



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

## **Un análisis de la regularidad de funciones usando Wavelets**

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en  
el área Ciencias Matemáticas

**Maríel Rosenblatt**

Directores de tesis: Dr. Eduardo Serrano

Dra. Ursula Molter

Consejero de estudios: Dr. Julián Fernández Bonder

Lugar de trabajo: Universidad Nacional de General Sarmiento

Buenos Aires, junio de 2019

Fecha de defensa: 8 de agosto de 2019

# Un análisis de la regularidad de funciones usando Wavelets

## Resumen

En esta tesis estudiamos la regularidad local de funciones a valores reales mediante la transformada wavelet discreta, a fin de hacer una contribución en el procesamiento de señales. En una primera aproximación para analizar la regularidad de señales proponemos un nuevo cuantificador: la *entropía wavelet leaders* de una función  $f$  en  $x_0$ . Este cuantificador computa la entropía de Shannon de una distribución de probabilidades discreta  $P_{x_0}$ , la cual se construye a partir de los coeficientes wavelet leaders de la función  $f$  en  $x_0$ , correspondientes a los primeros  $m$  niveles de resolución. Probamos que, para un nivel de resolución  $m$ , la entropía wavelet leaders puntual alcanza valores muy cercanos a su máximo valor cuando el exponente Hölder puntual toma valores próximos a cero, lo que indica que éste cuantificador también detecta las singularidades de una función. Una de sus ventajas es que su cálculo se implementa fácilmente, por lo tanto resulta útil para analizar la dinámica de señales de diversos fenómenos naturales.

Si bien el exponente Hölder puntual o la *entropía wavelet leaders puntual* distinguen singularidades, la información que aportan no es suficiente para distinguir singularidades tipo cúspide de singularidades oscilantes. A fin de dar una descripción completa del comportamiento singular de una función (o distribución)  $f$  en  $x_0$ , Y. Meyer define la *frontera 2-microlocal* de  $f$  en  $x_0$ , una curva decreciente y cóncava hacia abajo en  $\mathbb{R}^2$ , que revela varios exponentes clásicos de regularidad y caracteriza completamente el tipo de singularidad que hay en  $x_0$ . Esta curva se define mediante los espacios 2-microlocales, caracterizados vía la transformada wavelet por Y. Meyer y S. Jaffard.

Una cuestión relevante es diseñar funciones prototipo con una estructura de singularidades predeterminada. En los trabajos de Y. Meyer, B. Guiheneuf et al. y J. Lévy Véhel et al. se construyen funciones  $f$  cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es una predeterminada curva  $S(\sigma)$ . Estas funciones (o distribuciones) se definen en términos de sus coeficientes wavelet y son distintas en cada uno de los tres trabajos citados.

En esta tesis generalizamos estos resultados determinando una fórmula genérica de los coeficientes wavelet de funciones (o distribuciones) cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es  $S(\sigma)$ , donde  $S(\sigma)$  es una función decreciente definida en  $\mathbb{R}$ , que es o bien cóncava hacia abajo, tal que  $S''(\sigma) < 0$  o bien es lineal. Nuestro resultado unifica los trabajos previos pues obtenemos una amplia familia de funciones (o distribuciones), con frontera 2-microlocal en  $x_0$  predeterminada, que además contiene a las tres funciones, construidas en los trabajos citados, como casos especiales. Además, en el caso en que  $S(\sigma)$  es lineal, encontramos un resultado más satisfactorio, pues probamos que la fórmula propuesta caracteriza en forma completa a las funciones o distribuciones cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es la función lineal dada.

**Palabras clave:** wavelets, señales, regularidad, entropía, frontera 2-microlocal.

# Regularity Analysis of functions using Wavelets

## Abstract

In this thesis we analyse local regularity of real-valued functions using the discrete wavelet transform, in order to do a contribution to the field of signal processing.

As an initial approach to analyse the regularity of signals we propose a new quantifier: the pointwise *wavelet leaders entropy* of a function  $f$  at  $x_0$ . This quantifier computes the Shannon entropy of a discrete probability distribution  $P_{x_0}$ , which is constructed using the wavelet leaders coefficients of the function  $f$  at  $x_0$ , corresponding to the first  $m$  resolution levels. We prove that, for a resolution level  $m$ , the pointwise wavelet leaders entropy is close to its maximum whenever the pointwise Hölder exponent is close to zero proving that this quantifier also detects singularities. One of its advantages is that the calculation is implemented easily, therefore it is useful to analyse the dynamics of several signals from natural and social phenomena.

While the pointwise Hölder exponent or the pointwise wavelet leaders entropy capture singularities, the information provided is not enough to distinguish cusps from oscillating type singularities. In order to give a complete description of the singular behaviour of a function (or distribution), Y. Meyer defines the *2-microlocal domain* of  $f$  at  $x_0$ , a decreasing and concave downward curve in  $\mathbb{R}^2$ , which reveals several classic regularity exponents and completely characterizes the singularity type at  $x_0$ . This curve is defined by means of the 2-microlocal spaces, which are characterized via the wavelet transform by Y. Meyer and S. Jaffard.

It is also a relevant issue to design prototype functions with a predetermined singularity structure. In the works of Y. Meyer, B Guiheneuf et al. and J. Lévy Véhel et al., distributions or functions, with  $S(\sigma)$  as the predetermined 2-microlocal frontier at  $x_0$ , are constructed by using wavelet coefficients. The distributions or functions are different in each of the three referenced works.

In this thesis we generalize these results determining a generic formula for the wavelet coefficients of functions or distributions which have  $S(\sigma)$  as the prescribed 2-microlocal frontier at  $x_0$ , where  $S(\sigma)$  is a decreasing function that is either concave downwards with  $S''(\sigma) < 0$  or linear. Our result unify the previous results, by obtaining a large class of functions (or distributions), with predetermined 2-microlocal frontier at  $x_0$ , that includes the three constructions, proposed in the cited works, as special cases. Moreover, for the case that  $S(\sigma)$  is a line, we find a more satisfactory result because we prove that the generic formula completely characterizes all functions (or distributions) whose 2-microlocal frontier at  $x_0$  is the given line.

**Keywords:** wavelets, signals, regularity, entropy, 2-microlocal frontier.

# Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer especialmente a Alejandra, Eduardo y Ursula; en orden alfabético y en orden cronológico. Tres personas muy entusiastas, con ganas de seguir aprendiendo siempre. Los tres me acompañaron en distintas etapas de este proceso y por eso quiero agradecerles particularmente a cada uno.

A Alejandra: Gracias por todo el apoyo de siempre, por confiar en mí para integrarme a tus proyectos de la UNGS y por dar ese puntapié inicial para mejorar mis condiciones laborales para que pudiera empezar a trabajar en investigación. Tu ayuda en las etapas iniciales fue fundamental para mí.

A Eduardo: Voy a escribir como si me leyeras....¿quién sabe si este agradecimiento llega o no?...Gracias por transmitirme siempre tu entusiasmo para seguir adelante, más allá de las dificultades. Sé que estarías muy feliz en este momento, satisfecho porque pude cumplir algunos de los objetivos que nos planteamos en este trabajo de tesis. Más allá de lo académico quiero destacar tu calidez como persona, recordando con mucho cariño todos los momentos que compartimos en muchísimos congresos y jornadas.....Se extraña al promotor de las caminatas ¡interminables! que finalmente convergían a almuerzos o cenas compartidas con compañeros ¡Siguen vivos en mi memoria esos hermosos y divertidos encuentros en los que siempre fomentabas la camaradería!

A Ursula: Gracias por estar siempre dispuesta a ayudarme para que pudiera cerrar esta etapa de la mejor manera. Para mí era una incógnita cómo iba a seguir mi trabajo de tesis.....pero enseguida te abriste a aprender sobre temas muy específicos, para que pudiera seguir avanzando en la línea que veníamos trabajando con Eduardo. Me fuiste guiando y los resultados fueron apareciendo y felizmente pudimos darle un buen cierre a este trabajo ¡Sé que a Eduardo le hubieran encantado los resultados que encontramos en el camino!

También quiero agradecer a Fernando, mi compañero de vida, y a mi hijo Valentino por apoyarme y acompañarme en este desafío de encarar un doctorado mientras se construye y lleva adelante un hogar.

Por último ¡gracias a mis compañeros y amigos de la UNGS, de la UNSAM y del DM de Exactas por todo el afecto y apoyo en todos estos años!

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>6</b>
2.1. Transformada wavelet discreta y regularidad . . . . .	7
2.1.1. Condiciones para analizar regularidad . . . . .	10
2.2. Exponente Hölder puntual . . . . .	11
2.2.1. Condición de Hölder global y exponente Hölder puntual . . . . .	19
2.2.2. Caracterización wavelet de la regularidad uniforme y puntual . . . . .	20
2.3. Otros exponentes de regularidad . . . . .	22
2.3.1. Exponente Hölder local . . . . .	22
2.3.2. Exponente chirp . . . . .	26
2.3.3. Exponente de oscilación . . . . .	29
<b>3. Entropía wavelet leaders</b>	<b>32</b>
3.1. Entropía . . . . .	33
3.1.1. Entropía wavelet . . . . .	34
3.1.2. Entropía wavelet leaders puntual . . . . .	36
3.2. Entropía wavelet leaders y exponente Hölder puntual . . . . .	38
3.3. Aplicaciones . . . . .	45
3.3.1. Análisis de señales de datos financieros . . . . .	45
3.3.2. Análisis de señales biomédicas . . . . .	48
3.4. Conclusiones . . . . .	56
<b>4. Frontera 2-microlocal</b>	<b>58</b>
4.1. Introducción . . . . .	58
4.2. Primera generalización del resultado de B. Guiheneuf, S Jaffard y J. Lévy Véhel sobre prescripción de la frontera 2-microlocal . . . . .	63
4.2.1. Resultado . . . . .	74
4.2.2. Conexión con el resultado propuesto por Y. Meyer . . . . .	75
4.3. Versión general de la prescripción de la frontera 2-microlocal . . . . .	78
4.3.1. Preliminares . . . . .	79

4.3.2. Resultados principales . . . . .	82
4.3.3. Conexión con el resultado propuesto por J. Lévy Véhel y S. Seuret	95
4.4. Conclusiones . . . . .	105
<b>Bibliografía</b>	<b>107</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En este trabajo de tesis estudiamos la regularidad local de funciones a valores reales mediante la transformada wavelet discreta y presentamos resultados teóricos que podrían ser una contribución al procesamiento de señales.

La detección de singularidades es uno de los problemas fundamentales en el procesamiento de señales y su total caracterización requiere de varios parámetros. Uno de los parámetros de regularidad más utilizados en el procesamiento de señales es el *exponente Hölder puntual*, que se define en cada  $x_0$  del dominio de una función  $f$  localmente acotada como

$$h(x_0) = \sup \{ \alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0) \}, \quad (1.1)$$

donde  $C^\alpha(x_0)$  es la clase de funciones  $f$  tales que existen  $C > 0$  y un polinomio  $P_{x_0}(x)$  de grado menor que  $\alpha$  tales que  $|f(x) - P_{x_0}(x)| < C |x - x_0|^\alpha$ , para  $x$  en un entorno de  $x_0$ .

