;X'),$$

para todo espacio Asplund Y. Luego, si trasponemos una vez más esta relación, se deduce que

$$X'\widetilde{\otimes}_{\alpha/}Y' \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathcal{A}/(X;Y') = (X \otimes_{(\alpha/)'} Y)',$$

para todo espacio Asplund Y. Esto es exactamente el resultado del Teorema de Lewis.

Para el caso de ideales de formas multilineales, recordemos que una s-norma tensorial γ finitamente generada de orden n (ver definición en la Sección 4.3) tiene la *propiedad de Radon-Nikodým simétrica* (sRNp) si

$$\widetilde{\otimes}_{\gamma}^{n,s}\ell_1 \overset{1}{=} (\widetilde{\otimes}_{\gamma'}^{n,s}c_0)'.$$

Teorema 4.1.11 (Theorem 3.5.[CG11]). *Sea γ una norma tensorial finitamente generada de orden n con la sRNp y sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios Asplund. Entonces,*

$$\left(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i'; \backslash\gamma/\right) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \left(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i / \gamma' \backslash\right)'.$$

En particular, si $\mathfrak{A}$ es el ideal de formas multilineales maximal asociado a γ, entonces

$$(\backslash\mathfrak{A}/)^{min}(X_1, \ldots, X_n) \overset{1}{=} (\backslash\mathfrak{A}/)(X_1, \ldots, X_n).$$

Usando un razonamiento similar al usado en el caso del Teorema de Lewis, pero sin necesidad de cambiar el orden de los espacios involucrados, se obtiene el teorema para el caso multilineal escalar a partir del Teorema 4.1.8.

En muchos casos, dado un espacio de Banach Y, el ideal de operadores multilineales $\mathfrak{A}$ es Arens estable para Y' pero no lo es para Y. Por ejemplo, sucede para $\mathcal{E}$ y $G\mathcal{I}$ (pues $G\mathcal{I}$ es maximal y $\mathcal{E}$ coincide con $\mathcal{E}^{max}$ cuando el espacio de llegada es un espacio dual). En esta situación, el Teorema 4.1.8 nos provee de un resultado de coincidencia sólo en el caso en que el espacio de llegada sea un espacio dual. Nuestro próximo objetivo será relajar las hipótesis de manera de obtener un resultado de coincidencia sin necesitar que el espacio de llegada sea un espacio dual (para aplicar en los casos que mencionamos, por ejemplo). También buscaremos condiciones que nos aseguren la existencia de bases monomiales para ideales de operadores multilineales.

A continuación, veremos los resultados que necesitaremos para dar nuestro nuevo teorema de coincidencia. El primero dice que, bajo propiedades de aproximación, los operadores multilineales pertenecientes a $\mathfrak{A}^{min}$ mantienen su norma al verlos con rango en el bidual del espacio de llegada. Antes, recordemos un lema —que puede verse en [DF93, 13.3]— que usaremos en lo que sigue.

Lema 4.1.12 (Embedding Lemma). *Si α es una norma tensorial de orden 2 finitamente generada, entonces*

$$Id_X \otimes J_Y : X \otimes_\alpha Y \overset{1}{\hookrightarrow} X \otimes_\alpha Y'',$$

para todo X e Y espacios normados.

Lema 4.1.13. *Sea $\mathfrak{A} \sim \alpha$ un ideal de operadores multilineales y sean $X_1', \ldots, X_n', Y''$ espacios de Banach con la propiedad de aproximación acotada. Si $T \in \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, entonces*

$$\|J_Y \circ T\|_{\mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y'')} = \|T\|_{\mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y)}.$$

Demostración. Como $X_1', \ldots, X_n', Y''$ tienen la propiedad de aproximación acotada, entonces $\left(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i' \widetilde{\otimes} Y'', \alpha\right) \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y'')$ y $\left(\widetilde{\otimes}_{i=1}^n X_i' \widetilde{\otimes} Y, \alpha\right) \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ (ver observación posterior al Teorema 1.2.4). Luego, aplicando el Embeding Lemma tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\big(\widetilde{\otimes}_{i=1}^{n} X_i' \widetilde{\otimes} Y'', \alpha\big) & = & \mathfrak{A}^{min}(X_1, \dots, X_n; Y'')\,, \\
\overset{1}{\Big\uparrow} & & \Big\uparrow \\
\big(\widetilde{\otimes}_{i=1}^{n} X_i' \widetilde{\otimes} Y, \alpha\big) & = & \mathfrak{A}^{min}(X_1, \dots, X_n; Y)
\end{array}$$

de donde se deduce lo que queríamos. □

En el siguiente lema daremos una sucesión explícita de operadores multilineales de tipo finito que se aproximan a un operador multilineal dado en el núcleo minimal $\mathfrak{A}^{min}(X_1, \dots, X_n; Y)$.

Lema 4.1.14. *Sean $X_1, \dots, X_n$ espacios de Banach con base achicante y sea Y un espacio de Banach. Consideremos $\overline{P_k} := (P_k^1, \dots, P_k^n)$, donde P_k^j es la proyección sobre las primeras k coordenadas de la base de X_j. Si $T \in \mathfrak{A}^{min}(X_1, \dots, X_n; Y)$, entonces $T \circ \overline{P_k} \longrightarrow T$ en la norma de $\mathfrak{A}^{min}$.*

Demostración. Observemos primero que $\mathfrak{A}^{min}(X_1, \dots, X_n; Y)$ es la clausura de los operadores multilineales de tipo finito en la norma de $\mathfrak{A}^{min}$ (ver [Flo01, Lemma 3.3] para el resultado análogo en el contexto polinomial). Entonces, dado $\varepsilon > 0$, podemos considerar una sucesión de operadores multilineales de tipo finito $(R_m)_{m \in \mathbb{N}} \subseteq \mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n; Y)$ tales que

$$\|T - R_m\|_{\mathfrak{A}^{min}(X_1, \dots, X_n; Y)} \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Para ver que $T \circ \overline{P_k} \longrightarrow T$ en la norma de $\mathfrak{A}^{min}$, acotamos la norma de la diferencia intercalando el operador R_m

$$\|T - T \circ \overline{P_k}\|_{\mathfrak{A}^{min}} \leq \|T - R_m\|_{\mathfrak{A}^{min}} + \|R_m - R_m \circ \overline{P_k}\|_{\mathfrak{A}^{min}} + \|R_m \circ \overline{P_k} - T \circ \overline{P_k}\|_{\mathfrak{A}^{min}}.$$

Veamos que cada término del lado derecho tiende a 0 (cuando k tiende a infinito). El primero tiende a cero cuando m tiende a infinito (no depende de k). El tercero, cumple que

$$\|R_m \circ \overline{P_k} - T \circ \overline{P_k}\|_{\mathfrak{A}^{min}} = \|(R_m - T) \circ \overline{P_k}\|_{\mathfrak{A}^{min}} \leq \|T - R_m\|_{\mathfrak{A}^{min}} \cdot \|P_k^1\| \cdots \|P_k^n\| < C \cdot \|T - R_m\|_{\mathfrak{A}^{min}}.$$

Entonces, también tiende a cero cuando m tiende a infinito (no depende de k). Por último, analicemos el segundo término. Escribimos al operador de tipo finito R_m como

$$R_m = \sum_{j=1}^{r} x_{1,j}' \otimes \cdots \otimes x_{n,j}' \otimes y_j.$$

No usamos el índice m en la escritura de R_m por comodidad, ya que la cuenta que haremos no depende de m. Para acotar $\|R_m - R_m \circ \overline{P_k}\|_{\mathfrak{A}^{min}}$, usaremos que los términos de la forma

$$\left\| x_{i,j}' - (x_{i,j}' \circ P_k^1) \right\|_{X_i'} \longrightarrow 0,$$

para todo $1 \leq i \leq n$, pues los espacios $X_1, \ldots, X_n$ tienen base achicante. Por otro lado, notemos que

$$\|x_1' \otimes \cdots \otimes x_n' \otimes y\|_{\mathfrak{A}^{min}(X_1,\ldots,X_n;Y)} \leq \|x_1'\|_{X_1'} \cdots \|x_n'\|_{X_n'} \cdot \|y\|_Y.$$

y que además, existe $D > 0$ tal que

$$\|x_i' \circ P_k^i\|_{X_i'} \leq C^{1/n} \cdot \|x_i'\|_{X_i'} \leq D$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
&\big\|R_m - R_m \circ \overline{P_k}\big\|_{\mathfrak{A}^{min}} = \left\|\sum_{j=1}^{r} \Big(x_{1,j}' \otimes \cdots \otimes x_{n,j}' - (x_{1,j}' \circ P_k^1) \otimes \cdots \otimes (x_{n,j}' \circ P_k^n)\Big) \otimes y_j\right\|_{\mathfrak{A}^{min}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{r} \Big\|\Big(x_{1,j}' \otimes \cdots \otimes x_{n,j}' - (x_{1,j}' \circ P_k^1) \otimes \cdots \otimes (x_{n,j}' \circ P_k^n)\Big) \otimes y_j\Big\|_{\mathfrak{A}^{min}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{r} \Big(\big\|\big(x_{1,j}' \otimes \cdots \otimes x_{n,j}' - (x_{1,j}' \circ P_k^1) \otimes x_{2,j}' \otimes \cdots \otimes x_{n,j}'\big) \otimes y_j\big\|_{\mathfrak{A}^{min}} + \cdots \\
&+ \big\|\big((x_{1,j}' \circ P_k^1) \otimes \cdots \otimes (x_{n-1,j}' \circ P_k^{n-1}) \otimes x_{n,j}' - (x_{1,j}' \circ P_k^1) \otimes \cdots \otimes (x_{n,j}' \circ P_k^n)\big) \otimes y_j\big\|_{\mathfrak{A}^{min}} \Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{r} D^{n-1} \cdot \Big(\big\|x_{1,j}' - (x_{1,j}' \circ P_k^1)\big\|_{X_1'} + \cdots + \big\|x_{n,j}' - (x_{n,j}' \circ P_k^n)\big\|_{X_n'}\Big) \cdot \|y_j\|_Y \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

En definitiva, $\|T - T \circ \overline{P_k}\|_{\mathfrak{A}^{min}}$ tiende a cero como queríamos demostrar. □

Juntando los lemas anteriores, podemos dar el siguiente corolario.

Corolario 4.1.15. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios de Banach con base achicante y sea Y un espacio de Banach tal que Y'' tiene la propiedad de aproximación acotada. Si $T \in \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ cumple que $J_Y \circ T \in \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y'')$. Entonces, $T \in \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.*

Demostración. Sea $T \in \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ tal que $J_Y \circ T \in \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y'')$. Como los espacios $X_1', \ldots, X_n'$ tienen la propiedad de aproximación acotada —por tener base—, por el Lema 4.1.14, $J_Y \circ T \circ \overline{P_k} \longrightarrow J_Y \circ T$ en la norma de $\mathfrak{A}^{min}$. Además, por el Lema 4.1.13 (aplicado a $T \circ \overline{P_k}$),

$$\|J_Y \circ T \circ \overline{P_k}\|_{\mathfrak{A}^{min}} = \|T \circ \overline{P_k}\|_{\mathfrak{A}^{min}}.$$

Entonces, $(T \circ \overline{P_k})_k$ es una sucesión de Cauchy en $\mathfrak{A}^{min}$ que claramente converge a T. Luego, $T \in \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

□

Estamos en condiciones de demostrar nuestro nuevo teorema de coincidencia.

Teorema 4.1.16. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal extendible, Arens estable para Y'' y con la Y''-RNp. Si $X_1, \ldots, X_n$ tienen base achicante e Y'' tiene la propiedad de aproximación acotada, entonces*

$$(X_1'\tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n'\tilde{\otimes} Y, \alpha) \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y).$$

Demostración. La primera igualdad es clara ya que los espacios $X_1', \ldots, X_n', Y$ tienen la propiedad de aproximación acotada (ver comentario posterior al Teorema 1.2.4). Para ver la segunda igualdad, sea $T \in \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ y consideremos $J_Y \circ T \in \mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y'')$. Como todo espacio con base achicante es un espacio Asplund —tiene dual separable— y además, $\mathfrak{A}$ es un ideal extendible, Arens estable para Y'' y con la Y''-RNp, estamos en las condiciones del Teorema 4.1.8. De este modo obtenemos que $J_Y \circ T \in \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y'')$ con $\|J_Y \circ T\|_{\mathfrak{A}^{min}} = \|J_Y \circ T\|_{\mathfrak{A}}$.

El Corolario 4.1.15, nos dice que $T \in \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Además, en virtud del Lema 4.1.13 utilizado para el operador multilineal $T \in \mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, concluimos:

$$\|T\|_{\mathfrak{A}} \leq \|T\|_{\mathfrak{A}^{min}} = \|J_Y \circ T\|_{\mathfrak{A}^{min}} = \|J_Y \circ T\|_{\mathfrak{A}} \leq \|T\|_{\mathfrak{A}},$$

y esto completa la prueba.

□

Este teorema lo usaremos en la siguiente sección para obtener resultados sobre la existencia de base de Schauder para los ideales $\mathcal{E}$ y $\mathcal{GI}$ (ver Corolarios 4.2.3 y 4.2.9).

Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios de Banach con base de Schauder $(e_{j_1})_{j_1}, \ldots, (e_{j_n})_{j_n}$ respectivamente y sea β una norma tensorial finitamente generada de orden n. Hay una ordenación natural en $\mathbb{N}^n$, llamada usualmente *generalized square ordering of Gelbaum-Gil de Lamadrid* (o simplemente *square ordering*), tal que los monomios $(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n})_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}^n}$ (con este ordenamiento) forman una base de Schauder del espacio $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n; \beta)$ (ver por ejemplo [DZ96, GR05] para un tratamiento apropiado de esta ordenación). Este resultado se obtiene copiando las ideas de [GGL61] (ver también [DF93, Exercise 12.9]) para productos tensoriales de orden 2. En [CL08, Theorem 8] se da una generalización en el contexto de descomposiciones atómicas. A partir de los resultados probados en este capítulo, podemos dar condiciones para asegurar la existencia de bases monomiales para ideales de operadores multilinelaes.

Teorema 4.1.17. *Sea $\mathfrak{A} \sim \alpha$ un ideal de operadores multilineales extendible. Entonces*

(1) Sea $\mathfrak{A}$ Arens estable para Y con la Y-RNp. Si $X_1', \ldots, X_n', Y$ tienen base de Schauder $(e_{j_1}')_{j_1}, \ldots, (e_{j_n}')_{j_n}, (y_l)_l$ respectivamente, entonces los monomios

$$\left(e_{j_1}'(\,\cdot\,) \cdots e_{j_n}'(\,\cdot\,) \cdot y_l \right)_{j_1,\ldots,j_n,l}$$

con el square ordering forman una base de Schauder de $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

(2) Sea $\mathfrak{A}$ Arens estable para Y'' con la Y''-RNp. Si Y'' tiene la propiedad de aproximación acotada, $X_1, \ldots, X_n$ tienen base de Schauder achicante $(e_{j_1})_{j_1}, \ldots, (e_{j_n})_{j_n}$ respectivamente e Y tiene base $(y_l)_l$, entonces los monomios (asociados a los funcionales coordenados)

$$\left(e_{j_1}'(\,\cdot\,) \cdots e_{j_n}'(\,\cdot\,) \cdot y_l \right)_{j_1,\ldots,j_n,l}$$

con el square ordering forman una base de Schauder de $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

Demostración. (1) Por el Teorema 4.1.8, el espacio $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ coincide isométricamente con $\mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Además, $\mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y) \stackrel{1}{=} (X_1'\tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n' \tilde{\otimes} Y; \alpha)$, ya que $X_1', \ldots, X_n'$ e Y tienen la propiedad de aproximación acotada. En definitiva, se tiene que $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ coincide isométricamente con el espacio $(X_1'\tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n' \tilde{\otimes} Y; \alpha)$. Como los monomios con el square ordering forman una base de Schauder de $(X_1'\tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n' \tilde{\otimes} Y; \alpha)$, obtenemos una base de Schauder monomial del ideal.
(2) Se obtiene del Teorema 4.1.16, con los mismos argumentos usados en *(1)*. □

A continuación, el objetivo es relacionar propiedades estructurales de $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ con propiedades de los espacios $X_1, \ldots, X_n$ e Y y de su producto tensorial. Como por ejemplo, ser separable, tener la propiedad de Radon-Nikodým, ser un espacio Asplund.

La siguiente proposición se deduce directamente del Teorema 4.1.8, teniendo en cuenta que $\mathfrak{A}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ es separable con las hipótesis dadas.

Proposición 4.1.18. *Sea $\mathfrak{A} \sim \alpha$ un ideal de operadores multilineales extendible, Arens estable para Y y con la Y-RNp. Si $X_1, \ldots, X_n, Y$ son espacios de Banach tales que X_i' e Y son espacios separables, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces el espacio $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ es separable.*

Teniendo en mente que buscamos dar resultados de transferencia de la propiedad Asplund entre los espacios involucrados y su producto tensorial, veremos, a continuación, lemas elementales de la teoría de productos y normas tensoriales. El primero de ellos establece que una sucesión de tensores de tipo finito en $(\tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j; \alpha)$ (i.e., elementos del producto tensorial algebraico $\otimes_{j=1}^n X_j$) puede incluirse en el producto tensorial de ciertos subespacios separables de los X_j.

Lema 4.1.19. *Sea α una norma tensorial finitamente generada de orden n. Consideremos una sucesión de tensores de tipo finito $(w_r)_r$ tal que $w_r \in (\tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j; \alpha)$. Entonces, existen subespacios separables $W_j \subset X_j$ $(1 \leq j \leq n)$ tales que:*

1. $w_r \in (\tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j; \alpha)$ *con* $\alpha(w_r; \tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j) = \alpha(w_r; \tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j)$, *para todo* $r \in \mathbb{N}$.
2. $\alpha(w_r - w_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j) = \alpha(w_r - w_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j)$, *para todo* $r, l \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como α es una norma tensorial finitamente generada de orden n, dados $k, r \in \mathbb{N}$, existe $A_j^{k,r} \in FIN(X_j)$ tal que $w_r \in \tilde{\otimes}_{j=1}^n A_j^{k,r}$ y verifica

$$\alpha(w_r; \tilde{\otimes}_{j=1}^n A_j^{k,r}) \leq \alpha(w_r; \tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j) + 1/k.$$

De la misma manera, dados $k, r, l \in \mathbb{N}$, existe $B_j^{k,r,l} \in FIN(X_j)$ tal que $w_r - w_l \in \tilde{\otimes}_{j=1}^n B_j^{k,r,l}$ y cumple

$$\alpha(w_r - w_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^n B_j^{k,r,l}) \leq \alpha(w_r - w_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j) + 1/k.$$

Para $1 \leq j \leq n$, definimos

$$W_j := \overline{span[A_j^{k,r}, B_j^{k,r,l} : k, r, l \in \mathbb{N}]},$$

que son subespacios separables ya que $A_j^{k,r}, B_j^{k,r,l} \in FIN(X_j)$. Veamos que

$$\alpha(w_r; \tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j) = \alpha(w_r; \tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j).$$

En efecto,

$$\alpha(w_r; \tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j) \leq \alpha(w_r; \tilde{\otimes}_{j=1}^n A_j^{k,r}) \leq \alpha(w_r; \tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j) + 1/k \leq \alpha(w_r; \tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j) + 1/k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Análogamente, pasando por los espacios $B_j^{k,r,l}$, obtenemos

$$\alpha(w_r - w_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j) = \alpha(w_r - w_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j).$$

□

El siguiente lema afirma que un subespacio separable de un producto tensorial de la forma $(\tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j; \alpha)$ puede incluirse isométricamente en el producto tensorial de subespacios separables de los X_j. Este hecho se usó, por ejemplo, en [CG11, Theorem 2.9] para una norma tensorial inyectiva (i.e., respeta subespacios isométricamente) por lo que el resultado se deducía elementalmente.

Lema 4.1.20. *Sea α una norma tensorial finitamente generada y sea S un subespacio separable tal que $S \subseteq (\tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j; \alpha)$. Entonces, existen subespacios separables $W_j \subseteq X_j$, para $1 \leq j \leq n$, tales que $S \overset{1}{\hookrightarrow} (\tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j; \alpha)$.*

Demostración. Sea $\{z_k\}_k \subseteq S$ un subconjunto denso. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos una sucesión de tensores de tipo finito $(w_r^k)_r$ tales que w_r^k converge a z_k en $(\tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j; \alpha)$. Por Lema 4.1.19, como $(w_r^k)_{r,k}$ es un conjunto numerable de tensores de tipo finito, existen subespacios separables $W_j \subseteq X_j$ tales que $w_r^k \in (\tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j; \alpha)$, para todo $k, r \in \mathbb{N}$, con

$$\begin{aligned} \alpha(w_r^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j) &= \alpha(w_r^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j) \\ \alpha(w_r^k - w_m^l; \tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j) &= \alpha(w_r^k - w_m^l; \tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j), \end{aligned} \tag{4.9}$$

para todo $k, r, l, m \in \mathbb{N}$. Demostremos que $S \overset{1}{\hookrightarrow} (\tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j; \alpha)$. En efecto, dado $v \in S$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que

$$\alpha(v - z_k; \tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 ,$$

y veamos que $(z_k)_k$ resulta una sucesión de Cauchy en $(\tilde{\otimes}_{j=1}^n W_j; \alpha)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $(w_r^k)_r$ es una sucesión de Cauchy en $(\tilde{\otimes}_{j=1}^n X_j; \alpha)$ —w_r^k converge a z_k—. Por la identidad (4.9), también resulta una sucesión de Cauchy en $(\tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j; \alpha)$. Entonces, existe un elemento $w^k \in (\tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j; \alpha)$ tal que w_r^k converge a w^k. Afirmamos que $w^k = z_k$. En efecto,

$$\begin{aligned}\alpha(z_k - w^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) &\leq \alpha(z_k - w_r^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) + \alpha(w_r^k - w^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) \\ &\leq \alpha(z_k - w_r^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) + \alpha(w_r^k - w^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) \to 0,\end{aligned}$$

En definitiva, $z_k \in (\tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j; \alpha)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, por la identidad (4.9), se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha(z_k - z_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) &\leq \alpha(z_k - w_r^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) + \alpha(w_r^k - w_r^l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) + \alpha(w_r^l - z_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) \\ &= \alpha(z_k - w_r^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) + \alpha(w_r^k - w_r^l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) + \alpha(w_r^l - z_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j).\end{aligned}$$

Notemos también que

$$\alpha(w_r^k - w_r^l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) \leq \alpha(w_r^k - z_k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) + \alpha(z_k - z_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) + \alpha(z_l - w_r^l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j).$$

Entonces,

$$\alpha(z_k - z_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) \leq 2 \cdot \alpha(z_k - w_r^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) + \alpha(z_k - z_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) + 2 \cdot \alpha(w_r^l - z_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j).$$

Como la sucesión $(z_k)_k$ es convergente en $(\tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j; \alpha)$, existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\alpha(z_k - z_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) < \varepsilon/5,$$

para todo $k, l \geq k_0$. Una vez elegidos $k, l \geq k_0$, tomamos $r = r(k,l)$ tal que $\alpha(z_k - w_r^k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) < \varepsilon/5$ y $\alpha(w_r^l - z_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) < \varepsilon/5$. En conclusión, existe k_0 tal que para todo $k, l \geq k_0$ se tiene que

$$\alpha(z_k - z_l; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) < \varepsilon.$$

En consecuencia, $z_k \in (\widetilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j; \alpha)$ es convergente y (razonando como antes) z_k debe converger a v. Es decir, $v \in (\tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j; \alpha)$ y además

$$\begin{aligned}\alpha(v; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j) \leq \alpha(v; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) &\leq \alpha(v - z_k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) + \alpha(z_k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) \\ &= \alpha(v - z_k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) + \alpha(z_k; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j).\end{aligned}$$

Como el primer término tiende a cero y el segundo término tiende a $\alpha(v; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j)$ cuando k tiende a infinito, tomando límite se tiene que

$$\alpha(v; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j) = \alpha(v; \tilde{\otimes}_{j=1}^{n} X_j).$$

En definitiva, $S \overset{1}{\hookrightarrow} (\tilde{\otimes}_{j=1}^{n} W_j; \alpha)$ que es lo que queríamos demostrar. □

Ahora estamos en condiciones de dar el enunciado prometido que establece condiciones para que la propiedad Asplund de los espacios involucrados se transfiera al producto tensorial de ellos. Un resultado de transferencia de esta naturaleza puede encontrarse en [RS82] para el producto tensorial inyectivo.

Teorema 4.1.21. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ espacios de Banach. Si $\mathfrak{A} \sim \alpha$ un ideal de operadores multilineales maximal, extendible y con la Y'-RNp para todo espacio dual separable Y'. Son equivalentes*

(1) Los espacios $X_1, \ldots, X_n, Y$ son Asplund.

(2) El espacio $(X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha')$ es Asplund.

(3) El espacio $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y')$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Queremos ver que $(X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha')$ es un espacio Asplund. Es decir, que todo subespacio separable de $(X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha')$ tiene dual separable. Sea $S \subseteq (X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha')$ un subespacio separable. Por Lema 4.1.20, existen subespacios separables $W_j \subseteq X_j$ (para $1 \leq j \leq n$) y $W_{n+1} \subseteq Y$ tales que $S \overset{1}{\hookrightarrow} \left(\tilde{\otimes}_{j=1}^{n+1} W_j; \alpha'\right)$.

Ahora bien, como $X_1, \ldots, X_n$ e Y son espacios Asplund, los subespacios W_j' también son separables (para $1 \leq j \leq n+1$). Por Proposición 4.1.18, $\mathfrak{A}(W_1, \ldots, W_n; W_{n+1}')$ es separable y por el Teorema de representación para ideales maximales (Teorema 1.2.3), vale que

$$\mathfrak{A}(W_1, \ldots, W_n; W_{n+1}') \overset{1}{=} (\tilde{\otimes}_{j=1}^{n+1} W_j; \alpha')'.$$

En consecuencia, $(\tilde{\otimes}_{j=1}^{n+1} W_j; \alpha')'$ es separable y S' resulta separable pues $(\tilde{\otimes}_{j=1}^{n+1} W_j; \alpha')' \overset{1}{\twoheadrightarrow} S'$.
(2) $\Rightarrow$ (1) es evidente pues cada uno de los espacios es subespacio del producto tensorial.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) Por Teorema de representación para ideales maximales (Teorema 1.2.3), tenemos que

$$\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} (X_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha')'.$$

La conclusión se deduce de que un espacio es Asplund si y solo si su dual tiene la propiedad de Radon-Nikodým. $\square$

Observación 4.1.22. Observemos que en la demostración del teorema anterior, la hipótesis de maximalidad del ideal solo se usa para tener la siguiente identidad

$$\mathfrak{A}^{max}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} (X_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha')'.$$

Luego, podemos aplicar este teorema para ideales $\mathfrak{A}$, no necesariamente maximales, que verifiquen $\mathfrak{A}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} \mathfrak{A}^{max}(X_1, \ldots, X_n; Y')$ para los espacios involucrados (y las demás hipótesis del teorema).

4.2. Aplicaciones y ejemplos

En esta sección aplicaremos los resultados obtenidos en la sección anterior a algunos ideales de operadores multilineales. Comenzaremos con el ideal de los operadores multilineales extendibles.

Comencemos estudiando las propiedades que nos interesan de este ideal.

Proposición 4.2.1. *El ideal $\mathcal{E}$ es extendible y Arens estable para Y' para todo espacio dual Y'. Además, si Z es un espacio de Banach que no contiene copia de c_0, entonces $\mathcal{E}$ tiene la Z-RNp.*

Demostración. El ideal $\mathcal{E}$ es extendible por definición. Teniendo en cuenta el hecho de que todo espacio dual está complementado en su bidual y siguiendo la prueba de [Car99, Theorem 3.6], puede verse que (para $k = 1$, los demás casos son análogos) si consideramos un operador $T \in \mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y')$ podemos tomar $T_0 \in \mathcal{L}(\ell_\infty(B_{X_1'}), X_2, \ldots, X_n; Y')$ una extensión de T que cumple que $T = T_0 \circ (I_{X_1}, Id_{X_2}, \ldots, Id_{X_n})$. Entonces,

$$Ext_1(T) = Ext_1(T_0) \circ (I''_{X_1}, Id_{X_2}, \ldots, Id_{X_n}),$$

donde $I''_{X_1} : X'' \to \ell_\infty(B_{X_1'})''$. Por tener $\ell_\infty(B_{X_1'})''$ la propiedad de extensión métrica, $Ext_1(T_0)$ es extendible, lo que implica que $Ext_1(T) \in \mathcal{E}(X_1'', X_2, \ldots, X_n; Y')$. Además,

$$\|T\|_{\mathcal{E}(X_1,\ldots,X_n;Y')} = \|Ext_1(T)\|_{\mathcal{E}(X_1'',X_2,\ldots,X_n;Y')}.$$

Luego, $\mathcal{E}$ es Arens estable para Y'.

Sea Z un espacio de Banach que no contiene copia de c_0. La Proposición 4.1.2, nos dice que $\mathcal{L}(^n c_0; Z) = \mathcal{L}_{app}(^n c_0; Z)$. Además, c_0 es un $\mathcal{L}_\infty$-space, por lo que $\mathcal{E}(^n c_0; Z) = \mathcal{L}(^n c_0; Z)$. Entonces, $\mathcal{E}^{min}(^n c_0; Z) = \mathcal{L}_{app}(^n c_0; Z)$ y en definitiva $\mathcal{E}(^n c_0; Z) = \mathcal{E}^{min}(^n c_0; Z)$. Por último, por la Proposición 4.1.3 se deduce que $\mathcal{E}$ tiene la Z-RNp. □

En lo que sigue, llamaremos α_{ext} a la norma tensorial finitamente generada de orden $(n+1)$ asociada al ideal $\mathcal{E}$.

Corolario 4.2.2.

(1) Si $X_1, \ldots, X_n$ son espacios Asplund e Y' es un espacio dual que no contiene copia de c_0, entonces

$$\big(X_1'\widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} X_n' \widetilde{\otimes} Y'; \alpha_{ext}\big) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y').$$

En particular, $\mathcal{E}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} \mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y')$.

(2) Si Y' es un espacio dual que no contiene copia de c_0 y $X_1', \ldots, X_n', Y'$ tienen bases $(e'_{j_1})_{j_1}, \ldots, (e'_{j_n})_{j_n}, (y'_l)_l$ respectivamente, entonces los monomios

$$\big(e'_{j_1}(\ \cdot\ ) \cdots e'_{j_n}(\ \cdot\ ) \cdot y'_l \big)_{j_1,\ldots,j_n,l}$$

con el square ordering forman una base de Schauder de $\mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y')$.

(3) Si Y' es un espacio dual que no contiene copia de c_0 y $X_1, \ldots, X_n, Y$ tienen bases de Schauder achicantes $(e_{j_1})_{j_1}, \ldots, (e_{j_n})_{j_n}, (y_l)_l$ respectivamente, entonces los monomios (asociados a los funcionales coordenados)

$$\big(e'_{j_1}(\ \cdot\ ) \cdots e'_{j_n}(\ \cdot\ ) \cdot y'_l \big)_{j_1,\ldots,j_n,l}$$

con el square ordering forman una base de Schauder acotadamente completa del espacio $\mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y')$.

Demostración. *(1)* Se deduce directamente de la Proposición 4.2.1 y el Teorema 4.1.8.
(2) Se deduce de la primera parte del Teorema 4.1.17.
(3) Como el espacio de llegada es un espacio dual, por el Teorema de representación para ideales maximales (Teorema 1.2.3), tenemos que

$$\mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} \mathcal{E}^{max}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} \left(X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha'_{ext}\right)'.$$

Ahora bien, $X'_1, \ldots, X'_n$ e Y' tienen la propiedad de aproximación acotada ya que los espacios $X_1, \ldots, X_n$ e Y tienen base de Schauder achicante. Por el Teorema de representación para ideales minimales (Teorema 1.2.4) y por el item *(1)* de este corolario, se tiene que

$$\mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} \mathcal{E}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y') \overset{1}{=} \left(X'_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X'_n \tilde{\otimes} Y'; \alpha_{ext}\right).$$

En conclusión,

$$\left(X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha'_{ext}\right)' \overset{1}{=} \left(X'_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X'_n \tilde{\otimes} Y'; \alpha_{ext}\right).$$

Por último, notemos que la base $(e'_{j_1} \otimes \cdots \otimes e'_{j_n} \otimes y'_l)_{j_1,\ldots,j_n,l}$ del espacio $\left(X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha'_{ext}\right)'$ está formada por los funcionales coordenados asociados a la base $(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n} \otimes y_l)_{j_1,\ldots,j_n,l}$ del espacio $\left(X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha'_{ext}\right)$, que es lo que queríamos probar. □

El siguiente corolario, nos da un resultado de coincidencia y de existencia de base monomial para el ideal de los operadores multilineales extendibles donde el espacio de llegada no es necesariamente un espacio dual.

Corolario 4.2.3. *Si $X_1, \ldots, X_n$ tienen base de Schauder achicante e Y'' tiene la propiedad de aproximación acotada y no contiene copia de c_0, entonces*

$$\left(X'_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X'_n \tilde{\otimes} Y; \alpha_{ext}\right) \overset{1}{=} \mathcal{E}^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y). \tag{4.10}$$

En particular, si Y también tiene base, los monomios con el square ordering forman una base de Schauder del espacio $\mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

Demostración. La condición (4.10), se deduce directamente de la Proposición 4.2.1 y del Teorema 4.1.16. Si además el espacio Y tiene base de Schauder, por ítem *(2)* del Teorema 4.1.17 se obtiene la conclusión. □

Una pregunta natural sobre el comportamiento de un ideal es si preserva propiedades de los espacios de Banach involucrados. Los dos siguientes resultados apuntan en dicha dirección. El primero de ellos es una consecuencia de la Proposición 4.1.18.

Corolario 4.2.4. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ e Y espacios de Banach cuyos espacios duales son separables. Entonces, el espacio $\mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y')$ también es separable.*

Observación 4.2.5. Para estar en las hipótesis de la Proposición 4.1.18, tenemos que ver que el ideal $\mathcal{E}$ es extendible, Arens estable para Y' y con Y'-RNp. Las dos primeras condiciones se deducen directamente de la Proposición 4.2.1. Mientras que la tercera se deduce del hecho de que Y' separable implica que Y' no contiene una copia de c_0 [BP58, Theorem 4] (o ver [AK06, Problem 2.9]).

Por la Proposición 4.2.1 y el Teorema 4.1.21, obtenemos el siguiente corolario. Es importante notar que podemos aplicar el Teorema 4.1.21 pues $\mathcal{E}^{max}(X_1, \ldots, X_n; Y') = \mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n; Y')$, ya que el espacio de llegada es un espacio dual (ver Observación 4.1.22).

Corolario 4.2.6. *sean $X_1, \ldots, X_n$ e Y espacios de Banach. Son equivalentes*

(1) Los espacios $X_1, \ldots, X_n$ e Y son Asplund.

(2) El espacio $\left(X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \alpha'_{ext}\right)$ es Asplund.

(3) El espacio $\mathcal{E}(X_1, \ldots, X_n, Y')$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

Apliquemos ahora los resultados obtenidos en la sección anterior en el caso de los ideales de operadores multilineales Pietsch y Grothendieck integrales. Recordemos primero que el núcleo minimal de los operadores multilineales integrales es el ideal de los operadores multilineales nucleares (ver 1.1). Es decir,

$$(\mathcal{PI})^{min} \overset{1}{=} (\mathcal{GI})^{min} \overset{1}{=} \mathcal{N}.$$

Cuando $X_1, \ldots, X_n$ son espacios Asplund, se tiene que

$$\mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathcal{N}(X_1, \ldots, X_n; Y)$$

para todo espacio de Banach Y. Este hecho fue probado por Alencar en [Ale85a], es justamente un resultado de coincidencia entre un ideal y su núcleo minimal como los que estamos estudiando. El argumento dado por Alencar está basado principalmente en la teoría de medidas vectoriales (ver [DU77]). Nosotros presentamos aquí una prueba independiente de este resultado desde una perspectiva distinta, usando herramientas de los productos tensoriales.

La siguiente proposición nos permitirá estar en condiciones de aplicar nuestro teorema principal, el Teorema 4.1.8. Recordemos que llamamos π a la norma tensorial proyectiva y que es la norma asociada al ideal $\mathcal{PI}$ (ver 1.2).

Proposición 4.2.7. *El ideal $\mathcal{PI}$ es extendible, Arens stable y tiene la vector-RNp.*

Demostración. Es sabido que el ideal $\mathcal{PI}$ es un ideal Arens estable y extendible (ver por ejemplo [CL04, Theorem 2.12] y [CL05, Theorem 5] donde se prueba un resultado análogo en el contexto polinomial). Como los operadores multilineales Pietsch integrales son débilmente secuencialmente continuos, para poder aplicar la Proposición 4.1.3, necesitamos ver que para cualquier espacio de Banach Y vale

$$(\ell_1 \tilde{\otimes} \cdots \tilde{\otimes} \ell_1 \tilde{\otimes} Y; \pi) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathcal{PI}(c_0, \ldots, c_0; Y).$$

Es decir, basta ver que $\mathcal{PI}(^n c_0; Y) \overset{1}{=} \mathcal{N}(^n c_0; Y)$. En efecto, si $T \in \mathcal{PI}(^n c_0; Y)$, podemos escribir a T como

$$T(x_1, \ldots, x_n) = \int_{B_{\ell_1} \times \cdots \times B_{\ell_1}} x_1'(x_1) \cdots x_n'(x_n)\ d\Gamma(x_1', \ldots, x_n'),$$

donde Γ es una medida boreliana regular de variación acotada sobre $(B_{\ell_1} \times \cdots \times B_{\ell_1}, w^*)$ con valores en Y.