En [35], S. Jaffard formula una caracterización del exponente Hölder puntual a través del estudio del decaimiento de los denominados coeficientes *wavelet leaders*, que se calculan a partir de los supremos locales de los coeficientes wavelet de una función  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , concentrando la información que estos proveen.

Como primera aproximación para analizar la dinámica de señales propusimos en [59] un nuevo cuantificador: la *entropía wavelet leaders puntual*, que combina el concepto de entropía con los coeficientes wavelet leaders.

La entropía es un concepto que surge de la termodinámica y es reformulado por la teoría de la información para cuantificar la información promedio contenida en un mensaje. Una versión wavelet de estos cuantificadores ha sido utilizada por Torres et al. [68, 21] y Figliola et al. [19, 10, 60] para analizar, de un modo heurístico, señales biomédicas.

A partir de estas ideas, utilizamos los coeficientes wavelet leaders para definir la *entropía wavelet leaders* de una función  $f$  en  $x_0$ , del nivel de resolución nivel de resolución  $m$ . Este cuantificador consiste en computar la entropía de Shannon [65] de una

distribución de probabilidades discreta  $P_{x_0}$ , definida en cada punto  $x_0$  y en cada nivel de resolución  $m$  de la función  $f$ . La distribución de probabilidades discreta  $P_{x_0}$  se construye usando los coeficientes wavelet leaders de la función  $f$  en  $x_0$ , correspondientes a los primeros  $m$  niveles de resolución.

Una de sus ventajas es que su cálculo se implementa fácilmente y se puede aplicar para analizar la dinámica de diversas señales tales como electroencefalogramas (EEG), señales provenientes de los mercados financieros, etc [59, 58].

En efecto, encontramos evidencias de que este cuantificador muestra la evolución de la regularidad local de señales. Más allá de los hallazgos heurísticos, efectivamente probamos que, bajo ciertas condiciones de regularidad global y local de la función  $f$ , existe un nivel de resolución  $m$  tal que

$$4^{-(ma-1)h(x_0)} \log_2 (m 4^{-(ma-1)h(x_0)}) \leq S_{f,m}(x_0), \quad (1.2)$$

donde  $a > 1$  y  $S_{f,m}(x_0)$  es la *entropía wavelet leaders* de la función  $f$  en  $x_0$ , del nivel de resolución  $m$  (Capítulo 3; ver también [59]).

En consecuencia la *entropía wavelet leaders puntual* alcanza valores cercanos a su máximo valor si el exponente Hölder puntual toma valores próximos a cero. Esto indica que este nuevo cuantificador también detecta singularidades de una función. Además en el Capítulo 3 analizamos señales provenientes de EEG, registradas en crisis epilépticas, para comparar nuestro cuantificador con los cuantificadores wavelet definidos en [60, 61].

Si bien el exponente Hölder puntual o la *entropía wavelet leaders puntual* distinguen singularidades y pueden utilizarse para analizar diversas señales e imágenes, la información que aportan es insuficiente para distinguir singularidades tipo cúspide de singularidades con un alto contenido oscilatorio local.

Una gran cantidad de señales presentan singularidades de tipo cúspide, pero también es posible detectar comportamientos localmente oscilantes en señales provenientes de fenómenos físicos y naturales (en el fenómeno de la turbulencia hidrodinámica [4], en las ondas de ecolocalización que emiten los murciélagos [44], recientemente se ha confirmado la presencia de estructuras oscilantes de tipo chirp en las señales de ondas gravitacionales [1, 2]).

Para complementar la información que aporta el exponente Hölder puntual varios autores han propuesto otros parámetros que detectan el fenómeno oscilatorio: *el exponente Hölder local* [63], los exponentes de *oscilación y chirp* [39], [7] y el exponente de *escala débil* [52], entre otros. Más recientemente, en [38], se ha propuesto una nueva caracterización de la regularidad local basada en los *exponentes  $p$* , para  $p > 0$ .

Bajo ciertas condiciones de regularidad global de la función  $f$ , los exponentes clásicos de regularidad pueden extraerse de una curva en  $\mathbb{R}^2$ , decreciente y cóncava hacia abajo, llamada la *frontera 2-microlocal en  $x_0$* . Esta curva se define mediante la pertenencia



de una función o distribución  $f$  a ciertos espacios funcionales introducidos por J.M Bony [11]: los espacios 2-microlocales,  $C_{x_0}^{s,s'}$ , con los parámetros  $s, s' \in \mathbb{R}$ . La propiedad fundamental que poseen es que son estables bajo la acción de operadores diferenciales e integrales.

La definición de los espacios funcionales  $C_{x_0}^{s,s'}$  está asociada a condiciones sobre la descomposición de Littlewood-Paley de distribuciones temperadas. En [28], S. Jaffard reformula estas condiciones mediante la transformada wavelet, proporcionando otra caracterización de los espacios 2-microlocales de J.M Bony. Además, para poder analizar el comportamiento local de  $f$  en  $x_0$ , no es necesario que la función  $f$  este definida en infinito por lo cual Y. Meyer y S. Jaffard [39, 52] definen localmente a los espacios 2-microlocales  $C_{x_0}^{s,s'}$ .

En esta tesis utilizamos la versión wavelet para el análisis 2-microlocal. Si  $\psi$  es una wavelet madre con infinitos momentos nulos e infinitas derivadas de rápido decaimiento y  $f$  es una función (o distribución) tal que, para  $x$  en un entorno de  $x_0$ ,  $f$  satisface

$$f(x) = \sum_{\substack{j \in \mathbb{Z} \\ j \geq 0}} \sum_{k \in \mathbb{Z} : |k - 2^j x_0| < 2^j} c_{j,k} \psi(2^j x - k),$$

decimos que  $f$  pertenece al espacio 2-microlocal  $C_{x_0}^{s,s'}$  si y sólo si existe una constante  $C > 0$  tal que los coeficientes wavelet  $c_{j,k}$  de  $f$  verifican

$$|c_{j,k}| \leq C 2^{-js} (1 + |k - 2^j x_0|)^{-s'}, \quad (1.3)$$

para todo  $j$  y  $k \in \mathbb{Z}$  tales que  $j \geq 0$  y  $|\frac{k}{2^j} - x_0| < 1$ .

A fin de dar una descripción geométrica del comportamiento singular de una función en  $x_0$ , Y. Meyer, [52], define el dominio 2-microlocal de  $f$  en  $x_0$  como un conjunto convexo definido en el plano  $(s, s')$  por

$$D(f, x_0) = \left\{ (s, s') : f \in C_{x_0}^{s,s'} \right\}. \quad (1.4)$$

La *frontera 2-microlocal* de  $f$  en  $x_0$  es el borde del conjunto  $D(f, x_0)$  y puede determinarse por la parametrización

$$S(\sigma) = \sup \left\{ s : f \in C_{x_0}^{s, \sigma - s} \right\}. \quad (1.5)$$

La frontera 2-microlocal otorga una descripción más precisa de la regularidad local de una función, y más aún, provee también una herramienta que es estable bajo la aplicación de operadores integro-diferenciales.

Por otro lado también es relevante diseñar funciones prototipo con una estructura de singularidades predeterminada. En este sentido en [29, 16, 63, 33] se construyen

funciones con exponentes de regularidad clásicos predeterminados en un intervalo  $I$ .

Entonces es natural preguntarse si dada una curva  $S(\sigma)$  cóncava hacia abajo y decreciente se puede construir una función o distribución  $f$  tal que su frontera 2-microlocal en  $x_0$  sea  $S(\sigma)$ . La respuesta es afirmativa y en los trabajos [52, 23, 46] los autores construyen, utilizando los coeficientes wavelet, una función o distribución  $f$  cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es  $S(\sigma)$ . Las distribuciones o funciones, con frontera 2-microlocal en  $x_0$  predeterminada, son distintas en cada uno de los tres trabajos citados.

Hemos podido generalizar estos resultados determinando una fórmula genérica de los coeficientes wavelet de una amplia familia de funciones (o distribuciones) cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es  $S(\sigma)$ , donde  $S(\sigma)$  es una función decreciente definida en  $\mathbb{R}$ , que es o bien cóncava hacia abajo, tal que  $S''(\sigma) < 0$  o bien es lineal (ver Capítulo 4).

La fórmula genérica obtenida se inspira en la fórmula propuesta por los autores de [23] y consiste en seleccionar los coeficientes wavelet  $c_{j,k}$  de cada función o distribución de la familia tales que, para  $j \geq 0$  y  $k$  tal que  $|k - 2^j x_0| < 2^j$ ,

$$|c_{j,k}| \leq \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1 + |k - 2^j x_0|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma) - \sigma} \right\} \quad \text{con } \mathcal{C}_{j,k}, \lambda_{j,k} > 0, \quad (1.6)$$

y se satisfaga la **igualdad** si  $(j, k) \in I$ , para  $I$  un conjunto de subíndices predeterminado (4.25), y  $c_{j,k} \neq 0$  para infinitos  $j$ , con  $(j, k) \in I$ .

Además, para  $k_j$  tal que  $|k_j - 2^j x_0| < 2^j$ , las sucesiones  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  deben verificar que:

(i) Dado cualquier  $C \in \mathbb{R}$ ,

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} + C \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} \right) \leq 0. \quad (1.7)$$

(ii) Si  $(j, k_j) \in I$ ,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} = 0. \quad (1.8)$$

Este resultado unifica lo propuesto en [52, 23, 46], pues obtenemos una amplia familia de funciones (o distribuciones) con frontera 2-microlocal en  $x_0$  predeterminada, que incluye a las tres funciones construidas en los trabajos citados como casos especiales.

Por otro lado, en el caso en que  $S(\sigma)$  es lineal, probamos que la fórmula propuesta caracteriza en forma completa a las funciones o distribuciones cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es la función lineal dada.

En el caso general, cuando  $S(\sigma)$  no es lineal, conjeturamos que la familia prototipo de funciones o distribuciones que construimos, con un determinado tipo de singularidad en  $x_0$ , está cerca de caracterizar a todas las funciones (o distribuciones) con frontera 2-microlocal  $S(\sigma)$  en  $x_0$ .

La tesis se organiza de la siguiente forma. En el Capítulo 2 se exponen los conocimientos previos necesarios para poder desarrollar los resultados obtenidos. Allí enunciamos las propiedades básicas de la transformada wavelet discreta, los coeficientes wavelet y los coeficientes wavelet leaders. Además damos todas las nociones de exponentes de regularidad clásicos: el exponente Hölder puntual, el exponente Hölder local, los exponentes de oscilación y chirp; y describimos todas sus caracterizaciones a través de la transformada wavelet discreta. Asimismo enunciamos diferentes resultados sobre su prescripción, en los cuales se construyen funciones con predeterminados exponentes de regularidad.