Ahora bien, $x_k' = \sum_{j_k=1}^{\infty} x_k'(e_{j_k}) e_{j_k}'$, entonces

$$\begin{aligned}
T(x_1, \ldots, x_n) &= \int_{B_{\ell_1} \times \cdots \times B_{\ell_1}} \left(\sum_{j_1=1}^{\infty} x_1'(e_{j_1}) \cdot e_{j_1}'(x_1) \right) \cdots \left(\sum_{j_n=1}^{\infty} x_1'(e_{j_n}) \cdot e_{j_n}'(x_n) \right)\ d\Gamma(x_1', \ldots, x_n') \\
&= \int_{B_{\ell_1} \times \cdots \times B_{\ell_1}} \left(\sum_{j_1 \ldots, j_n} x_1'(e_{j_1}) \cdots x_1'(e_{j_n}) \cdot e_{j_1}'(x_1) \cdots e_{j_n}'(x_n) \right)\ d\Gamma(x_1', \ldots, x_n') \\
&= \sum_{j_1, \ldots, j_n} \underbrace{\left(\int_{B_{\ell_1} \times \cdots \times B_{\ell_1}} x_1'(e_{j_1}) \cdots x_1'(e_{j_n})\ d\Gamma(x_1', \ldots, x_n') \right)}_{:= A_{j_1, \ldots, j_n}} \cdot e_{j_1}'(x_1) \cdots e_{j_n}'(x_n).
\end{aligned}$$

Por el Teorema de Convergencia Dominada, aplicada a la medida escalar $|\Gamma|$, podemos acotar la serie de las normas de los escalares $A_{j_1, \ldots, j_n}$ como sigue

$$\begin{aligned}
\sum_{j_1, \ldots, j_n} \|A_{j_1, \ldots, j_n}\|_Y &= \sum_{j_1, \ldots, j_n} \left\| \int_{B_{\ell_1} \times \cdots \times B_{\ell_1}} x_1'(e_{j_1}) \cdots x_1'(e_{j_n})\ d\Gamma(x_1', \ldots, x_n') \right\|_Y \\
&\leq \sum_{j_1, \ldots, j_n} \int_{B_{\ell_1} \times \cdots \times B_{\ell_1}} |x_1'(e_{j_1})| \cdots |x_1'(e_{j_n})|\ d|\Gamma|(x_1', \ldots, x_n') \\
&= \int_{B_{\ell_1} \times \cdots \times B_{\ell_1}} \|x_1'\|_1 \cdots \|x_n'\|_1\ d|\Gamma|(x_1', \ldots, x_n') \leq \|T\|_{\mathcal{PI}}.
\end{aligned}$$

Luego, T pertenece a $\mathcal{N}(^n c_0; Y)$ y $\|T\|_{\mathcal{N}(^n c_0; Y)} \leq \|T\|_{\mathcal{PI}(^n c_0; Y)}$. En consecuencia, $\mathcal{N}(^n c_0; Y) \overset{1}{=} \mathcal{PI}(^n c_0; Y)$. Por Proposición 4.1.3, se deduce que el ideal $\mathcal{PI}$ tiene la vector-RNp, como queríamos ver. □

Estamos en condiciones de recuperar el teorema principal de [Ale85a] y otras consecuencias.

Corolario 4.2.8.

(1) Si $X_1, \ldots, X_n$ son espacios Asplund, entonces

$$\left(X_1' \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} X_n' \widetilde{\otimes} Y; \pi \right) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y).$$

En particular, $(\mathcal{PI})^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Es decir,

$$\mathcal{N}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y).$$

(2) *Si $X_1', \ldots, X_n'$ e Y tienen bases de Schauder $(e_{j_1}')_{j_1}, \ldots, (e_{j_n}')_{j_n}, (y_l)_l$ respectivamente, entonces los monomios*

$$\big(\ e_{j_1}'(\ \cdot\ ) \cdots e_{j_n}'(\ \cdot\ ) \cdot y_l\ \big)_{j_1,\ldots,j_n,l}$$

con el square ordering forman una base de Schauder de $\mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

(3) *Si $X_1, \ldots, X_n$ e Y tienen bases de Schauder achicantes $(e_{j_1})_{j_1}, \ldots, (e_{j_n})_{j_n}, (y_l)_l$ respectivamente, entonces los monomios (asociados a los funcionales coordenados)*

$$\big(\ e_{j_1}'(\ \cdot\ ) \cdots e_{j_n}'(\ \cdot\ ) \cdot y_l'\ \big)_{j_1,\ldots,j_n,l}$$

con el square ordering forman una base de Schauder acotadamente completa del espacio $\mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y')$.

Demostración. *(1)* Se deduce de la Proposición 4.2.7 y del Teorema 4.1.8.
(2) y *(3)* Se obtienen de forma similar a lo hecho en la prueba del Corolario 4.2.2. □

Corolario 4.2.9. *Si $X_1, \ldots, X_n$ tienen bases de Schauder achicantes y además Y'' tiene la propiedad de aproximación acotada. Entonces,*

$$\big(X_1'\tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n' \tilde{\otimes} Y; \pi\big) \overset{1}{=} \mathcal{N}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathcal{GI}(X_1, \ldots, X_n; Y).$$

En particular, si Y también tiene base de Schauder entonces los monomios con el square ordering forman una base de Schauder del espacio $\mathcal{GI}(X_1, \ldots, X_n; Y)$.

Demostración. Por Proposición 4.2.7 y Teorema 4.1.16, se tiene que

$$\big(X_1'\tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n' \tilde{\otimes} Y; \pi\big) \overset{1}{=} \mathcal{N}(X_1, \ldots, X_n; Y) \overset{1}{=} \mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y).$$

Sea $T \in \mathcal{GI}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, entonces $J_Y \circ T \in \mathcal{GI}(X_1, \ldots, X_n; Y'')$. Además, como vale que $\mathcal{GI}(X_1, \ldots, X_n; Y'') \overset{1}{=} \mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y'')$ —ya que el espacio de llegada es un espacio dual—, se deduce que

$$J_Y \circ T \in \mathcal{GI}(X_1, \ldots, X_n; Y'') \overset{1}{=} \mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y'') \overset{1}{=} \mathcal{N}(X_1, \ldots, X_n; Y'').$$

Es decir, $J_Y \circ T \in (\mathcal{GI})^{min}(X_1, \ldots, X_n; Y'')$. Por el Corolario 4.1.15, $T \in \mathcal{N}(X_1, \ldots, X_n; Y)$. Aplicando el Lema 4.1.13 a $T \in \mathcal{N}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, obtenemos

$$\|T\|_{\mathcal{GI}} \leq \|T\|_{\mathcal{N}} = \|J_Y \circ T\|_{\mathcal{N}} = \|J_Y \circ T\|_{\mathcal{GI}} \leq \|T\|_{\mathcal{GI}}.$$

Por último, si Y tiene base de Schauder, por ítem *(2)* del Teorema 4.1.17 (aplicado a $\mathcal{PI}$) se deriva la conclusión.

□

Es importante recalcar que hemos obtenido un resultado de coincidencia para el ideal $\mathcal{GI}$, que es un ideal más grande que $\mathcal{PI}$ (de hecho, sabemos que $(\mathcal{PI})^{max} \stackrel{1}{=} \mathcal{GI}$). Esto es, de alguna manera, un resultado más fuerte que los conocidos hasta el momento para operadores multilineales integrales.

De la misma forma que en los Corolarios 4.2.4 y 4.2.6 podemos deducir los siguientes resultados que ya son conocidos (ver [RS82]).

Corolario 4.2.10. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ e Y espacios de Banach tales que $X_1', \ldots, X_n'$ e Y son separables. Entonces el espacio $\mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ es separable.*

Teniendo en cuenta la Observación 4.1.22, como $\mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y') \stackrel{1}{=} \mathcal{GI}(X_1, \ldots, X_n; Y')$ y el ideal $\mathcal{PI}$ satisface las hipótesis del Teorema 4.1.21 (por Proposición 4.2.7), tenemos el siguiente corolario —notar que la última condición es equivalente a decir $\mathcal{PI}(X_1, \ldots, X_n; Y')$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým—.

Corolario 4.2.11. *Sean $X_1, \ldots, X_n$ e Y espacios de Banach. Son equivalentes*

(1) Los espacios $X_1, \ldots, X_n$ e Y son Asplund.

(2) El espacio $\big(X_1 \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} X_n \tilde{\otimes} Y; \varepsilon\big)$ es Asplund.

(3) El espacio $\mathcal{GI}(X_1, \ldots, X_n, Y')$ tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

4.3. Coincidencia en ideales de polinomios homogéneos

En esta sección daremos resultados de coincidencia en el contexto de ideales de polinomios a valores vectoriales. Como primera medida, decimos que p es un *polinomio n-homogéneo de X en Y* si existe un operador n-lineal T_p de $X \times \cdots \times X$ en Y tal que $p(x) = T_p(x, \ldots, x)$. Se sabe que en general el operador n-lineal asociado un polinomio no es único, sin embargo, si nos restringimos a operadores multilineales simétricos, existe un único operador n-lineal simétrico (que llamamos $\check{p}$) que satisface que $p(x) = \check{p}(x, \ldots, x)$. Es más, se puede obtener $\check{p}$ a partir de p aplicando la fórmula de polarización

$$\check{p}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_1 = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \cdot p\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot x_i\right).$$

Notamos con $\mathcal{P}^n(X;Y)$ al espacio de polinomios n-homogéneos continuos de X en Y provisto de la norma supremo. Éste resulta ser un espacio de Banach.

De la misma forma que definimos ideales de operadores multilineales, podemos introducir los ideales de polinomios homogéneos. La definición de ideal de polinomios apareció por primera vez en [Bra84, Hol86] como una adaptación de la noción de ideales de operadores multilineales dada por Pietsch en [Pie84] (para más trabajos al respecto ver [Flo01, Flo02, FG03, FH02]).

Un *ideal normado (resp. de Banach) de polinomios n-homogéneos continuos* esta dado por un par $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|_{\mathbb{Q}})$ que satisface las siguientes propiedades:

(i) $\mathbb{Q}(X;Y) := \mathbb{Q} \cap \mathcal{P}^n(X;Y)$ es un subespacio lineal de $\mathcal{P}^n(X;Y)$ y $\|\cdot\|_{\mathbb{Q}}$ es una norma que hace del par $(\mathbb{Q}(X;Y), \|\cdot\|_{\mathbb{Q}})$ un espacio normado (resp. de Banach).

(ii) Si $B \in \mathcal{L}(X;Z)$, $p \in \mathbb{Q}(Z;U)$ y $A \in \mathcal{L}(U;Y)$ entonces $A \circ p \circ B \in \mathbb{Q}(X;Y)$ y
$$\|A \circ p \circ B\|_{\mathbb{Q}} \leq \|A\| \cdot \|p\|_{\mathbb{Q}} \cdot \|B\|^n.$$

(iii) La aplicación $z \mapsto z^n$ pertenece a $\mathbb{Q}(\mathbb{K};\mathbb{K})$ y tiene norma 1.

Al igual que para operadores multilineales, podemos definir de manera análoga los polinomios homogéneos de tipo finito, nucleares, Pietsch/Grothendieck integrales y extendibles. También los conceptos de ideales de polinomios homogéneos maximales y minimales y desarrollar la teoría de productos y normas tensoriales simétricas con sus consecuencias en los teoremas de representación (ver [Mur10, 1.2] para una descripción detallada de dichos conceptos). Recordemos la definición de las normas tensoriales simétricas.

Para X espacio de Banach, se define el *producto tensorial simétrico de orden n*, como el espacio formado por elementos de la forma $\sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot x_j \otimes \cdots \otimes x_j$, para $x_j \in X$. Lo notamos $\otimes^{n,s} X$. En dicho espacio se definen la norma inyectiva simétrica $\varepsilon_{n,s}$ y la norma proyectiva simétrica $\pi_{n,s}$, de la siguiente manera
$$\varepsilon_{n,s}(z) = \sup_{x' \in B_{X'}} \left| \sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot x'(x_j)^n \right|,$$
donde $\sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot x_j \otimes \cdots \otimes x_j$ es una representación del tensor z.
$$\pi_{n,s}(z) = \text{ínf} \left\{ \sum_{j=1}^r |\lambda_j| \cdot \|x_j\|^n \right\},$$
donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de la forma $\sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot x_j \otimes \cdots \otimes x_j$ del tensor z.

Finalmente, se dice que γ es una *s-norma tensorial de orden n*, si γ asigna a cada espacio de Banach X una norma $\gamma(\,\cdot\,; \otimes^{n,s} X)$ en el producto tensorial simétrico que satisface

1. $\varepsilon_{n,s} \leq \gamma \leq \pi_{n,s}$.
2. $\| \otimes^{n,s} A : \otimes_\gamma^{n,s} X \to \otimes_\gamma^{n,s} Y \| \leq \|A\|^n$, para cada $A \in \mathcal{L}(X;Y)$. Donde
$$\otimes^{n,s} A \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot x_j \otimes \cdots \otimes x_j \right) = \sum_{j=1}^r \lambda_j \cdot A(x_j) \otimes \cdots \otimes A(x_j).$$

Con este tipo de normas se pueden representar ideales de polinomios n-homogéneos escalares. Mientras que un ideal de polinomios n-homogéneos (a valores vectoriales) $\mathbb{Q}$ está asociado a una *norma tensorial mixta* δ. Es decir, δ asigna a cada par de espacios de Banach (X, Y) una norma en el producto tensorial $(\otimes^{n,s}X) \otimes Y$ que satisface las siguientes propiedades ([Flo01, section 7.6])

1. $\delta\left((\otimes^{n,s}1) \otimes 1; \mathbb{K}^{n,s}, \mathbb{K}\right) = 1$

2. Dados $A \in \mathcal{L}(X_1; X_2)$ y $B \in \mathcal{L}(Y_1; Y_2)$ se tiene que

$$\left\|\otimes^{n,s} A \otimes B : \otimes_\delta^{n,s;1}(X_1; Y_1) \to \otimes_\delta^{n,s;1}(X_2; Y_2)\right\| = \|A\|^n \cdot \|B\|$$

(metric mapping property).

Decimos que $\mathbb{Q} \sim \delta$ si se satisface que

$$\mathbb{Q}(M; N) \stackrel{1}{=} \big((\otimes^{n,s}M') \otimes N; \delta\big),$$

para todo espacio de dimensión finita M y N.