Los Capítulos 3 y 4 contienen las contribuciones originales de esta tesis.

En el Capítulo 3 definimos a la *entropía wavelet leaders puntual* y demostramos el resultado principal del capítulo (Proposición 3.2.3), lo cual justifica que este cuantificador sea una alternativa para analizar la regularidad de señales. Como ejemplos analizamos la serie de datos del índice Dow Jones Industrial, registrada en el período 1928-2011, y una serie de datos de un electroencefalograma registrado durante una crisis epiléptica. Además, en este último caso, comparamos nuestros hallazgos con los obtenidos utilizando la *entropía wavelet*, el cuantificador que se define a partir de los coeficientes wavelet en lugar de los coeficientes wavelet leaders.

En el Capítulo 4 damos las nociones referidas a la frontera 2-microlocal y desarrollamos todos los resultados matemáticos para demostrar los principales teoremas del capítulo (Teoremas 4.3.3 y 4.3.6). En el caso en que  $S(\sigma)$  es lineal obtenemos las condiciones necesarias y suficientes para que una función (o distribución) tenga a  $S(\sigma)$  como su frontera 2-microlocal en  $x_0$ . Asimismo exhibimos las sucesiones específicas  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  que hacen que las funciones (o distribuciones) propuestas en cada uno de los trabajos [24, 52, 46] sean casos particulares de la fórmula genérica obtenida en el Teorema 4.3.3.

# Capítulo 2

## Preliminares

En este capítulo daremos algunas nociones preliminares sobre el estudio de la regularidad de funciones a valores reales.

El análisis de la regularidad local consiste en describir, mediante cuantificadores, que tan irregular es una función en cada punto de su dominio. Las singularidades son los puntos donde se observan esas deficiencias en la regularidad de una función o señal. Existen diferentes tipos de singularidades que se pueden ilustrar en conocidos ejemplos, por ejemplo la función  $f(x) = |x - x_0|^\alpha$ , con  $0 < \alpha < 1$ , tiene una singularidad del tipo *cúspide*, no oscilante, en el punto  $x_0$ . En contraposición, la función  $f(x) = |x - x_0|^\alpha \sin(|x - x_0|^{-\beta})$ , con  $0 < \alpha < 1$  y  $\beta > 0$ , tiene una singularidad de tipo *chirp* en  $x_0$ , con un comportamiento oscilatorio alrededor de  $x_0$ .

*Oscilante y no oscilante* es una primera y clara distinción entre las singularidades. Sin embargo, la noción intuitiva de *oscilación* no es suficiente para caracterizar estructuras más complejas. Por ejemplo la función  $f(x) = |x - x_0| \sin(|x - x_0|^{-1}) + |x - x_0|^{3/2}$  es oscilante en  $x_0$  pero no es una oscilación como la que se presenta en la de tipo chirp.

Desde la perspectiva de la matemática, es relevante profundizar sobre la caracterización de singularidades. Funciones clásicas como por ejemplo la función de Weierstrass [16], las funciones de Riemann y otras [39, 31] presentan singularidades de tipo cúspide o de tipo oscilante en casi todo punto.

Asimismo, la importancia de caracterizar singularidades se extiende al campo de las aplicaciones, donde es fundamental describir fenómenos naturales y sociales con mayor precisión. Diversas señales, provenientes de fenómenos naturales y sociales (EEG, ECG, datos de mercados financieros, entre otros), presentan singularidades de tipo cúspide, pero también es posible detectar un alto contenido oscilatorio local en señales provenientes de fenómenos físicos y naturales, como por ejemplo, en el fenómeno de la turbulencia hidrodinámica [4], en las ondas de ecolocalización que emiten los murciélagos [44]. Recientemente, se confirmó la presencia de estructuras oscilantes en las primeras señales de ondas gravitacionales, registradas en los años 2015 y 2017 por los

observatorios de ondas gravitatorias por interferometría láser LIGO [1, 2] (situados en USA) y también, en el año 2017, por el observatorio Virgo [2] (situado en Europa). Estas ondas gravitacionales se generaron durante dos fenómenos cósmicos: la coalescencia de dos agujeros negros de masa estelar [1] y la colisión de dos estrellas de neutrones [2].

El exponente Hölder puntual es esencial para la caracterización de señales e imágenes mediante el análisis multifractal y es uno de los parámetros de regularidad más utilizados. Sin embargo, la información que aporta acerca de la regularidad local puede ser insuficiente pues no distingue con precisión singularidades del tipo cúspide de singularidades con un alto contenido oscilatorio local. Por otra parte, éste parámetro no es estable cuando se aplican operadores diferenciales o pseudo-diferenciales a la función  $f$ . Esta propiedad es relevante en el procesamiento de señales o imágenes, donde en ocasiones es necesario aplicar operadores pseudo-diferenciales en el tratamiento de éstas.

En este sentido se han propuesto otros exponentes de regularidad que dan una descripción más completa de la regularidad local. Entre ellos, el *exponente Hölder local*,  $\alpha_l(x_0)$ , estudiado en los trabajos de J. Lévy Véhel y sus colaboradores [63], que resulta sensible al comportamiento oscilante en un entorno de la singularidad y además es estable bajo la acción de operadores diferenciales; el *exponente de oscilación*  $\beta_o(x_0)$  [7], el *exponente chirp*  $\beta_c(x_0)$  [39] y otros exponentes [52], que miden con más exactitud el comportamiento oscilatorio de la función alrededor de  $x_0$ . Más recientemente, en [38], se ha propuesto una nueva caracterización del comportamiento singular de una función  $f$  en  $x_0$  basada en los exponentes  $p$  de  $f$  en  $x_0$ ,  $h_p(x_0)$  con  $p \in [0, +\infty]$ , definidos a partir de nociones introducidas por A. Calderón y A. Zygmund [12] para analizar propiedades locales de soluciones de ecuaciones diferenciales elípticas. En particular, si  $p = +\infty$  el exponente  $h_{+\infty}(x_0)$  coincide con el exponente Hölder puntual en  $x_0$ .

En este capítulo estudiaremos diferentes exponentes de regularidad clásicos. Comenzaremos recordando algunas nociones acerca de la transformada wavelet discreta pues analizaremos distintas caracterizaciones de los exponentes de regularidad clásicos a través de condiciones locales sobre los coeficientes wavelet.

## 2.1. Transformada wavelet discreta y regularidad

El análisis multirresolución se define en  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . En este trabajo de tesis estamos interesados en el estudio de señales por lo cual enunciaremos algunas nociones del análisis multirresolución para funciones de una variable en  $L^2(\mathbb{R})$ . Para ampliar estos tópicos recomendamos los libros de C. Chui [13], S. Mallat [48] e Y. Meyer [51], entre otros.

El análisis multirresolución fue desarrollado por S. Mallat e Y. Meyer y consiste en la construcción sistemática de bases del espacio de funciones de energía finita  $L^2(\mathbb{R})$

mediante la dilatación y la traslación de una función  $\psi(x)$ , denominada la **wavelet madre**.

Un *Análisis Multirresolución* de  $L^2(\mathbb{R})$  es una estructura de subespacios cerrados encajados  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  que verifican que:

1. Para todo  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $V_j \subset V_{j+1}$ .
2. Para todo  $j \in \mathbb{Z}$  se verifica  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$ .
3.  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$  y  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ .
4. Existe  $\varphi(x)$  una función tal que  $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $V_0$ .

La función  $\varphi(x)$  es la *función de escala* del análisis de multirresolución y  $V_j$  son los *subespacios de escala*. Además, se definen  $W_j$ , los *subespacios wavelet*, como los complementos ortogonales de  $V_j$  en  $V_{j+1}$ , es decir

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (2.1)$$

Bajo estas condiciones, existe una función  $\psi(x)$ , denominada la *wavelet madre*, tal que  $\{\psi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $W_0$ . Y, en general, para cada  $j \in \mathbb{Z}$ , dilatando  $\psi$  en un factor  $\frac{1}{2^j}$  y trasladando  $\psi$  por factores  $\frac{k}{2^j}$  se tiene que  $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base ortonormal de  $W_j$  y se puede descomponer

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad \text{o bien} \quad L^2(\mathbb{R}) = V_J + \bigoplus_{j \geq J} W_j \quad \text{con } J \in \mathbb{Z},$$

donde los  $W_j$  son ortogonales. Con lo cual la familia de funciones

$$\mathcal{F} = \{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$

resulta una base ortonormal de  $L^2(\mathbb{R})$  y si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tenemos,

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \psi(2^j x - k) \quad (2.2)$$

o bien

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{J,k} \varphi(2^J x - k) + \sum_{j \geq J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \psi(2^j x - k), \quad (2.3)$$

donde  $c_{j,k}$  son los **coeficientes wavelet** de  $f$ ,

$$c_{j,k} = \langle f, 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \rangle \quad (2.4)$$

y  $s_{J,k}$  son los **coeficientes de escala** de  $f$  del nivel de resolución  $J$ .

La información de detalle de la señal  $f(x)$  se resume en los coeficientes wavelet y la información residual queda expresada en los coeficientes de escala. La propiedad del análisis multirresolución “ $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  es denso en  $L^2(\mathbb{R})$ ” asegura que si  $f \in L^2(\mathbb{R})$  puede ser aproximada por elementos de  $V_j$ . Por el contrario, la propiedad  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$  implica que si  $j$  decrece las proyecciones ortogonales de  $f$  sobre  $V_j$  podrían tener norma arbitrariamente pequeña.

**Observación 2.1.1** Usualmente la definición de coeficientes wavelet de  $f$  es  $\langle f, 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \rangle$ , el producto interno de  $f$  con cada integrante de la familia  $\mathcal{F}$ , la familia de wavelets normalizada en  $L^2(\mathbb{R})$ . En el contexto del estudio de la regularidad resulta más conveniente normalizar en  $L^1(\mathbb{R})$  y usar (2.4).

**Observación 2.1.2** La condición de ortonormalidad del ítem 4 del análisis multirresolución puede relajarse mediante la condición:

“Existe  $\varphi(x)$  una función de escala tal que  $\{\varphi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz de  $V_0$ .”

En tal caso  $\{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  resulta una base de Riesz de  $W_j$  y la familia  $\mathcal{F} = \{2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$  es una base de Riesz de  $L^2(\mathbb{R})$ .

Un ejemplo sencillo de wavelet madre es la wavelet de Haar definida por

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ -1 & \text{si } 1/2 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si en otro caso.} \end{cases}$$

que genera la base ortonormal de wavelets de Haar. En este caso la función de escala es  $\varphi(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}$  y el análisis multiresolución son funciones constantes a trozos en los intervalos  $[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j})$ .

Otros ejemplos de wavelets ortonormales son:

- las wavelets de Daubechies, de soporte compacto y una cantidad arbitraria de momentos nulos, es decir ortogonales a polinomios de grado menor que  $n$ , con  $n$  arbitrario,
- las wavelets de Meyer que están en la clase de Schwartz y tienen infinitos momentos nulos,
- las wavelets de Battle-Lemarié, que son menos regulares que las de Meyer pero decaen asintóticamente más velozmente que las de Meyer.