Recordemos que la extensión de Aron Berner $AB : \mathcal{P}^n(X; Y) \to \mathcal{P}^n(X''; Y'')$ está definida de la siguiente manera

$$AB(p)(x) := EXT(\check{p})(x, \dots, x),$$

donde EXT denota las extensiones iteradas al bidual de cada coordenada dada por $(Ext_n) \circ \cdots \circ (Ext_1)$. Decimos que un ideal de polinomios n-homogéneos $\mathbb{Q}$ es *Aron Berner estable para* Y si la aplicación

$$AB : \mathbb{Q}(X; Y) \to \mathbb{Q}(X''; Y)$$

está bien definida y resulta un isometría. Notar que la condición anterior dice que la imagen de la extensión de Aron Berner se mantiene en Y. Si $\mathbb{Q}$ es Aron Berner estable para Y para todo espacio de Banach Y, simplemente decimos que $\mathbb{Q}$ es un *ideal Aron Berner estable*. Al igual que en el contexto multilineal, todo ideal de polinomios n-homogéneos maximal es Aron Berner estable para todo espacio dual Y' (este resultado puede obtenerse adaptando la prueba de [CG11b, Lemma 2.2] al contexto vectorial).

Un ideal $\mathbb{Q}$ es *extendible* si para todo par de espacios de Banach X, Y, todo superespacio $G \supset X$ y todo polinomio $p \in \mathbb{Q}(X; Y)$, existe una extensión de p —que llamamos $\widetilde{p} \in \mathbb{Q}(G; Y)$—, con la misma norma en el ideal $\mathbb{Q}$. Por ejemplo, $\mathcal{P}_{\mathcal{PI}}$ y $\mathcal{P}_e$ —los ideales de polinomios homogéneos Pietsch-integrales y extendibles, respectivamente— son ideales extendibles.

Por último, sea $\mathbb{Q} \sim \delta$ un ideal de polinomios n-homogéneos y sea Y un espacio de Banach. Decimos que $\mathbb{Q}$ tiene la *Y-propiedad de Radon-Nikodým* (Y-RNp) si

$$\big(\widetilde{\otimes}^{n,s}\ell_1(J)\widetilde{\otimes}Y; \delta\big) \stackrel{1}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Q}\big(c_0(J); Y\big),$$

para todo conjunto de índices J.

Si $\mathbb{Q}$ tiene la Y-RNp para todo Y, decimos que $\mathbb{Q}$ tiene la *vector-RNp*.

Es importante mencionar que, como en el contexto multilineal, tenemos un resultado análogo de la Proposición 4.1.3.

Para traducir lo que sabemos sobre operadores multilineales —desarrollado en la primera sección de este capítulo— al contexto polinomial es necesario hacer algunas observaciones previamente.

Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores multilineales Arens estable para Y y definamos la aplicación $\Psi : \mathfrak{A}(c_0(B_{X_1'}), \dots, c_0(B_{X_n'}); Y) \to \mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n; Y)$ como la composición de las aplicaciones que bajan en la parte derecha de la Figura 4.1, es decir, $\Psi = \Psi_1 \circ \cdots \circ \Psi_n$. La siguiente proposición describe la aplicación Ψ de manera más simple y será de utilidad para dar una versión polinomial del resultado de coincidencia (Teorema 4.1.8).

Proposición 4.3.1. *Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de operadores multilineales Arens estable para Y, entonces se tiene que la aplicación*

$$\Psi : \mathfrak{A}\big(c_0(B_{X_1'}), \dots, c_0(B_{X_n'}); Y\big) \to \mathfrak{A}(X_1, \dots, X_n; Y)$$

está dada por

$$\Psi(T)(x_1, \dots, x_n) = EXT(T)\big(I_{X_1}(x_1), \dots, I_{X_n}(x_n)\big).$$

Demostración. Por conveniencia, probaremos el resultado para $n = 2$, los otros casos se deducen de manera inductiva. Sea $y' \in Y'$ y sean $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$. Entonces

$$\begin{aligned}
y'\Big(\Psi(T)(x_1, x_2)\Big) &= y'\Big[\big(Ext_2\big(\Psi_1(T)\big)\big(x_1, I_{X_2}(x_2)\big)\Big] \\
&= I_{X_2}(x_2)\left[z_2 \mapsto \Big(\overleftarrow{J_Y \circ \Psi_1(T)}\Big)(x_1, z_2, y')\right] \\
&= I_{X_2}(x_2)\Big[z_2 \mapsto y'\Big(\Psi_1(T)(x_1, z_2)\Big)\Big] \\
&= I_{X_2}(x_2)\left[z_2 \mapsto I_{X_1}(x_1)[z_1 \mapsto (\overleftarrow{J_Y \circ T})(z_1, z_2, y')]\right] \\
&= I_{X_2}(x_2)\Big[z_2 \mapsto Ext_1(T)\big(I_{X_1}(x_1), z_2\big)(y')\Big] \\
&= I_{X_2}(x_2)\left[z_2 \mapsto \Big(\overleftarrow{J_Y \circ Ext_1(T)}\Big)\big(I_{X_1}(x_1), z_2, y'\big)\right] \\
&= y'\Big(\big(Ext_2 \circ Ext_1(T)\big)\big(I_{X_1}(x_1), I_{X_2}(x_2)\big)\Big) \\
&= y'\Big(EXT(T)\big(I_{X_1}(x_1), I_{X_2}(x_2)\big)\Big),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

Luego, esta proposición muestra que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \big(\widetilde{\otimes}_{i=1}^{n}\ell_1(B_{X_i'})\widetilde{\otimes}Y;\alpha\big) \arrow[r, "\varrho_0"] \arrow[d, two heads, "\otimes_{i=1}^{n}Q_{X_i'}\otimes Id_Y"] & \mathfrak{A}\big(c_0(B_{X_1'}),\dots,c_0(B_{X_n'});Y\big) \arrow[d, two heads, "\Psi"'] \\ \big(\widetilde{\otimes}_{i=1}^{n}X_i'\widetilde{\otimes}Y;\alpha\big) \arrow[r, "\varrho_n"] & \mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y) \end{tikzcd} \tag{4.11}$$

es conmutativo y —de la misma forma que en la prueba de la Proposición 4.1.7— se tiene que, si $X_1,\dots,X_n$ son espacios Asplund y $\mathfrak{A}$ es un ideal de operadores multilineales Arens estable para Y extendible, entonces la aplicación Ψ es una metric surjection. Es más, si dado el operador multilineal $T\in\mathfrak{A}(X_1,\dots,X_n;Y)$, tomamos una extensión $\widetilde{T}\in\mathfrak{A}\big(\ell_\infty(B_{X_1'}),\dots,\ell_\infty(B_{X_n'});Y\big)$ y consideramos —como en la demostración de la Proposición 4.1.7— el operador multilineal

$$S(a_1,\dots,a_n)=EXT(\widetilde{T})\left(A'\circ J_{c_0(B_{X_1'})}(a_1),\dots,A'\circ J_{c_0(B_{X_n'})}(a_n)\right),$$

se tiene que $S\in\mathfrak{A}\big(c_0(B_{X_1'}),\dots,c_0(B_{X_n'});Y\big)$, que $\Psi(S)=T$ y que $\|S\|_{\mathfrak{A}}\leq\|T\|_{\mathfrak{A}}\cdot(1+\varepsilon)^n$.

Estamos en condiciones de enunciar y probar la versión polinomial del Teorema 4.1.8.

Teorema 4.3.2. *Sea X un espacio Asplund. Si $\mathbb{Q}\sim\delta$ es un ideal de polinomios n-homogéneos extendible, Aron Berner estable para Y y con la Y-RNp, entonces*

$$\big(\widetilde{\otimes}^{n,s}X\widetilde{\otimes}Y;\delta\big)\overset{1}{\twoheadrightarrow}\mathbb{Q}(X;Y).$$

En particular, $\mathbb{Q}^{min}(X;Y)\overset{1}{=}\mathbb{Q}(X;Y)$.

Demostración. Teniendo en cuenta el diagrama conmutativo (4.11) y restringiéndonos a la diagonal, se obtiene que

$$\begin{tikzcd} \big(\widetilde{\otimes}^{n,s}\ell_1(B_{X'})\widetilde{\otimes}Y;\delta\big) \arrow[r, "\varrho_0"] \arrow[d, two heads, "\otimes^{n,s}Q_{X'}\otimes Id_Y"] & \mathbb{Q}\big(c_0(B_{X'});Y\big) \arrow[d, two heads, "\widetilde{\Psi}"'] \\ \big(\widetilde{\otimes}^{n,s}X'\widetilde{\otimes}Y;\delta\big) \arrow[r, "\varrho_n"] & \mathbb{Q}(X;Y), \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{\Psi}(p)(x):=AB(p)\big(I_X(x)\big)$, ya que aplicando la Proposición 4.3.1 se tiene que

$$\widetilde{\Psi}(p)(x)=AB(p)\big(I_X(x)\big)=EXT(\check{p})\big(I_X(x),\dots,I_X(x)\big)=\Psi(\check{p})(x,\dots,x).$$

Además, por lo comentado anteriormente se tiene que $\widetilde{\Psi}$ es una metric surjection. Al igual que en la prueba del Teorema 4.1.8, se tiene que la flecha que baja del lado izquierdo del diagrama es una metric surjection por ser $\mathbb{Q}$ extendible y, por último, ϱ_0 es una metric surjection ya que $\mathbb{Q}$ tiene la Y-RNp. En conclusión, ϱ_n resulta una metric surjection como queríamos demostrar. $\square$

Al igual que para ideales de operadores multilineales, podemos aplicar los resultados obtenidos para los ideales de polinomios homgeneos $\mathcal{P}_e$ y $\mathcal{P}_{P\mathcal{I}}$. Las pruebas se obtienen de la misma forma a lo hecho en la sección anterior adaptándolas al contexto polinomial.

Corolario 4.3.3. *Si X es un espacio Asplund e Y' es un espacio dual que no contiene copia de c_0, entonces*

$$\big(\widetilde{\otimes}^{n,s} X' \widetilde{\otimes} Y'; \delta_{ext}\big) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathcal{P}_e({}^n X; Y'),$$

donde δ_{ext} es la norma tensorial mixta asociada al ideal $\mathcal{P}_e$.

En particular, $(\mathcal{P}_e)^{min}({}^n X; Y') \overset{1}{=} \mathcal{P}_e({}^n X; Y')$.

El siguiente corolario es un resultado que fue probado por Carando y Dimant en [CD00], usando técnicas completamente diferentes (argumentos geométricos).

Corolario 4.3.4. *Si X es un espacio Asplund, entonces*

$$\big(\widetilde{\otimes}^{n,s} X' \widetilde{\otimes} Y; \delta_{int}\big) \overset{1}{\twoheadrightarrow} \mathcal{P}_{P\mathcal{I}}({}^n X; Y),$$

donde δ_{int} denota la norma tensorial mixta asociada al ideal $\mathcal{P}_{P\mathcal{I}}$.

En particular, $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^n X; Y) \overset{1}{=} (\mathcal{P}_{P\mathcal{I}})^{min}({}^n X; Y) \overset{1}{=} \mathcal{P}_{P\mathcal{I}}({}^n X; Y)$.

Como consecuencia de los corolarios anteriores, podemos deducir los resultados análogos sobre existencia de bases obtenidos en los Corolarios 4.2.2 y 4.2.8 para los ideales de polinomios homogéneos $\mathcal{P}_e$ y $\mathcal{P}_{P\mathcal{I}}$. Es importante comentar que para obtener los resultados análogos necesitamos un resultado en la línea de [GGL61] (o [GR05]) para aplicar en el producto tensorial mixto $\big((\widetilde{\otimes}^{n,s} X)\widetilde{\otimes} Y; \delta\big)$.

Sean X e Y espacios de Banach con bases $(e_j)_j$ e $(y_l)_l$ respectivamente. Vamos a definir una base natural en $\big((\widetilde{\otimes}^{n,s} X)\widetilde{\otimes} Y; \delta\big)$.

Para un índice de n-elementos $\alpha = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{N}^n$, notamos con

$$e^s_\alpha := S(e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}),$$

donde $S : \otimes^n X \to \otimes^{n,s} X$ es el operador de simetrización clásico (ver, por ejemplo, [GR05]). Sea el par de índices $(\alpha, l) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$, decimos que un tensor de la forma

$$e^s_\alpha \otimes y_l \in \big((\widetilde{\otimes}^{n,s} X)\widetilde{\otimes} Y; \delta\big)$$

es un monomio dado por el par de índices (α, l). Combinando los órdenes definidos en [GGL61] y en [GR05] tenemos una ordenación de la base monomial. En otras palabras, consideramos el square ordering para pares de índices $(\alpha, l) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$, donde en $\mathbb{N}^n$ tomamos el orden definido por Grecu y Ryan. Más precisamente, dados dos pares de índices $(\alpha, l), (\beta, k) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ decimos que $(\alpha, l) < (\beta, k)$ si $\alpha < \beta$ o, si $\alpha = \beta$ y $l < k$, donde el orden definido en $\mathbb{N}^n$ es el dado en [GR05, Section 2]. Para probar que obtenemos una base para el producto tensorial, tenemos que ver que las proyecciones a los monomios con el ordenamiento respectivo están acotadas uniformemente. El resultado se obtiene usando cuidadosamente las técnicas dadas en los dos artículos mencionados anteriormente y en [Flo01, 7.6 (b)].

Apéndice A

A.1. Propiedad de aproximación

Un espacio de Banach X tiene la *λ-propiedad de aproximación* si existe una red $(A_\eta)_\eta$ de operadores lineales de rango finito en $\mathcal{L}(X)$ con norma menor o igual a λ tales que A_η converge a Id_X uniformemente sobre compactos de X. Decimos que X tiene la *propiedad de aproximación acotada* si tiene la λ-propiedad de aproximación para algún λ y decimos que X tiene la *propiedad de aproximación métrica* si tiene la 1-propiedad de aproximación.

A.2. Propiedad de extensión

Un espacio de Banach X se dice *inyectivo* si para todo espacio de Banach Y, todo subespacio $Z \subseteq Y$ y todo operador $A \in \mathcal{L}(Z; X)$ existe $\tilde{A} \in \mathcal{L}(Y; X)$ una extensión de A. El espacio X tiene la *λ-propiedad de extensión* ($\lambda \geq 1$) si alguna extensión satisface que $\|\tilde{A}\| \leq \lambda \cdot \|A\|$. Por último, decimos que X tiene la *propiedad de extensión métrica* (metric extension property) si tiene la 1-propiedad de extensión.

En particular, si X tiene la propiedad de extensión métrica, entonces desde cualquier superespacio hay una proyección de norma 1. Por lo tanto, $\mathcal{L}(^nX; Y) \overset{1}{=} \mathcal{E}(^nX; Y)$. Por ejemplo, $\ell_\infty(J)$ tiene la propiedad de extensión métrica para todo conjunto de índices J.

A.3. Tipo y Cotipo

Sea X un espacio de Banach y consideramos $r_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, con $i \in \mathbb{N}$, las *variables Rademacher* definidas por $r_i(t) = sgn(\sin(2^n \pi t))$. Para $1 \leq p \leq 2$ y $q \geq 2$ decimos que

(1) X tiene *tipo p* si existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier elección de elementos $x_1, \ldots, x_n \in X$ se tiene que

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) \cdot x_i \|^p dt \right)^{1/p} \leq C \cdot \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p},$$

llamamos $T_p(X)$, *constante de tipo* p, a la mejor de las constantes C.

(2) X tiene *cotipo* q si existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier elección de elementos $x_1, \ldots, x_n \in X$ se tiene que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leq C \cdot \left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) \cdot x_i \|^q dt \right)^{1/q},$$

llamamos $C_q(X)$, *constante de cotipo* q, a la mejor de las constantes C.

La Desigualdad de Kahane dice que dado $1 \leq p < \infty$, existe una constante K_p tal que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualquier elección de elementos $x_1, \ldots, x_n \in X$ se tiene que

$$\int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) \cdot x_i \| dt \leq \left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) \cdot x_i \|^p dt \right)^{1/p} \leq K_p \cdot \int_0^1 \| \sum_{i=1}^{n} r_i(t) \cdot x_i \| dt.$$

Es decir, que las normas de las sumas de Rademacher son todas equivalentes, por lo que en la definición de tipo y cotipo puede usarse cualquiera de ellas (cada elección tiene sus correspondientes constantes de tipo y cotipo).

Todo espacio de Banach X tiene tipo 1 y cotipo ∞ con $T_1(X) = C_\infty(X) = 1$. Si un espacio de Banach X tiene tipo $p > 1$, entonces tiene tipo $\tilde{p}$ para todo $1 \leq \tilde{p} \leq p$ con $T_{\tilde{p}}(X) \leq T_p(X)$ y si tiene cotipo $q < \infty$, entonces tiene cotipo $\tilde{q}$ para todo $\tilde{q} \geq q$ con $C_{\tilde{q}}(X) \geq C_q(X)$.

Todo espacio de Hilbert tiene tipo 2 y cotipo 2 (los mejores posibles) y recíprocamente, si un espacio de Banach tiene tipo 2 y cotipo 2, entonces es isomorfo a un espacio de Hilbert.

Por ejemplo, si $1 \leq p \leq 2$ entonces ℓ_p y L_p tienen tipo p y cotipo 2 y si $q \geq 2$, entonces ℓ_q y L_q tienen cotipo q y tipo 2.

A.4. Espacios Asplund y la propiedad de Radon-Nikodým

Un espacio de Banach X tiene la *propiedad de Radon-Nikodým* si para toda medida finita μ, se tiene que todo operador lineal $A : L_1(\mu) \to X$ es *representable*, i.e., existe una función acotada μ-medible $g : \Omega \to X$ tal que

$$Tf = \int fg d\mu,$$

para todo $f \in L_1(\mu)$.

Son equivalentes:

(1) X tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

(2) Todo subespacio cerrado de X tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

(3) Todo subespacio cerrado y separable de X tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

Un espacio de Banach X es *Asplund* si su dual X' tiene la propiedad de Radon-Nikodým. Equivalentemente, un espacio de Banach X es Asplund si y solo si todo subespacio separable de X tiene dual separable. En particular, los espacios reflexivos y los espacios con dual separable son Asplund, como por ejemplo c_o. Para más información sobre este tema, ver [DU77].

A.5. Bases en espacios de Banach

Decimos que la sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una *base de Schauder* de X si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$x = \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot x_j.$$

Observemos que si $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de X, entonces los funcionales coordenados $x'_j \in X'$ dados por $x'_j(x) = a_j$ son continuos.

Una sucesión $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se dice una *sucesión básica*, si es una base para $[x_j]_{j\in\mathbb{N}} = \overline{span\{x_j : j \in \mathbb{N}\}}$. Sean X e Y dos espacios de Banach con bases (o sucesiones básicas) $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Decimos que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son *equivalentes* y lo notamos $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \sim (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$, si para cualquier sucesión de escalares $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ se verifica que $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot x_j$ converge en X si y solo si $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot y_j$ converge en Y.

Proposición A.5.1. *Sean X e Y dos espacios de Banach con bases (o sucesiones básicas) $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ respectivamente. Son equivalentes*

(1) $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \sim (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

(2) Existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier elección de finitos escalares $a_1, \dots, a_n$, se tiene que

$$\frac{1}{C} \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot y_j \right\|_Y \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_j \right\|_X \leq C \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \cdot y_j \right\|_Y .$$

(3) Existe un isomorfismo $A : [x_j]_{j\in\mathbb{N}} \to [y_j]_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $Tx_j = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Sean $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una base del espacio X, $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente de números naturales con $p_1 = 0$ y $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares. Una sucesión de vectores no nulos de la forma

$$u_j = \sum_{j=p_j+1}^{p_{j+1}} a_j \cdot x_j,$$

se llama una *sucesión básica en bloque de* $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Es fácil ver que $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es efectivamente una sucesión básica.

Observemos que si $X = \ell_p$, con $1 \leq p < \infty$ o $X = c_0$ y consideramos $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en bloque de la base canónica $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de X tal que existen constantes $C_1, C_2 > 0$ que verifican $C_1 \leq \|u_j\|_X \leq C_2$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Teorema A.5.2 (Principio de selección de Bessaga-Pełczynski)**.**
Sea $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una base y $(x'_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset X'$ sus respectivos funcionales coordenados. Sea $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $\|y_k\| \geq C > 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y $x'_j(y_k)$ tiende a 0 (cuando $k \to \infty$).

Entonces, existe $(y_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión básica equivalente a una base en bloque de los $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

Decimos que una base de Schauder $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de X es *incondicional* si para cada $x \in X$, la serie $\sum_{j\in\mathbb{N}} x'_j(x) \cdot x_j$ converge incondicionalmente. En particular, se tiene que $x_{\sigma(j)}$ es base de Schauder de X para toda σ permutación de $\mathbb{N}$.

Proposición A.5.3. *Una base de Schauder $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de X es incondicional si y solo si existe una constante $K \geq 1$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ y escalares $a_1, \ldots, a_N$ y $b_1, \ldots, b_N$, donde $|a_j| \leq |b_j|$ para todo $1 \leq j \leq N$, se satisface que*

$$\left\| \sum_{j=1}^{N} a_j \cdot x_j \right\| \leq K \cdot \left\| \sum_{j=1}^{N} b_j \cdot x_j \right\|. \tag{A.1}$$

Para una base incondicional $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de X llamamos la *constante de incondicionalidad* de la base $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ a la mejor constante que satisface la condición (A.1).

A continuación veremos los conceptos de base achicante y base acotadamente completa y la relación entre ellas.

Decimos que una base de Schauder $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de X es una *base achicante* si $(x'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de X' y decimos que una base de Schauder $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de X es una *base acotadamente completa* si dada cualquier sucesión de escalares $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\sup_N \left\| \sum_{j=1}^{N} a_j \cdot x_j \right\| < \infty,$$

entonces la serie $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot x_j$ es convergente.

Proposición A.5.4. *Sea $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de X. Son equivalentes*

(1) $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *es una base achicante.*

(2) Dado $x' \in X'$ *se tiene que* $\lim\limits_{N\to\infty} \left\| x'|_{[x_j]_{j>N}} \right\| = 0.$

(3) Toda sucesión básica en bloques de $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *tiende débilmente a cero.*

Proposición A.5.5. *Sea $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de X con $(x'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sus respectivos funcionales coordenados. Son equivalentes*

(1) $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *es una base acotadamente completa.*

(2) $(x'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *es una base achicante de* $H = [x'_j] \subseteq X'$.

(3) La aplicación canónica $J : X \to H'$ *dada por* $J(x)(h) = h(x)$ *es un isomorfismo.*

Teorema A.5.6. *Sea $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de X con $(x'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sus respectivos funcionales coordenados. Son equivalentes*

(1) $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *es una base achicante.*

(2) $(x'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *es una base acotadamente completa de* $H = [x'_j] \subseteq X'$.

(3) $H = X'$.

Teorema A.5.7 (James)**.**
Sea X un espacio de Banach con base de Schauder $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Entonces, X es reflexivo si y solo si $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es una base achicante y acotadamente completa.

Teorema A.5.8 (Johnson-Rosenthal-Zippin)**.**
Sea X un espacio de Banach. Entonces,
X' tiene base de Schauder si y solo si X tiene base de Schauder achicante.

A.6. Operadores lineales absolutamente sumantes

A continuación veremos algunos resultados básicos e importantes sobre los operadores absolutamente p-sumantes que pueden encontrarse en [DJT95].

Un operador lineal $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ se dice *absolutamente p-sumante* si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x_1, \ldots, x_m \in X$ vale que

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|A(x_k)\|_Y^p \right)^{1/p} \leq C \cdot w_p\big((x_k)_{k=1}^m\big). \tag{A.2}$$

Se denota $\Pi_p(X;Y)$ al espacio de operadores absolutamente p-sumantes y resulta un ideal de operadores de Banach con la norma dada por

$$\pi_p(A) := \text{ínf}\{C > 0 \ : \ A \text{ verifica (A.2)}\}.$$

Es decir, $A \in \Pi_p(X;Y)$ si y solo si el operador lineal inducido $\hat{A} : \ell_p^w(X) \to \ell_p(Y)$ dado por $\hat{A}\big((x_k)_{k=1}^m\big) = (Ax_k)_{k=1}^m$ resulta continuo. En tal caso, vale que $\|\hat{A} : \ell_p^w(X) \to \ell_p(Y)\| = \pi_p(A)$.

Proposición A.6.1. *La correspondencia $A \mapsto (Ae_k)_{k\in\mathbb{N}}$ resulta un isomorfismo isométrico de $\mathcal{L}(\ell_{p'};X) \to \ell_p^w(X)$ (donde $\ell_{p'} = c_0$ si $p = 1$).*

Proposición A.6.2. *Son equivalentes.*

(1) $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ es absolutamente p-sumante.

(2) Para cada $B \in \mathcal{L}(\ell_{p'};X)$, se tiene que AB es absolutamente p-sumante.

(3) Existe $C > 0$ tal que $\pi(AB) \leq C \cdot \|B\|$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $B \in \mathcal{L}(\ell_{p'}^m;X)$.

Teorema A.6.3 (Teorema de inclusión)**.**
Sean $1 \leq p < q < \infty$, entonces

$$\Pi_p(X;Y) \subseteq \Pi_q(X;Y),$$

con $\pi_q(A) \leq \pi_p(A)$ para todo $A \in \Pi_p(X;Y)$.

Además, si X tiene cotipo 2, vale que

$$\Pi_2(X;Y) = \Pi_1(X;Y).$$

Teorema A.6.4 (Teorema de dominación de Pietsch)**.**
$A \in \Pi_p(X;Y)$ si y solo si existen $C > 0$ y una medida de probabilidad μ en $(B_{X'};w^*)$ tal que

$$\|Ax\|_Y \leq C \left(\int_{B_{X'}} |x'(x)|^p d\mu(x') \right)^{1/p}. \tag{A.3}$$

En tal caso, $\pi_p(A)$ es el ínfimo de las constantes C para las cuales existe tal medida y se verifica la condición (A.3)*.*

Teorema A.6.5 (Teorema de factorización de Pietsch)**.**
$A \in \Pi_p(X;Y)$ si y solo si existen una medida de probabilidad μ en $(B_{X'};w^*)$, un subespacio $X_p \subseteq L_p(\mu)$ y un operador $\hat{A} : X_p \to Y$ tales que dados $j_p : C(K) \hookrightarrow L_p(\mu)$ e $i_X : X \to C(K)$ vale que $j_p i_X(X) \subseteq X_p$ y $\hat{A} j_p i_X(x) = Ax$.