Algunos ejemplos de familias de wavelets que generan bases de Riesz de  $L^2(\mathbb{R})$  son las wavelets asociadas al análisis multirresolución generado por las funciones de escala

B-spline. Las funciones B-spline están definidas recursivamente por

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= \mathbf{1}_{[0,1)} \\ \varphi_{m+1}(x) &= \varphi_m * \varphi_1(x).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Observemos que  $\varphi_1(x)$  es la función de escala que genera el análisis multirresolución de Haar. Cada función de escala B-spline  $\varphi_{m+1}(x)$  es una función polinomial a trozos, de grado  $m$  y lo mismo sucede con la wavelet madre asociada  $\psi_{m+1}(x)$ . La wavelet madre asociada a la función B-spline de escala  $\varphi_{m+1}(x)$  no es única; sin embargo las wavelet madres asociadas a  $\varphi_{m+1}(x)$ , de soporte compacto, son esencialmente iguales (difieren en una traslación por un entero multiplicada por una constante). Chui et. al. [14] y Unser et. al. [69] construyeron, en forma independiente, los primeros ejemplos de wavelets, asociadas a una función de escala B-spline, de soporte compacto. Estas familias de wavelets de soporte compacto son semiortogonales pues la ortogonalidad está garantizada a distintas escalas, es decir si las wavelets están en diferentes subespacios  $W_j$ . De todos modos, sin la condición de soporte compacto, es posible construir una clase de wavelets ortonormales que se definen en el dominio de frecuencias en términos de la función B-spline  $\varphi_{m+1}(x)$ , como es el caso de las wavelets de Battle-Lemarié recién mencionadas.

En el Capítulo 3 utilizaremos la transformada wavelet spline en las aplicaciones. En general se tiene una transformada wavelet spline si la wavelet madre  $\psi$  y la función de escala  $\varphi$  son funciones polinomiales spline de grado  $m$ . Es decir si existen sucesiones  $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  y  $(p_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  tales que

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} w_k \varphi_{m+1}(2x - k) \quad \text{y} \quad \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k \varphi_{m+1}(2x - k).\tag{2.6}$$

Las wavelets spline poseen una formulación explícita tanto en el dominio del tiempo como en el de frecuencia, lo cual hace que su implementación computacional sea sencilla. Además tienen buenas propiedades en cuanto a su capacidad para aproximar funciones suaves [70].

### 2.1.1. Condiciones para analizar regularidad

El decaimiento de la amplitud de los coeficientes wavelet a través de las escalas  $2^{-j}$  está íntimamente relacionado con la regularidad de la función o señal. Para el estudio de la regularidad de funciones se requieren las siguientes condiciones técnicas para la wavelet madre  $\psi$ :

- $\psi \in C^r$ , es decir  $\psi$  es  $r$  veces derivable con  $r \in \mathbb{N}$ , y además tiene sus  $r$  primeras derivadas de rápido decaimiento, i.e. para cualquier  $0 \leq k \leq r$  y  $m \in \mathbb{N}$  existe



$C_m$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|\psi^{(k)}(x)| \leq \frac{C_m}{(1 + |x|)^m}. \quad (2.7)$$

- $\psi$  tiene  $r$  momentos nulos, para  $r$  suficientemente grande. Es decir que  $\psi$  es ortogonal a todos los polinomios de grado menor que  $r$ , o sea

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0, \quad 0 \leq k < r, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.8)$$

Si la wavelet  $\psi$  tiene  $r$  momentos nulos, la transformada wavelet discreta puede interpretarse como un operador diferencial de multiescala de orden  $r$ . Esta es una primera relación entre la derivabilidad o regularidad de  $f$  y el decaimiento de la transformada wavelet en escalas cada vez más finas [48].

**Observación 2.1.3** *En las aplicaciones que desarrollaremos en el Capítulo 3 elegiremos como wavelet madre a una función  $\psi$  spline cúbica y en el Capítulo 4 consideraremos a la wavelet de Meyer como la wavelet madre.*

## 2.2. Exponente Hölder puntual

Uno de los parámetros más utilizados para caracterizar la regularidad local de una función, en cada  $x_0$  de su dominio, es  $h(x_0)$ , el *exponente Hölder puntual* en  $x_0$ . Este exponente mide cuan rugoso o espiculado es el gráfico de una función en  $x_0$ . Cuanto más cerca de cero está el valor del exponente  $h(x_0)$  más irregular es el gráfico de la función en  $x_0$ , mientras que las porciones suaves del gráfico una función tienen exponentes más altos.

El exponente Hölder puntual es fundamental en el análisis multifractal de señales e imágenes. La multifractalidad es una noción que proviene de problemas físicos y está ligada a la regularidad de señales e imágenes. En [56] U. Frisch y G. Parisi retoman las teorías sobre turbulencia totalmente desarrollada de A. Kolmogorov [41] y proponen que la velocidad de un fluido con turbulencias en la posición  $x$  sigue la relación

$$|\nu(x + l) - \nu(x)| \sim |l|^H,$$

para  $|l|$  pequeño y  $H$  el exponente Hölder puntual de la velocidad  $\nu$  en  $x$ . Intuitivamente formulan que el conjunto

$$\left\{ x : |\nu(x + l) - \nu(x)| \sim |l|^H \right\}$$

tiene características fractales para  $H \in [h_{min}, h_{max}]$ , dando origen al análisis multifractal. Los conjuntos  $\{x : |\nu(x+l) - \nu(x)| \sim |l|^H\}$  suelen tener medida de Lebesgue 0, por lo cual no es una medida apropiada para distinguir estos conjuntos. Sin embargo, la dimensión de Hausdorff (ver [18] para recordar esta noción) se ajusta a este propósito pues distingue a los conjuntos  $\{x : |\nu(x+l) - \nu(x)| \sim |l|^H\}$ , si  $H$  varía en un intervalo  $[h_{min}, h_{max}]$ .

En general, dada una función  $f$  se puede medir la distribución de los exponentes Hölder de los puntos del dominio de una función, mediante el *espectro multifractal* o *espectro de singularidades*. El espectro multifractal de una función  $f$  asocia a cada  $H$ , en el rango de exponentes Hölder puntuales de la función  $f$ , la dimensión de Hausdorff del conjunto de puntos  $\{x \in Dom(f) : h(x) = H\}$ . Se dice que una función  $f$  es **multifractal** si su espectro multifractal toma infinitos valores reales, o sea si se tienen infinitos conjuntos  $\{x \in Dom(f) : h(x) = H\}$  fractales distintos, cuando  $H$  varía. Una amplia variedad de trabajos muestra evidencias del fenómeno multifractal en diversas señales e imágenes (señales biomédicas [26], geofísicas [67], de mercados financieros [49] y otras [3], [20]). Asimismo se han formulado diversas metodologías que permiten estimar el espectro multifractal, entre otras: *Wavelet Transform Modulo Maxima* [55, 5], *Multifractal Detrended Fluctuation Analysis* [40] y *Wavelet Leaders* [35].

Para motivar la definición del exponente Hölder puntual consideremos la función  $f(x) = |x - x_0|^\alpha$  con  $0 < \alpha < 1$ . Esta función no es derivable en  $x_0 \in \mathbb{R}$  y la **no derivabilidad** en  $x_0$  se puede caracterizar con el parámetro  $\alpha$ . Si  $\alpha$  está cerca de 0 el gráfico de la función  $f$  es más espiculado en  $x_0$ , mientras que si  $\alpha$  está cerca de 1 la función es menos espiculada en  $x_0$ .

Consideremos una función  $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisface una condición de Hölder en un entorno de  $x_0$ , es decir que existe  $C > 0$  tal que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha, \quad \text{con } 0 < \alpha < 1, \quad (2.9)$$

para todo  $x$  en un entorno de  $x_0$ . Claramente la función  $f$  también satisface que para todo  $\alpha'$ , con  $0 < \alpha' < \alpha$ ,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^{\alpha'},$$

en un entorno de  $x_0$ . Entonces la pregunta es ¿a partir de qué exponente  $\alpha$  la desigualdad (2.9) no se cumple? Estas ideas dan lugar a las definiciones de la clase Hölder puntual  $C^\alpha(x_0)$  y del exponente Hölder puntual.

**Definición 2.2.1** Sean  $\alpha \geq 0$ ,  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  y  $x_0 \in Dom(f)$ . Decimos que  $f$  está en la **clase Hölder puntual**  $C^\alpha(x_0)$  si existen  $C > 0$  y un polinomio  $P_{x_0}(x)$  de grado

menor que  $\alpha$  tales que, en un entorno de  $x_0$ ,

$$|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha. \quad (2.10)$$

Luego, el **exponente Hölder puntual** de  $f$  en  $x_0$  es

$$h(x_0) = \sup \{ \alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0) \}. \quad (2.11)$$

*Notación:* Cuando sea necesario especificar que el exponente Hölder está asociado a una determinada función  $f$  notaremos al exponente Hölder puntual  $h(f, x_0)$ .

**Observación 2.2.2** Por convención definimos el grado del polinomio nulo como  $-\infty$ .

**Observación 2.2.3** Si  $\alpha > 0$  el polinomio  $P_{x_0}(x)$  es único.  $P_{x_0}(x)$  se denomina el polinomio de Taylor de  $f$ , de orden  $\alpha$ , centrado en  $x_0$ . Cabe aclarar que si  $\alpha$  es un entero  $P_{x_0}(x)$  es el polinomio de Taylor de orden  $n - 1$  usual.

En consecuencia si  $f$  es infinitamente diferenciable en  $x_0$  tenemos polinomio de Taylor de la función  $f$  de orden  $n$ , centrado en  $x_0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Con lo cual  $f \in C^n(x_0)$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto  $h(x_0) = \sup \{ \alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0) \} = +\infty$ , es decir que la función  $f$  es muy regular en  $x_0$ .

**Observación 2.2.4** Si  $f : \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $h(x_0) < 1$  entonces la función  $f$  no es derivable en  $x_0$  y el parámetro  $h(x_0)$  caracteriza la no derivabilidad de  $f$  en  $x_0$ .

Intuitivamente si  $f : \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de la clase  $C^\alpha(x_0)$ , con  $0 < \alpha < 1$ , tenemos que  $P_{x_0}(x) = f(x_0)$ . Con lo cual se verifica la desigualdad (2.9), es decir que existe  $C > 0$  tal que en un entorno de  $x_0$ ,

$$-C|x - x_0|^\alpha + f(x_0) \leq f(x) \leq C|x - x_0|^\alpha + f(x_0),$$

como puede observarse esquemáticamente en la Figura 2.1.