Es decir, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "A"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \\
i_X(X) \arrow[r, "j_p^X"] \arrow[d, hook] & X_p \arrow[u, "\hat{A}"'] \arrow[d, hook] \\
C(K) \arrow[r, "j_p"] & L_p(\mu)
\end{tikzcd}$$

Teorema A.6.6 (Teorema de composición)**.**
Sean $1 \leq p, q < \infty$ *y* $\frac{1}{r} = \text{mín}\{1; \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\}$*. Entonces*

$$\Pi_p \circ \Pi_q \subseteq \Pi_r,$$

y

$$\pi_r(AB) \leq \pi_p(A) \cdot \pi_q(B)$$

para $A \in \Pi_p(Y; Z)$ *y* $B \in \Pi_q(X; Y)$*.*

Proposición A.6.7 (Maurey)**.**
Sea X *un espacio con cotipo 2. Entonces para cualquier* $A \in \mathcal{L}(\ell_\infty^m; X)$ *se verifica que* A *es absolutamente 2-sumante y que existe una constante* $C > 0$ *(que solo depende de la constante de cotipo de* X*) tal que* $\pi_2(A) \leq C \cdot \|A\|$*. Es decir,* $\Pi_2(\ell_\infty^m; X) = \mathcal{L}(\ell_\infty^m; X)$*.*

Sean E y F dos espacios de sucesiones normales y simétricos. Llamamos $E(Y)$ al espacio de sucesiones fuertemente E-sumables. Es decir, el conjunto de sucesiones $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ tales que $(\|y_k\|_Y)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ que resulta un espacio de Banach con la norma dada por

$$\|(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{E(Y)} := \left\|(\|y_k\|_Y)_{k\in\mathbb{N}}\right\|_E .$$

Llamamos $F^w(X)$ al espacio de sucesiones débilmente F-sumables. Es decir, el conjunto de las sucesiones $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tales que

$$\|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_{F^w(X)} := \sup_{x' \in B_{X'}} \left\| (x'(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \right\|_F < \infty,$$

que resulta un espacio de Banach.

Si $F \hookrightarrow E$, decimos que un operador lineal $A \in \mathcal{L}(X; Y)$ es *absolutamente* (E, F)*-sumante* si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $x_1, \ldots, x_m \in X$ vale que

$$\left\| (\|Ax_k\|_Y)_{k=1}^m \right\|_E \leq C \cdot c_F^E \cdot \left\|(x_k)_{k=1}^m\right\|_{F^w(X)}. \tag{A.4}$$

Se denota $\Pi_{(E,F)}(X;Y)$ al espacio de operadores absolutamente (E,F)-sumantes. Además, si $\|e_k\|_E = \|e_k\|_F = 1$ (como asumimos para los espacios de sucesiones con los que trabajamos), $\Pi_{(E,F)}(X;Y)$ resulta un ideal de operadores de Banach con la norma dada por

$$\pi_{(E,F)}(A) := \text{ínf}\{C > 0 \ : \ A \text{ verifica (A.4)}\}.$$

Es decir, $A \in \Pi_{(E,F)}(X;Y)$ si y solo si el operador lineal inducido $\hat{A} : F^w(X) \to E(Y)$ dado por $\hat{A}\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = (Ax_k)_{k\in\mathbb{N}}$ resulta continuo. En tal caso, vale que $\|\hat{A} : F^w(X) \to E(Y)\| = \pi_{(E,F)}(A) \cdot c_F^E$. Observemos por último que si $E = \ell_q$ y $F = \ell_p$ obtenemos los operadores absolutamente (q,p)-sumantes y si además $p = q$ obtenemos los operadores absolutamente p-sumantes.

Veamos algunos resultados que pueden encontrarse en [DMM01, DMM02] sobre operadores absolutamente (E,p)-sumantes —es decir, operadores absolutamente (E,ℓ_p)-sumantes— y recordemos que dichos operadores están definidos si $\ell_p \hookrightarrow E$.

Los siguiente resultados generalizan la Proposición A.6.2 y los Teoremas A.6.6 y A.6.3.

Proposición A.6.8. *Sea E un espacio de sucesiones tal que $\ell_p \hookrightarrow E$. Para todo operador lineal $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ y para toda constante $C > 0$, son equivalentes.*

(1) A es absolutamente (E,p)-sumante con $\pi_{(E,p)}(A) \leq C$.

(2) Para cada $m \in \mathbb{N}$, la aplicación $\Phi_A^m : \mathcal{L}(\ell_{p'}^m;X) \to E(Y)$ dada por $\Phi_A^m(B) = \big(BAe_k\big)_{k=1}^m$ tiene norma menor o igual a $C \cdot c_p^E$.

(3) $\pi_{(E,p)}(AB) \leq C \cdot \|B\|$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y todo $B \in \mathcal{L}(\ell_{p'}^m;X)$.

Observemos que si E y F son espacios de sucesiones tales que $\ell_p \hookrightarrow E \hookrightarrow F$, entonces

$$\Pi_{(E,p)}(X;Y) \subseteq \Pi_{(F,p)}(X;Y)$$

y además $\pi_{(F,p)}(A) \leq c_E^F \cdot \frac{c_p^E}{c_p^F} \cdot \pi_{(E,p)}(A)$ para todo $A \in \Pi_{(E,p)}(X;Y)$.

Teorema A.6.9 (Teorema de inclusión)**.**
Sean $1 \leq p < q < \infty$ y $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Entonces

$$\Pi_{(E,p)}(X;Y) \subseteq \Pi_{(M(\ell_r,E),q)}(X;Y),$$

con $\pi_{(M(\ell_r,E),q)}(A) \leq c_p^E \cdot \left(c_q^{M(\ell_r,E)}\right)^{-1} \cdot \pi_{(E,p)}(A)$ para cada $A \in \Pi_{(E,p)}(X;Y)$.

Además, si X tiene cotipo 2 se tiene que

$$\Pi_{(E,1)}(X;Y) = \Pi_{(M(\ell_2,E),2)}(X;Y). \tag{A.5}$$

Observación A.6.10. *Siguiendo la notación del teorema anterior, la inclusión* $\Pi_{E,p}(X;Y) \subseteq \Pi_{M(\ell_s,E),q}(X;Y)$ *sigue siendo válida si* $s \leq r$*, o dicho de otra manera, si* $\frac{1}{s} \geq \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$ *(y la desigualdad entre las normas también se mantiene).*

Teorema A.6.11 (Teorema de composición)**.**
Sean $1 \leq p < q < \infty$ *y* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$*. Entonces*

$$\Pi_{(M(\ell_r,E),q)} \circ \Pi_r \subseteq \Pi_{(E,p)},$$

y

$$\pi_{(E,p)}(AB) \leq \pi_{(M(\ell_r,E)),q}(A) \cdot \pi_r(B)$$

para $A \in \Pi_{(M(\ell_r,E),q)}(Y;Z)$ *y* $B \in \Pi_r(X;Y)$*.*

Bibliografía

[AK06] F. Albiac and N. J. Kalton. *Topics in Banach space theory*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 233 (Springer, New York, 2006).

[Ale85a] R. Alencar. *Multilinear mappings of nuclear and integral type.* Proc. Amer. Math. Soc., vol. 94 (1985), no. 1, pp. 33–38. URL `http://dx.doi.org/10.2307/2044946`.

[Ale85b] R. Alencar. *On reflexivity and basis for $P(^mE)$.* Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, vol. 85 (1985), no. 2, pp. 131–138.

[All78] G. D. Allen. *Duals of Lorentz spaces.* Pacific J. Math., vol. 77 (1978), no. 2, pp. 287–291. URL `http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102806450`.

[AHV83] R. M. Aron, C. Hervés and M. Valdivia. *Weakly continuous mappings on Banach spaces.* J. Funct. Anal., vol. 52 (1983), no. 2, pp. 189–204. URL `http://dx.doi.org/10.1016/0022-1236(83)90081-2`.

[AP80] R. M. Aron and J. B. Prolla. *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces.* J. Reine Angew. Math., vol. 313 (1980), pp. 195–216. URL `http://dx.doi.org/10.1515/crll.1980.313.195`.

[Ban22] S. Banach. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.* Fundamenta Mathematicae, vol. 3 (1922), no. 1, pp. 133–181. URL `http://eudml.org/doc/213289`.

[Ban32t] S. Banach. *Theory of linear operations*, *North-Holland Mathematical Library*, vol. 38 (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987). Translated from the French by F. Jellett, With comments by A. Pełczyński and Cz. Bessaga.

[Ban32] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires* (Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993). Reprint of the 1932 original.

[BP58] C. Bessaga and A. Pełczyński. *On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces.* Studia Math., vol. 17 (1958), pp. 151–164.

[Ble88] R. C. Blei. *Multilinear measure theory and the Grothendieck factorization theorem.* Proc. London Math. Soc. (3), vol. 56 (1988), no. 3, pp. 529–546. URL http://dx.doi.org/10.1112/plms/s3-56.3.529.

[Bog57] W. Bogdanowicz. *On the weak continuity of the polynomial functionals defined on the space c_0.* Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III., vol. 5 (1957), pp. 243–246, XXI.

[BH31] H. F. Bohnenblust and E. Hille. *On the absolute convergence of Dirichlet series.* Ann. of Math. (2), vol. 32 (1931), no. 3, pp. 600–622. URL http://dx.doi.org/10.2307/1968255.

[BPGV04] F. Bombal, D. Pérez-García and I. Villanueva. *Multilinear extensions of Grothendieck's theorem.* Q. J. Math., vol. 55 (2004), no. 4, pp. 441–450. URL http://dx.doi.org/10.1093/qjmath/55.4.441.

[BMP10] G. Botelho, C. Michels and D. Pellegrino. *Complex interpolation and summability properties of multilinear operators.* Rev. Mat. Complut., vol. 23 (2010), no. 1, pp. 139–161. URL http://dx.doi.org/10.1007/s13163-009-0001-3.

[BP09] G. Botelho and D. Pellegrino. *When every multilinear mapping is multiple summing.* Math. Nachr., vol. 282 (2009), no. 10, pp. 1414–1422. URL http://dx.doi.org/10.1002/mana.200710112.

[BR01] C. Boyd and R. A. Ryan. *Geometric theory of spaces of integral polynomials and symmetric tensor products.* J. Funct. Anal., vol. 179 (2001), no. 1, pp. 18–42. URL http://dx.doi.org/10.1006/jfan.2000.3666.

[Bra84] H.-A. Braunss. *Ideale multilinearer Abbildungen und Räume holomorfer Funktionen.* Ph.D. thesis, Potsdam (1984).

[Bu03] Q. Bu. *Some properties of the injective tensor product of $L^p[0,1]$ and a Banach space.* J. Funct. Anal., vol. 204 (2003), no. 1, pp. 101–121. URL http://dx.doi.org/10.1016/S0022-1236(03)00098-3.

[BB06] Q. Bu and G. Buskes. *The Radon-Nikodym property for tensor products of Banach lattices.* Positivity, vol. 10 (2006), no. 2, pp. 365–390. URL http://dx.doi.org/10.1007/s11117-005-0025-y.

[BDDO03] Q. Bu, J. Diestel, P. Dowling and E. Oja. *Types of Radon-Nikodym properties for the projective tensor product of Banach spaces.* Illinois J. Math., vol. 47 (2003), no. 4, pp. 1303–1326. URL http://projecteuclid.org/euclid.ijm/1258138106.

[CP07] E. Çalişkan and D. M. Pellegrino. *On the multilinear generalizations of the concept of absolutely summing operators*. Rocky Mountain J. Math., vol. 37 (2007), no. 4, pp. 1137–1154. URL `http://dx.doi.org/10.1216/rmjm/1187453101`.

[Car99] D. Carando. *Extendible polynomials on Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl., vol. 233 (1999), no. 1, pp. 359–372. URL `http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1999.6319`.

[Car01] D. Carando. *Extendibility of polynomials and analytic functions on l_p*. Studia Math., vol. 145 (2001), no. 1, pp. 63–73. URL `http://dx.doi.org/10.4064/sm145-1-4`.

[CD00] D. Carando and V. Dimant. *Duality in spaces of nuclear and integral polynomials*. J. Math. Anal. Appl., vol. 241 (2000), no. 1, pp. 107–121. URL `http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1999.6626`.

[CDS06] D. Carando, V. Dimant and P. Sevilla-Peris. *Limit orders and multilinear forms on l_p spaces*. Publ. Res. Inst. Math. Sci., vol. 42 (2006), no. 2, pp. 507–522. URL `http://projecteuclid.org/euclid.prims/1166642113`.

[CDS07] D. Carando, V. Dimant and P. Sevilla-Peris. *Ideals of multilinear forms—a limit order approach*. Positivity, vol. 11 (2007), no. 4, pp. 589–607. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s11117-007-2084-8`.