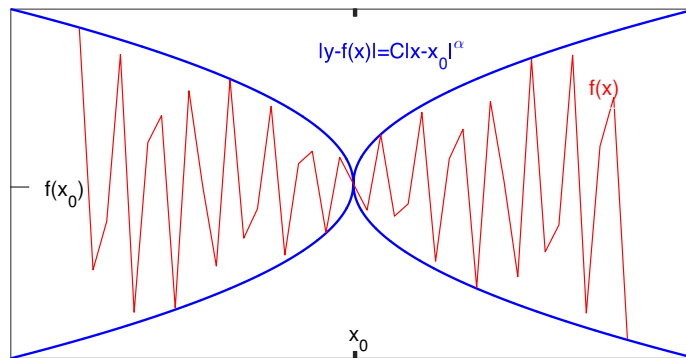


Figura 2.1: Esquema de los gráficos de  $f(x)$  y de la curva  $|y - f(x_0)| = C|x - x_0|^\alpha$ .

Por lo tanto, si  $h(x_0) < 1$  la curva  $|y - f(x_0)| = C|x - x_0|^{h(x_0)}$  es la curva límite entre las curvas que encierran el gráfico de  $f(x)$  en un entorno de  $x_0$ . Más aún, si  $h(x_0)$  es un máximo la curva  $|y - f(x_0)| = C|x - x_0|^{h(x_0)}$  es la que satisface esta propiedad en forma óptima.

Mostremos algunos ejemplos donde es inmediato el cálculo del exponente Hölder puntual en cada  $x \in \text{Dom}(f)$ .

**Ejemplo 2.2.5** Sean  $0 < \alpha \leq 1$  y  $\beta > 0$ ,

- $f(x) = |x|^\alpha$  tiene  $h(0) = \alpha$  y  $h(x) = +\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ .
- $f(x) = |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$  extendida continuamente en 0, tiene  $h(0) = \alpha$  y  $h(x) = +\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ .

En estos ejemplos es fácil verificar que  $h(0) = \alpha$ . Además, como ambas funciones son infinitamente derivables, en virtud de la Observación 2.2.3, resulta que  $h(x) = +\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ . En ambos ejemplos el exponente Hölder puntual capta la singularidad que hay en  $x_0 = 0$ . De todas formas la naturaleza de ambas singularidades es diferente, la primera función tiene una singularidad tipo cúspide en 0 mientras que en la segunda función hay un comportamiento oscilante alrededor del 0 y decimos que la singularidad es oscilante.

**Ejemplo 2.2.6** Sean  $0 < \alpha \leq 1$  y  $f(x) = |x|^\alpha \ln(|x|)$  extendida continuamente en 0.

En este ejemplo también  $h(0) = \alpha$  y  $h(x) = +\infty$  para todo  $x \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ . Además es interesante destacar que en este ejemplo  $h(0) = \alpha$  es un supremo y no un máximo, pues  $f \in C^{\alpha'}(0)$  para todo  $\alpha' < \alpha$  pero  $f \notin C^\alpha(0)$ .

Mostremos otros ejemplos para los cuales el cálculo del exponente Hölder puntual no es inmediato.

**Ejemplo 2.2.7** La función de Weierstrass

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n x), \quad \text{con } 0 < a < 1 < ab,$$

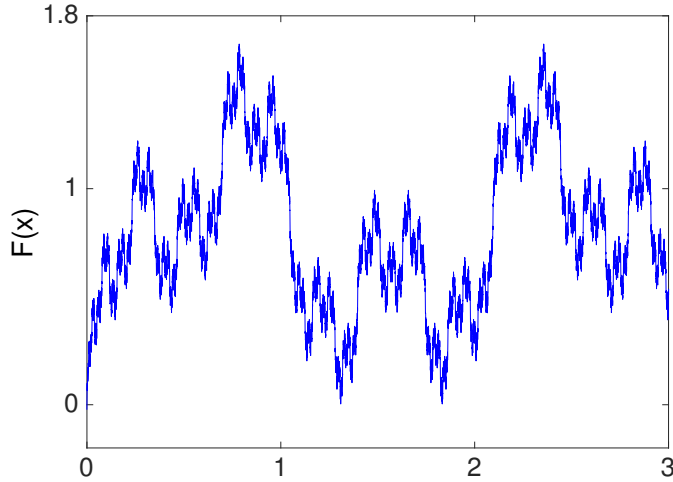


Figura 2.2: Función de Weierstrass para  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  y  $b = 2$ .

es una función continua y no derivable para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Sin embargo, el tipo de irregularidad es la misma en cada punto pues el exponente Hölder puntual es la función constante  $h(F, x) = -\frac{\log(a)}{\log(b)}$ . En [35] se puede consultar una demostración de esta propiedad. En la Figura 2.2 puede observarse la “regularidad” de la irregularidad de la función.

**Ejemplo 2.2.8** La función de Lévy fue introducida por Paul Lévy para modelizar procesos estocásticos y está definida como

$$L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n x)}{2^n},$$

donde

$$(x) = \begin{cases} x - m & \text{si } |x - m| < \frac{1}{2}, m \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x = m + \frac{1}{2}, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

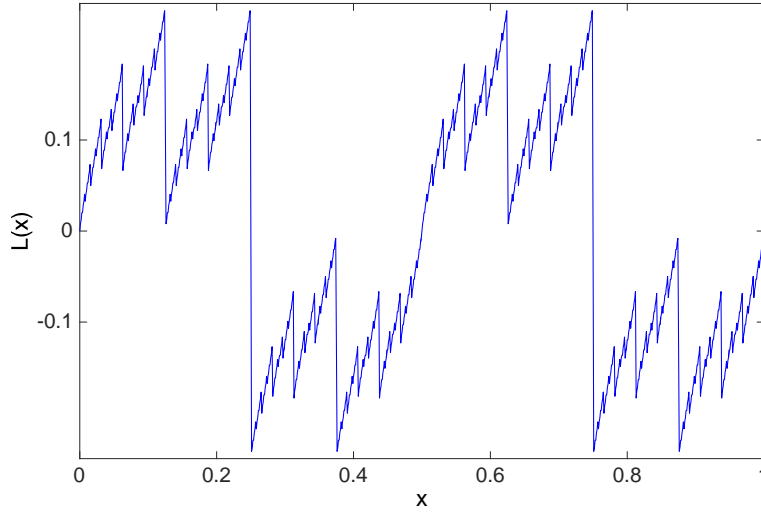


Figura 2.3: Función de Lévy.

$L$  es una función que es discontinua en números reales diádicos, es decir números de la forma  $\frac{k}{2^n}$ , con  $k \in \mathbb{Z}$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

El cálculo del exponente Hölder en cada  $x_0$  no diádico no es trivial. En [31] S. Jaffard prueba que el exponente Hölder puntual de  $\mathcal{L}$  en  $x_0$  no diádico depende de como los números diádicos de la recta real aproximan a  $x_0$ .

Más precisamente, si  $x_0$  no es diádico y  $\Delta_n x_0 = \text{dist}(x_0, 2^{-n}\mathbb{Z})$  se tiene que el exponente Hölder puntual de  $\mathcal{L}$  en  $x_0$  verifica:

$$h(L, x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-n}{\log_2(\Delta_n x_0)}.$$

En [31] se pueden encontrar más ejemplos sobre el cálculo del exponente Hölder puntual y el análisis de la multifractalidad de funciones clásicas, que son discontinuas en un conjunto denso, como las de Riemann, Jordan y otras.

Por otro lado, si  $h(x)$  es el exponente Hölder de una función  $f$  en  $x \in \text{Dom}(f)$  la función  $h$  se denomina la función Hölder puntual de  $f$  y ésta registra la evolución de la regularidad de  $f$  en su dominio. En los trabajos [29, 16] los autores dan condiciones necesarias y suficientes para que una función  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  sea la función Hölder puntual de una función  $f$  continua. Estas condiciones se resumen en el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.9** (K. Daoudi, J. Lévy Véhel y Y. Meyer, 1998)

Sea  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ . Las siguientes condiciones son equivalentes:

i)  $h$  es la función Hölder puntual de una función continua  $f$ ,  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

ii) Existe una sucesión de funciones continuas  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  tal que

$$h(x) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} s_n(x), \quad \forall x \in [0, 1].$$

En [16] los autores dan tres demostraciones constructivas a fin de proveer diferentes métodos para construir una función  $f$  tal que  $h$  sea su correspondiente función Hölder puntual. Para ello proponen tres métodos distintos basados en: a) bases de Schauder, b) la generalización de la función de Weierstrass y c) sistemas de funciones iteradas.

El método basado en la generalización de la función de Weierstrass es simple y permite controlar la regularidad en cada punto. La siguiente proposición muestra explícitamente la construcción de la función  $f$  con exponente Hölder puntual predeterminado en todo su dominio.

**Proposición 2.2.10** (*K. Daoudi, J. Lévy Véhel y Y. Meyer, 1998*)

Sean  $\lambda > 1$  y  $s : [0, 1] \rightarrow (0, 1)$  una función que verifica que existe  $C > 0$  tal que  $|s(x+h) - s(x)| \leq C|h|^{s(x)}$  para  $h$  suficientemente pequeño. Entonces la función

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^{-ks(x)} \text{sen}(\lambda^k x)$$

tiene exponente Hölder puntual  $h(F, x) = s(x)$ .

El siguiente ejemplo ilustra esta proposición.

**Ejemplo 2.2.11** Para  $\lambda = 3$  y  $s : [\frac{1}{10}, \frac{9}{10}] \rightarrow (0, 1)$ ,  $s(x) = x$ , tenemos que

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} 3^{-kx} \text{sen}(3^k x)$$

tiene exponente Hölder puntual  $s(x)$ .

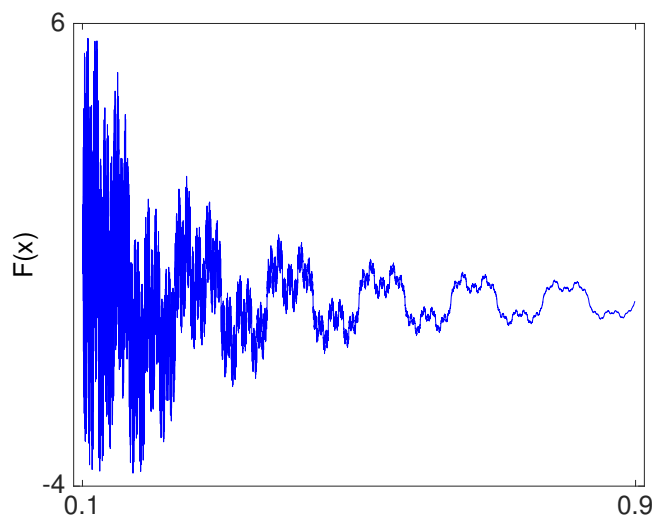


Figura 2.4: Función de Weierstrass generalizada  $F(x)$ .