[CDS09] D. Carando, V. Dimant and P. Sevilla-Peris. *Multilinear Hölder-type inequalities on Lorentz sequence spaces*. Studia Math., vol. 195 (2009), no. 2, pp. 127–146. URL `http://dx.doi.org/10.4064/sm195-2-3`.

[CDSV14] D. Carando, V. Dimant, P. Sevilla-Peris and R. Villafañe. *Diagonal extendible multilinear operators between ℓ_p-spaces*. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Math. RACSAM, vol. 108 (2014), no. 2, pp. 541–555. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s13398-013-0125-7`.

[CG11b] D. Carando and D. Galicer. *Five basic lemmas for symmetric tensor products of normed spaces*. Rev. Un. Mat. Argentina, vol. 52 (2011), no. 2, pp. 35–60.

[CG11] D. Carando and D. Galicer. *The symmetric Radon-Nikodým property for tensor norms*. J. Math. Anal. Appl., vol. 375 (2011), no. 2, pp. 553–565. URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.09.044`.

[CL04] D. Carando and S. Lassalle. *E' and its relation with vector-valued functions on E*. Ark. Mat., vol. 42 (2004), no. 2, pp. 283–300. URL `http://dx.doi.org/10.1007/BF02385480`.

[CL05] D. Carando and S. Lassalle. *Extension of vector-valued integral polynomials*. J. Math. Anal. Appl., vol. 307 (2005), no. 1, pp. 77–85. URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.10.020`.

[CL08] D. Carando and S. Lassalle. *Atomic decompositions for tensor products and polynomial spaces*. J. Math. Anal. Appl., vol. 347 (2008), no. 1, pp. 243–254. URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.05.051`.

[CS14] D. Carando and P. Sevilla-Peris. *Extendibility of bilinear forms on Banach sequence spaces*. Israel J. Math., vol. 199 (2014), no. 2, pp. 941–954. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s11856-014-0003-9`.

[CZ99] D. Carando and I. Zalduendo. *A Hahn-Banach theorem for integral polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 127 (1999), no. 1, pp. 241–250. URL `http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-99-04485-8`.

[Carl76] B. Carl. *A remark on p-integral and p-absolutely summing operators from ℓ_u into ℓ_v*. Studia Math., vol. 57 (1976), no. 3, pp. 257–262.

[CGJ01] J. M. F. Castillo, R. García and J. A. Jaramillo. *Extension of bilinear forms on Banach spaces*. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 129 (2001), no. 12, pp. 3647–3656 (electronic). URL `http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-01-05986-X`.

[DF93] A. Defant and K. Floret. *Tensor norms and operator ideals*, *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 176 (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993).

[DMM01] A. Defant, M. Mastylo and C. Michels. *Summing inclusion maps between symmetric sequence spaces, a survey*. In *Recent progress in functional analysis (Valencia, 2000)*, *North-Holland Math. Stud.*, vol. 189, pp. 43–60 (North-Holland, Amsterdam, 2001). URL `http://dx.doi.org/10.1016/S0304-0208(01)80035-9`.

[DMM02] A. Defant, M. Mastylo and C. Michels. *Summing inclusion maps between symmetric sequence spaces*. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 354 (2002), no. 11, pp. 4473–4492 (electronic). URL `http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-02-03056-8`.

[DJT95] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge. *Absolutely summing operators*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, vol. 43 (Cambridge University Press, Cambridge, 1995). URL `http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511526138`.

[DU77] J. Diestel and J. J. Uhl Jr. *Vector measures* (American Mathematical Society, Providence, R.I., 1977). With a foreword by B. J. Pettis, Mathematical Surveys, No. 15.

[Dim03] V. Dimant. *Strongly p-summing multilinear operators.* J. Math. Anal. Appl., vol. 278 (2003), no. 1, pp. 182–193. URL `http://dx.doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00710-2`.

[DG01] V. Dimant and R. Gonzalo. *Block diagonal polynomials.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 353 (2001), no. 2, pp. 733–747 (electronic). URL `http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-00-02735-5`.

[DZ96] V. Dimant and I. Zalduendo. *Bases in spaces of multilinear forms over Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl., vol. 200 (1996), no. 3, pp. 548–566. URL `http://dx.doi.org/10.1006/jmaa.1996.0224`.

[Din99] S. Dineen. *Complex analysis on infinite-dimensional spaces.* Springer Monographs in Mathematics (Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999). URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-0869-6`.

[Flo01] K. Floret. *Minimal ideals of n-homogeneous polynomials on Banach spaces.* Results Math., vol. 39 (2001), no. 3-4, pp. 201–217. URL `http://dx.doi.org/10.1007/BF03322686`.

[Flo02] K. Floret. *On ideals of n-homogeneous polynomials on Banach spaces.* In *Topological algebras with applications to differential geometry and mathematical physics (Athens, 1999)*, pp. 19–38 (Univ. Athens, Athens, 2002).

[FG03] K. Floret and D. García. *On ideals of polynomials and multilinear mappings between Banach spaces.* Arch. Math. (Basel), vol. 81 (2003), no. 3, pp. 300–308. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s00013-003-0439-3`.

[FH02] K. Floret and S. Hunfeld. *Ultrastability of ideals of homogeneous polynomials and multilinear mappings on Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., vol. 130 (2002), no. 5, pp. 1425–1435 (electronic). URL `http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-01-06228-1`.

[Gal12] D. Galicer. *Symmetric tensor products: metric and isomorphic theory and applications.* Ph.D. thesis, Universidad de Buenos Aires (2012).

[GV15] D. Galicer and R. Villafañe. *Coincidence of extendible vector-valued ideals with their minimal kernel.* J. Math. Anal. Appl., vol. 421 (2015), no. 2, pp. 1743–1766. URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.07.023`.

[Gar69] D. J. H. Garling. *A class of reflexive symmetric BK-spaces.* Canad. J. Math., vol. 21 (1969), pp. 602–608.

[Gar74] D. J. H. Garling. *Diagonal mappings between sequence spaces.* Studia Math., vol. 51 (1974), pp. 129–138.

[GGL61] B. R. Gelbaum and J. Gil de Lamadrid. *Bases of tensor products of Banach spaces.* Pacific J. Math., vol. 11 (1961), pp. 1281–1286.

[GdL63] J. Gil de Lamadrid. *Uniform cross norms and tensor products of Banach algebras.* Bull. Amer. Math. Soc., vol. 69 (1963), pp. 797–803.

[GG94] M. González and J. Gutiérrez. *When every polynomial is unconditionally converging.* Arch. Math. (Basel), vol. 63 (1994), no. 2, pp. 145–151. URL `http://dx.doi.org/10.1007/BF01189888`.

[GR05] B. C. Grecu and R. A. Ryan. *Schauder bases for symmetric tensor products.* Publ. Res. Inst. Math. Sci., vol. 41 (2005), no. 2, pp. 459–469. URL `http://projecteuclid.org/euclid.prims/1145475364`.

[Gro53] A. Grothendieck. *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques.* Bol. Soc. Mat. São Paulo, vol. 8 (1953), pp. 1–79.

[Gro55] A. Grothendieck. *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.* Mem. Amer. Math. Soc., vol. 1955 (1955), no. 16, p. 140.

[Hol86] R. Hollstein. *Infinite-factorable holomorphic mappings on locally convex spaces.* Collect. Math., vol. 37 (1986), no. 3, pp. 261–276.

[JPPGV07] H. Jarchow, C. Palazuelos, D. Pérez-García and I. Villanueva. *Hahn-Banach extension of multilinear forms and summability.* J. Math. Anal. Appl., vol. 336 (2007), no. 2, pp. 1161–1177. URL `http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.03.057`.

[KR98] P. Kirwan and R. A. Ryan. *Extendibility of homogeneous polynomials on Banach spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., vol. 126 (1998), no. 4, pp. 1023–1029. URL `http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04009-X`.

[Kon75] H. König. *Diagonal and convolution operators as elements of operator ideals.* Math. Ann., vol. 218 (1975), no. 2, pp. 97–106.

[KT34] G. Köthe and O. Toeplitz. *Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen.* J. Reine Angew. Math., vol. 171 (1934), pp. 193–226. URL `http://dx.doi.org/10.1515/crll.1934.171.193`.

[Lew77] D. R. Lewis. *Duals of tensor products.* In *Banach spaces of analytic functions (Proc. Pelczynski Conf., Kent State Univ., Kent, Ohio, 1976)*, pp. 57–66. Lecture Notes in Math., Vol. 604 (Springer, Berlin, 1977).

[LP68] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński. *Absolutely summing operators in L_p-spaces and their applications.* Studia Math., vol. 29 (1968), pp. 275–326.

[LTI77] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. I* (Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977). Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92.

[LTII79] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. II*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas]*, vol. 97 (Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979). Function spaces.

[Lit30] J. E. Littlewood. *On bounded bilinear forms in an infinite number of variables.* The Quarterly Journal of Mathematics, vol. os-1 (1930), no. 1, pp. 164–174. URL `http://qjmath.oxfordjournals.org/content/os-1/1/164.short`.

[Mat03] M. C. Matos. *Fully absolutely summing and Hilbert-Schmidt multilinear mappings.* Collect. Math., vol. 54 (2003), no. 2, pp. 111–136.

[MQ10] B. Maurizi and H. Queffélec. *Some remarks on the algebra of bounded Dirichlet series.* J. Fourier Anal. Appl., vol. 16 (2010), no. 5, pp. 676–692. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s00041-009-9112-y`.

[Maz10] M. Mazzitelli. *Inclusiones sumantes entre espacios de sucesiones.* Master's thesis, Universidad de Buenos Aires (2010).

[Muj86] J. Mujica. *Complex analysis in Banach spaces*, *North-Holland Mathematics Studies*, vol. 120 (North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1986). Holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 107.

[Mur10] S. Muro. *Holomorphic functions of bounded type and ideals of homogeneous polynomials on Banach spaces.* Ph.D. thesis, Universidad de Buenos Aires (2010).

[Pel57] A. Pełczyński. *A property of multilinear operations.* Studia Math., vol. 16 (1957), pp. 173–182.

[PG05] D. Pérez-García. *Comparing different classes of absolutely summing multilinear operators.* Arch. Math. (Basel), vol. 85 (2005), no. 3, pp. 258–267. URL `http://dx.doi.org/10.1007/s00013-005-1125-4`.

[PG06] D. Pérez-García. *The trace class is a Q-algebra.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., vol. 31 (2006), no. 2, pp. 287–295.

[Pie67] A. Pietsch. *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen.* Studia Math., vol. 28 (1966/1967), pp. 333–353.

[Pie80] A. Pietsch. *Operator ideals* (North Holland, 1980).

[Pie84] A. Pietsch. *Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)*. In *Proceedings of the second international conference on operator algebras, ideals, and their applications in theoretical physics (Leipzig, 1983)*, *Teubner-Texte Math.*, vol. 67 (Teubner, Leipzig, 1984) pp. 185–199.

[Pis83] G. Pisier. *Counterexamples to a conjecture of Grothendieck.* Acta Math., vol. 151 (1983), no. 3-4, pp. 181–208. URL `http://dx.doi.org/10.1007/BF02393206`.

[Pis86] G. Pisier. *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*, vol. 60 (Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986).

[Rei81] S. Reisner. *A factorization theorem in Banach lattices and its application to Lorentz spaces.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), vol. 31 (1981), no. 1, pp. viii, 239–255. URL `http://www.numdam.org/item?id=AIF_1981__31_1_239_0`.

[RS82] W. Ruess and C. Stegall. *Extreme points in duals of operator spaces.* Math. Ann., vol. 261 (1982), no. 4, pp. 535–546. URL `http://dx.doi.org/10.1007/BF01457455`.

[Rya02] R. A. Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces.* Springer Monographs in Mathematics (Springer-Verlag London, Ltd., London, 2002). URL `http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4471-3903-4`.

[Sch43] R. Schatten. *On the direct product of Banach spaces.* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 53 (1943), pp. 195–217.

[Sch46] R. Schatten. *The cross-space of linear transformations.* Ann. of Math. (2), vol. 47 (1946), pp. 73–84.

[Sch50] R. Schatten. *A Theory of Cross-Spaces.* Annals of Mathematics Studies, no. 26 (Princeton University Press, Princeton, N. J., 1950).

[SVN46] R. Schatten and J. von Neumann. *The cross-space of linear transformations. II.* Ann. of Math. (2), vol. 47 (1946), pp. 608–630.

[SVN48] R. Schatten and J. von Neumann. *The cross-space of linear transformations. III.* Ann. of Math. (2), vol. 49 (1948), pp. 557–582.

[Sch91] B. Schneider. *On absolutely p-summing and related multilinear mappings.* Wissenschaftliche Zeitschrift der Brandemburger Landeshochschule, vol. 35 (1991), no. 1991, pp. 105–117.

[TJ70] N. Tomczak-Jaegermann. *A remark on* (s,t)*-absolutely summing operators in* L_p*-spaces.* Studia Math., vol. 35 (1970), pp. 97–100.

[Vil03] I. Villanueva. *Integral mappings between Banach spaces.* J. Math. Anal. Appl., vol. 279 (2003), no. 1, pp. 56–70. URL `http://dx.doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00362-1`.

[Zal93] I. Zalduendo. *An estimate for multilinear forms on* l^p *spaces.* Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A, vol. 93 (1993), no. 1, pp. 137–142.

Índice alfabético