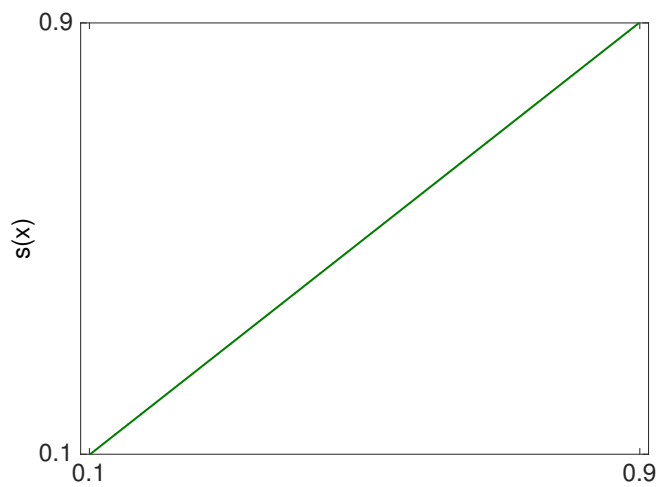


Figura 2.5: Gráfico de la función Hölder puntual  $s(x)$ .

*El gráfico de la Fig. 2.4 muestra que  $F(x)$  es más irregular cerca de  $\frac{1}{10}$ , en coincidencia con los valores más pequeños que alcanza  $s(x)$ . El gráfico es menos irregular a medida que  $x$  crece.*



### 2.2.1. Condición de Hölder global y exponente Hölder puntual

Si una función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  verifica una condición de Hölder, i.e. existen  $C > 0$  y  $0 < \alpha < 1$  tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

significa que la condición (2.10) es válida con  $P_{x_0} = f(x_0)$ , para todo  $x_0$ , con la posibilidad de elegir la constante  $C$  uniformemente. En este caso diremos que  $f$  es *uniformemente Hölder* y que  $f$  está en el espacio Hölder  $C^\alpha(\mathbb{R})$ .

También, si  $f$  es una vez derivable y su derivada cumple una condición de Hölder, i.e. existen una constante  $C > 0$  y  $1 < \alpha < 2$  tal que,

$$|f'(x) - f'(y)| \leq C |x - y|^{\alpha-1} \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

también se puede elegir la constante  $C$  uniformemente en la desigualdad (2.10), pues

$$\begin{aligned} |f(x) - P_{x_0}(x)| &= |f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \\ &= |f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0)| \\ &= |(f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0)|, \end{aligned}$$

para  $\xi$  en el intervalo entre  $x$  y  $x_0$ . Es decir que existe  $C > 0$  tal que, para todo  $x_0, x \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq C |x - x_0|^\alpha.$$

También en este caso diremos que  $f$  es uniformemente Hölder o que  $f$  está en el *espacio Hölder*  $C^\alpha(\mathbb{R})$ .

En general,

**Definición 2.2.12** Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ .

Sea  $0 < \alpha < 1$ . Decimos que  $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$  o que  $f$  es uniformemente Hölder si  $f$  es acotada y existe  $C > 0$  tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq C |x - y|^\alpha, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

Sea  $\alpha > 1$ , con  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ . Decimos que  $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$  o que  $f$  es uniformemente Hölder si  $f$  es acotada y existen todas las derivadas menores que  $\alpha$  y  $C > 0$  tal que:

$$|\partial^{[\alpha]} f(x) - \partial^{[\alpha]} f(y)| \leq C |x - y|^{\alpha - [\alpha]}, \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

**Observación 2.2.13** Si  $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d)$  la constante  $C$  de la condición Hölder puntual (2.10) se puede elegir independientemente de  $x_0$ .

## 2.2.2. Caracterización wavelet de la regularidad uniforme y puntual

La regularidad uniforme (Definición 2.2.12) y la regularidad puntual (Definición 2.2.1) pueden caracterizarse a través del decaimiento de los coeficientes wavelet, siempre que  $\psi$  sea una wavelet madre con  $r$  primeras derivadas de rápido decaimiento (condición (2.7)) y  $r$  momentos nulos (condición (2.8)), tal que  $r > \alpha$ . En [51] Y. Meyer prueba el siguiente resultado,

**Teorema 2.2.14** (*Y. Meyer, 1990*)

*Sea  $\alpha > 0$ , no entero.*

$$f \in C^\alpha(\mathbb{R}) \iff \exists C > 0 : \forall j, k \quad |c_{j,k}| \leq C 2^{-j\alpha}.$$

También, en [27], S. Jaffard encuentra una correlación directa entre el decaimiento de los coeficientes wavelet  $c_{j,k}$  y la clase Hölder puntual  $C^\alpha(x_0)$ , que se establece en la siguiente proposición.

**Proposición 2.2.15** (*S. Jaffard, 1989*)

*Si  $f \in C^\alpha(x_0)$  entonces existe  $C > 0$  tal que, para todo  $j \geq 0$ ,*

$$|c_{j,k}| \leq C 2^{-j\alpha}(1 + |k - 2^j x_0|)^\alpha. \quad (2.12)$$

Si la función  $f$  tiene una singularidad tipo cúspide en  $x_0$  (ver Ejemplo 2.2.5) los coeficientes wavelet significativos se localizan cerca de  $x_0$ . Por lo tanto, se tiene

$$|c_{j,k}| \approx C 2^{-j\alpha}. \quad (2.13)$$

En cambio, si  $f$  tiene una singularidad de tipo oscilante en  $x_0$  los coeficientes wavelet máximos se pueden localizar lejos del punto singular  $x_0$ , con lo cual los coeficientes wavelet significativos no verifican la Fórmula (2.13). Con esta perspectiva, S. Jaffard reformula la Proposición 2.12, caracterizando la regularidad local en términos de supremos locales de los coeficientes wavelet, denominados coeficientes *wavelet leaders* [35].

### Coefficientes wavelet leaders y exponente Hölder puntual

La noción de coeficientes wavelet leaders fue introducida por S. Jaffard en [32], a fin de proveer una fórmula para la cota superior de la dimensión box del gráfico de una función. Más adelante, en [35], S. Jaffard prueba que estos coeficientes multirresolución tienen una relación directa con la regularidad local de una función y además muestra que los coeficientes wavelet leaders proveen un “formalismo multifractal”, es decir un conjunto de fórmulas que permite calcular el espectro multifractal de una función.

Sea la wavelet madre  $\psi$ , una función esencialmente localizada en el intervalo  $[0, 1]$ . Podemos suponer esto pues si, por ejemplo, la wavelet madre  $\psi$  tiene soporte compacto entonces

$$\text{existe } C > 0 \text{ tal que } \text{sop}(\psi) \subset C.[0, 1),$$

donde  $C.[0, 1)$  es el intervalo centrado en  $\frac{1}{2}$  y  $C$  veces más ancho, es decir el intervalo  $[0, 1)$  dilatado en  $C$ . Con lo cual

$$\text{sop}(\psi(2^j x - k)) \subset C. \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right),$$

y en consecuencia, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $c_{j,k}$  tiene información relevante de la función  $f$  relativa al intervalo diádico  $I_{j,k} = \left[ \frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j} \right)$ .

**Definición 2.2.16** Sea  $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ . Se definen los coeficientes wavelet leaders de la función  $f$  como,

$$d_{j,k} = \sup_{I_{l,h} \subset 3I_{j,k}} |c_{l,h}|, \quad (2.14)$$

donde  $3I_{j,k} = I_{j,k-1} \cup I_{j,k} \cup I_{j,k+1} = \left[ \frac{k-1}{2^j}, \frac{k+2}{2^j} \right)$  es el intervalo dilatado en 3.

**Definición 2.2.17** Sea  $I_j(x_0)$  el único intervalo  $I_{j,k}$ , del nivel  $j$ , que contiene a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . El coeficiente wavelet leader de  $f$  en  $x_0$  del nivel  $j$  se define como

$$d_j(x_0) = \sup_{I_{l,h} \subset 3I_j(x_0)} |c_{l,h}|. \quad (2.15)$$

El siguiente gráfico representa el esquema del cálculo de  $d_j(x_0)$ .

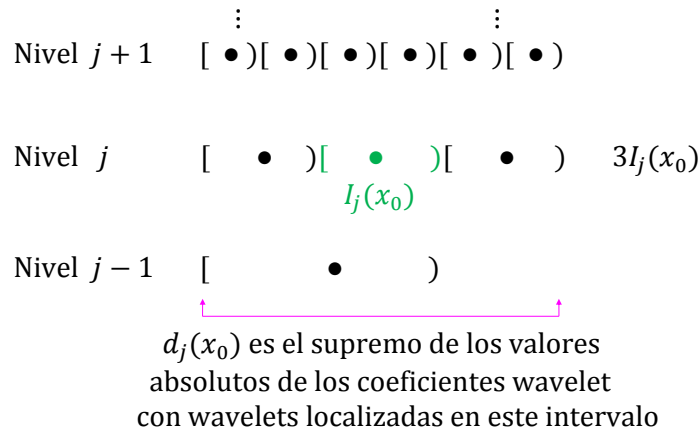


Figura 2.6: Los puntos  $\bullet$  representan los coeficientes wavelet a través de su localización.

**Observación 2.2.18** *La noción de coeficientes wavelet leaders también se adapta para funciones en varias variables de  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ . En este trabajo nos concentramos en las señales unidimensionales.*

Se puede ver que la sucesión  $(d_j(x_0))_{j \in \mathbb{N}}$  es decreciente. Más aún, concentrando la información de los coeficientes wavelet en los coeficientes wavelet leaders S. Jaffard[35] prueba el siguiente teorema sobre el decaimiento exponencial de los coeficientes wavelet leaders y su relación con el exponente Hölder. Este resultado es independiente de la elección de la wavelet madre  $\psi$ , siempre y cuando  $\psi$  tenga  $r$  momentos nulos y rápido decaimiento de sus derivadas  $\psi^{(n)}$ ,  $0 \leq n \leq r$ , con  $r > \alpha$ .

**Teorema 2.2.19** *(S. Jaffard, 2004)*

*Sea  $f$  una función acotada tal que  $f \in C^\alpha(x_0)$ ,  $\alpha > 0$ . Entonces para todo  $j > 0$ ,*

$$d_j(x_0) \leq C 2^{-j\alpha}, \quad (2.16)$$

para alguna constante  $C$ .

Más aún, si  $f$  es uniformemente Hölder, el exponente Hölder puntual de  $f$  en  $x_0$  se puede computar con la siguiente fórmula

$$h(x_0) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(d_j(x_0))}{\log(2^{-j})}. \quad (2.17)$$

**Observación 2.2.20** *Recíprocamente, se prueba en [35] que si vale la desigualdad (2.16) y la función  $f$  es uniformemente Hölder, se verifica la siguiente condición más débil: Existen  $C > 0$  y un polinomio  $P_{x_0}(x)$  de grado menor que  $\alpha$  tales que, en un entorno de  $x_0$ ,*

$$|f(x) - P_{x_0}(x)| \leq C |x - x_0|^\alpha \log \left( \frac{1}{|x - x_0|} \right). \quad (2.18)$$

## 2.3. Otros exponentes de regularidad

### 2.3.1. Exponente Hölder local

El exponente Hölder local fue introducido por J. Lévy Véhel y colaboradores, [24, 63]. Este exponente se calcula localizando los espacios Hölder globales, es decir el espacio de funciones que verifican las condiciones de la Definición 2.2.12 para el conjunto  $B(x_0, \varepsilon)$ , la bola de centro  $x_0$  y radio  $\varepsilon$ .

**Definición 2.3.1** *Sea  $f : B(x_0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Sea  $0 < \alpha < 1$ . Decimos que  $f \in C^\alpha(B(x_0, \varepsilon))$  si  $f$  es acotada en  $B(x_0, \varepsilon)$  y existe  $C$  tal que para todo  $x, y \in B(x_0, \varepsilon)$ :*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Sea  $\alpha > 1$ ,  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ . Decimos que  $f \in C^\alpha(B(x_0, \varepsilon))$  si  $f$  es acotada en  $B(x_0, \varepsilon)$  y existen todas las derivadas menores que  $\alpha$  y  $C > 0$  tal que para todo  $x, y \in B(x_0, \varepsilon)$ :

$$|\partial^{[\alpha]}f(x) - \partial^{[\alpha]}f(y)| \leq C|x - y|^{\alpha - [\alpha]},$$

El espacio  $C^\alpha(B(x_0, \varepsilon))$  se denomina el espacio de funciones Hölder  $\alpha$  sobre el conjunto  $B(x_0, \varepsilon)$ .

Si consideramos  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f \in C^\alpha(B(x_0, \varepsilon))$  entonces existe  $C > 0$  tal que

$$|f(x) - f(x_0 + t)| \leq C|x - (x_0 + t)|^\alpha \quad \forall x \in B(x_0, \varepsilon), \forall t : |t| < \varepsilon.$$

Con lo cual, si  $0 < \alpha < 1$ , se puede interpretar que las curvas  $|y - f(x_0 + t)| = C|x - (x_0 + t)|^\alpha$  encierran el gráfico de la función en  $B(x_0, \varepsilon)$ , con  $|t| < \varepsilon$ .

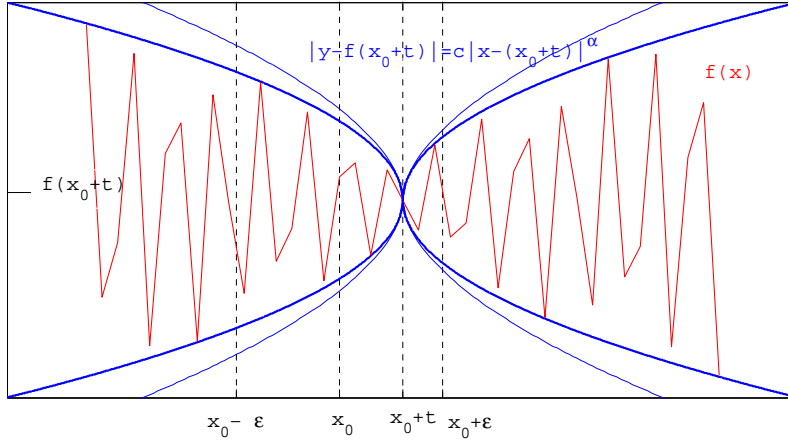


Figura 2.7: Esquema de los gráficos de  $f(x)$  y de las curvas de ecuación  $|y - f(x_0 + t)| = C|x - (x_0 + t)|^\alpha$ .

Para cada  $\varepsilon > 0$  se computa el  $\sup \{\alpha : f \in C^\alpha(B(x_0, \varepsilon))\}$ , que es decreciente como función de  $\varepsilon$ . Luego, se define:

**Definición 2.3.2** El exponente Hölder local de  $f$  en  $x_0$  es

$$\alpha_l(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \{\alpha : f \in C^\alpha(B(x_0, \varepsilon))\}.$$

*Notación:* Cuando sea necesario especificar que el exponente Hölder local se asocia a una determinada función  $f$  notaremos  $\alpha_l(f, x_0)$ .

**Observación 2.3.3** Si bien la definición de exponente Hölder local considera funciones de varias variables nos centraremos en funciones de una variable pues las propiedades fundamentales del exponente están probadas para ese caso.

Una de las ventajas del exponente Hölder local es que distingue singularidades oscilantes de no oscilantes. Por ejemplo,

**Ejemplo 2.3.4** Sean  $0 < \alpha \leq 1$  y  $\beta > 0$ ,

- $f(x) = |x|^\alpha$  tiene  $\alpha_l(0) = \alpha$  y  $\alpha_l(x) = +\infty$  sino.
- $f(x) = |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$  extendida continuamente en 0, tiene  $\alpha_l(0) = \frac{\alpha}{\beta+1}$  y  $\alpha_l(x) = +\infty$  sino. Observemos que el exponente  $\beta$  aparece en la fórmula de  $\alpha_l(0)$ .

Además el exponente Hölder local es estable bajo la aplicación de operadores diferenciales, es decir que si la función  $F$  es una primitiva de  $f$  entonces

$$\alpha_l(F, x) = \alpha_l(f, x) + 1,$$

una propiedad que el exponente Hölder puntual no verifica. Por ejemplo, para  $f(x) = |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$  se puede probar que  $h(F, x) = \alpha + \beta + 1$ . En consecuencia, como  $h(f, x) = \alpha$ , tenemos que

$$h(F, x) \neq h(f, x) + 1.$$

Sin embargo, desde la perspectiva del análisis multifractal, el exponente Hölder puntual tiene más ventajas que el exponente Hölder local. Plantear un análisis multifractal basado en el exponente Hölder local no es de interés pues, si  $f$  es una función definida en un intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , cuyo rango de valores del exponente Hölder puntual es  $[h_m, h_M]$ , se cumple que su exponente Hölder local es  $\alpha_l(x) = h_m$  para todo  $x \in I$  [63]. En consecuencia la dimensión de Hausdorff de los conjuntos  $\{x \in I : \alpha_l(x) = H\}$  es 0 o 1 y no hay multifractalidad asociada al exponente Hölder local.

En [63] se estudian las propiedades del exponente Hölder local. Allí se establecen las siguientes relaciones entre el exponente Hölder puntual y el exponente Hölder local:

**Proposición 2.3.5** (*S. Seuret y J. Lévy Véhel, 2002*)

Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua, con  $I$  un intervalo de la recta real, y sean  $h(x)$  y  $\alpha_l(x)$  los respectivos exponentes Hölder puntual y local de la función  $f$  en  $x$ . Entonces para todo  $x \in I$ ,

$$\alpha_l(x) \leq \min \left\{ h(x), \liminf_{t \rightarrow x} h(t) \right\}.$$

Además, los exponentes  $h(x)$  y  $\alpha_l(x)$  no pueden diferir en todo punto pues,

**Proposición 2.3.6** (*S. Seuret y J. Lévy Véhel, 2002*)

Sean  $I$  un intervalo de la recta real y  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $f \in C^\gamma(I)$  y sean  $h(x)$  y  $\alpha_l(x)$  los respectivos exponentes Hölder puntual y local de la función  $f$  en  $x$ . Entonces existe un subconjunto  $D \subset I$  tal que:

- $D$  es un conjunto no numerable, denso en  $\mathbb{R}$  y de dimensión de Hausdorff 0,
- $\alpha_l(x) = h(x)$  para todo  $x \in D$ .

### Exponente Hölder local y transformada wavelet discreta

Los espacios  $C^\alpha(B(x_0, \varepsilon))$  también se caracterizan a través de los coeficientes wavelet, considerando que la wavelet madre  $\psi$  posee  $r$  primeras derivadas de rápido decaimiento (2.7),  $r$  momentos nulos (2.8), con  $r > \alpha$ , y además el  $\text{sop}(\psi(2^j x - k)) \subset B(x_0, \varepsilon)$ . La siguiente Proposición es consecuencia del Teorema 2.2.14.

**Proposición 2.3.7** Sean  $\alpha > 0$ , no entero,  $x_0 \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon > 0$ .

$f \in C^\alpha(B(x_0, \varepsilon))$  si y sólo si para todo  $j, k$  tal que  $\text{sop}(\psi(2^j x - k)) \subset B(x_0, \varepsilon)$  existe  $C > 0$  tal que  $|c_{j,k}| \leq 2^{-j\alpha}$ .

Con lo cual, si  $\psi$  tiene soporte compacto, se puede caracterizar al exponente Hölder local como

$$\alpha_l(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sup \{ \alpha : \forall j, k \text{ tal que } \text{sop}(\psi(2^j x - k)) \subset B(x_0, \varepsilon) \exists C > 0 : |c_{j,k}| \leq 2^{-j\alpha} \}.$$

La caracterización wavelet del exponente Hölder local provee el siguiente teorema sobre la prescripción de este exponente, el cual establece una función, definida a partir de los coeficientes wavelet, cuyo exponente Hölder local en  $x$  es una predeterminada función  $g(x)$  semi-continua inferiormente.

**Teorema 2.3.8** (*S. Seuret y J. Lévy Véhel, 2002*)

Sean  $0 < \gamma < 1$ ,  $s : [0, 1] \rightarrow [\gamma, +\infty)$  una función acotada que es el límite inferior de funciones continuas y  $g : [0, 1] \rightarrow [\gamma, +\infty)$  una función semi-continua inferiormente. Si se verifica que  $s(x) \geq g(x)$  para todo  $x \in [0, 1]$  entonces existe una función  $f : [0, 1] \rightarrow [\gamma, +\infty)$  tal que,

- para todo  $x \in [0, 1]$ , el exponente Hölder local de  $f$  en  $x$  es  $\alpha_l(x) = g(x)$ ,
- y para todo  $x \in [0, 1] \setminus D$ , con  $D$  tal que su dimensión de Hausdorff es 0, el exponente Hölder puntual de  $f$  en  $x$  es  $h(x) = s(x)$ .

### 2.3.2. Exponente chirp

El exponente chirp fue introducido por Y. Meyer y S. Jaffard en [39, 53, 34] y caracteriza el comportamiento asintótico de una función luego de muchas integraciones, en un entorno de  $x_0$ . La definición se inspira en el tipo de singularidad que tiene la función  $f(x) = |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ , extendida continuamente, y sus sucesivas primitivas en  $x_0 = 0$ . Usando integración por partes se puede probar que las primitivas  $n$ -ésimas de la función  $f$  son de la forma

$$|x|^{\alpha+n(\beta+1)} g(x),$$

con  $g$  acotada y oscilante [39]. Es decir que el exponente Hölder puntual de una primitiva de orden  $n$  de  $f$  en  $x_0 = 0$  es  $\alpha + n(\beta + 1)$ . A partir de estas ideas se tiene la siguiente definición,

**Definición 2.3.9** Sean  $\alpha \geq 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función localmente acotada y  $f^{(-n)}$  una primitiva de  $f$  de orden  $n$ . Decimos que  $f$  es un chirp de tipo  $(\alpha, \beta)$  en  $x_0$  si

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(-n)} \in C^{\alpha+n(\beta+1)}(x_0). \quad (2.19)$$

**Observación 2.3.10** En esta tesis nos enfocamos en el estudio de funciones unidimensionales. Sin embargo, cabe aclarar que Y. Meyer et. al. [53] generalizan la noción de chirp de tipo  $(\alpha, \beta)$  en  $x_0$  para funciones de varias variables  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , localmente acotadas. Allí se establece que  $f$  es un chirp de tipo  $(\alpha, \beta)$  en  $x_0$  si, para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  puede escribirse como

$$f = \sum_{|\gamma| \leq n} \partial^\gamma f_\gamma, \quad (2.20)$$

con  $f_\gamma \in C^{\alpha+n\beta+|\gamma|}(x_0)$ , donde  $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$ .

El interior del conjunto de pares ordenados  $(\alpha, \beta)$  tal que  $f$  es un chirp de tipo  $(\alpha, \beta)$  en  $x_0$  es un conjunto de la forma  $(0, \alpha_0) \times (0, \beta_0)$  [34], con lo cual:

**Definición 2.3.11** El exponente chirp de  $f$  en  $x_0$  es

$$\beta_c(x_0) = \sup \{ \beta : \exists \alpha \text{ tal que } f \text{ es un chirp de tipo } (\alpha, \beta) \text{ en } x_0 \}. \quad (2.21)$$

Más sencillamente, si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se puede dar la siguiente definición [50].

**Definición 2.3.12** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , una función localmente acotada. Sea  $f^{(-n)}$  una primitiva de  $f$  de orden  $n$  y  $H_n(x_0)$  el exponente Hölder puntual de  $f^{(-n)}$  en  $x_0$ . Se define el exponente chirp de  $f$  en  $x_0$  como

$$\beta_c(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{H_n(x_0)}{n} - 1.$$



**Ejemplo 2.3.13** Sean  $0 < \alpha \leq 1$  y  $\beta > 0$ .

- $f(x) = |x|^\alpha$  tiene  $\beta_c(0) = 0$  pues  $H_n(0) = \alpha + n$ .
- $f(x) = |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ , extendida continuamente, tiene  $\beta_c(0) = \beta$  pues  $H_n(0) = \alpha + n(\beta + 1)$ .

**Ejemplo 2.3.14** La función de Riemann no derivable,

$$R(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2},$$

es una función continua, no derivable en un conjunto denso. En 1970 J. Gerver [22] prueba que esta función resulta derivable en los racionales que son cocientes de números impares. Este ejemplo es interesante pues S. Jaffard e Y. Meyer demuestran que  $R(x)$  es un chirp de tipo  $(3/2, 1)$  en los racionales que son cocientes de números impares [39]. Es decir que  $R(x)$  tiene singularidades de tipo chirp en un conjunto denso.

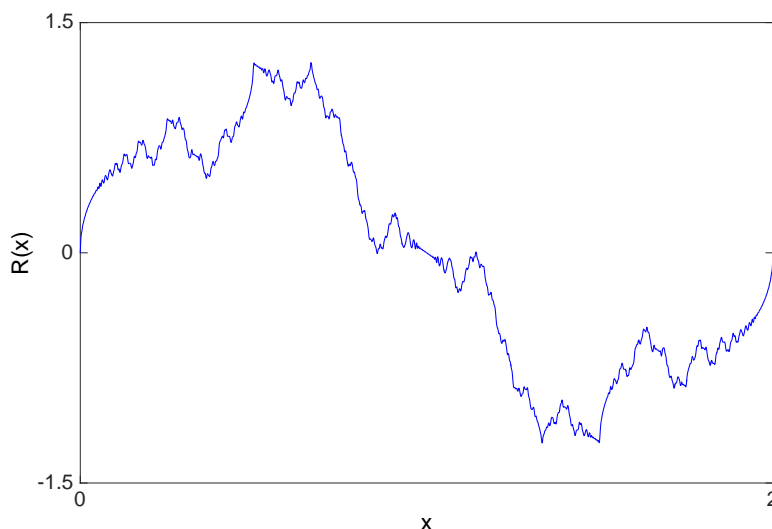


Figura 2.8: Función de Riemann no derivable

Además, en [30], S. Jaffard calcula el exponente Hölder puntual de la función  $R(x)$  en cada  $x \in \text{Dom}(f)$ . Este cálculo no es trivial y su fórmula está relacionada con propiedades de las aproximaciones diofantinas de cada  $x$ .

### Exponente chirp y transformada wavelet discreta

Y. Meyer et. al. dan una caracterización de funciones chirp del tipo  $(\alpha, \beta)$  en  $x_0$  [53], para  $\psi$  una wavelet madre en la clase de Schwartz.

**Proposición 2.3.15** (*Y. Meyer y H. Xu, 1997*)

$f$  es una función chirp de tipo  $(\alpha, \beta)$  en  $x_0$  si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

I)  $f \in C^\alpha(x_0)$ .

II) En el dominio  $|k2^{-j} - x_0|^{\beta+1} \leq 2^{-j} \leq |k2^{-j} - x_0|$ , existe  $C_n > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tal que

$$|c_{j,k}| \leq C_n 2^{jn} |k2^{-j} - x_0|^{\alpha+n(\beta+1)}.$$

III) En el dominio  $|k2^{-j} - x_0| \leq 2^{-j}$ , existe  $C_n > 0$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , tal que

$$|c_{j,k}| \leq C_n 2^{-jn}.$$

Esta caracterización wavelet de una función chirp de tipo  $(\alpha, \beta)$  en  $x_0$  permite predeterminar simultáneamente a los exponentes Hölder puntual y chirp. En [33] se construye una función  $f$  tal que  $h(x)$  y  $\beta_c(x)$  son sus respectivos exponentes Hölder puntual y chirp en cada  $x \in [0, 1] \setminus E$ , para  $E$  un conjunto de medida 0.

En primer lugar, se prueba el siguiente resultado. [23].

**Proposición 2.3.16** (*B. Guiheneuf, S Jaffard y J. Lévy Véhel, 1998*)

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función cuyo exponente Hölder puntual satisface que existen  $H_1$  y  $H_2$  números reales tales que, para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$0 < H_1 \leq h(x) \leq H_2.$$

Entonces  $\beta_c(x)$ , el exponente chirp de  $f$ , se anula en un conjunto denso en  $\mathbb{R}$ .

Sin embargo es posible prescribir al exponente chirp para todo  $x \in [0, 1] \setminus E$ , con  $E$  el conjunto de medida 0, definido en [33], como

$$E = [0, 1] \setminus \left\{ x : \text{existe } C > 0 \text{ tal que } \left| x - \frac{k}{2^j} \right| \geq \frac{C}{j^2 2^j} \quad \forall j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z} \right\}. \quad (2.22)$$

Más precisamente,

**Teorema 2.3.17** (*S. Jaffard, 2000*)

Para todo par de funciones no negativas y acotadas  $(h(x), \beta_c(x))$ , definidas en el  $[0, 1]$ , existe una función  $f$  cuyos exponentes Hölder puntual y chirp son respectivamente  $h(x)$  y  $\beta_c(x)$ , para todo  $x \in [0, 1] \setminus E$ .

**Observación 2.3.18** *El conjunto  $E$  también puede elegirse de otras formas. Ver [33] para más detalles.*

Si bien el exponente chirp es sensible a las oscilaciones resulta ineficaz en algunos casos, tal como lo ilustra el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.3.19** Consideremos la función  $f(x) = |x| \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) + |x|^{3/2}$  extendida continuamente en 0.

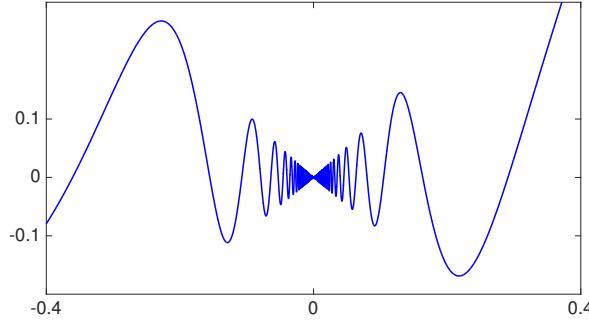


Figura 2.9: Gráfico de  $f(x) = |x| \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) + |x|^{3/2}$  extendida continuamente en 0.

En  $x_0 = 0$  tiene un comportamiento oscilante, sin embargo el exponente chirp es  $\beta_c(0) = 0$ . Es decir que sumar a la función  $|x| \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$  una función derivable en 0, como  $|x|^{3/2}$ , anula la capacidad del exponente chirp para detectar la oscilación.

En el procesamiento de señales o imágenes es importante que los parámetros que se miden sean estables si se introducen ruidos “suaves”. El ejemplo anterior ilustra la dificultad del exponente chirp para captar un fenómeno oscilatorio si se agregan ruidos aditivos suaves a una señal. A fin de captar con mayor precisión el comportamiento oscilante alrededor de  $x_0$  se propone el exponente de oscilación.

### 2.3.3. Exponente de oscilación

El exponente de oscilación, introducido por A. Arneodo et. al. [6, 7], estudia la regularidad Hölder puntual de las integrales fraccionarias infinitesimales de una función  $f$  y captura con más precisión el fenómeno oscilatorio en  $x_0$ .

**Definición 2.3.20** Sea  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , una función localmente acotada o bien  $f$  una distribución temperada. Se define  $f^{(-t)}$ , la integral fraccionaria de  $f$  de orden  $t$ ,  $t \in \mathbb{R}_{>0}$ , como

$$\widehat{f^{(-t)}}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-t/2} \hat{f}(\xi).$$

Si  $H_t(x_0)$  es el exponente Hölder puntual de  $f^{(-t)}$  en  $x_0$ . Se define el exponente de oscilación de  $f$  en  $x_0$  como

$$\beta_o(x_0) = \left. \frac{\partial}{\partial t} H_t(x_0) \right|_{t=0^+} - 1. \quad (2.23)$$

**Observación 2.3.21** En [7] se prueba que, dado un  $x_0$ , la función  $H_t(x_0)$ , que depende del parámetro  $t$ , es una función cóncava hacia abajo y derivable por derecha en  $t = 0$  (considerando  $H_0(x_0)$  el exponente Hölder puntual de  $f$  en  $x_0$ ). Por lo tanto la fórmula (2.23) tiene sentido.

**Observación 2.3.22** En [37] se muestra que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es localmente acotada e  $I^\alpha f$ , con  $\alpha > 0$ , es la integral fraccionaria usual, definida por

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau,$$

con  $a < x$ , se cumple que el exponente Hölder puntual de  $f^{(-t)}$  en  $x_0$ , con  $a < x_0 < x$ , coincide con el exponente Hölder puntual de  $I^t f$  en  $x_0$ , para  $t > 0$ . El resultado puede extenderse para funciones de varias variables a valores reales.

**Ejemplo 2.3.23** Sean  $0 < \alpha \leq 1$  y  $\beta > 0$ .

- $f(x) = |x|^\alpha$  tiene  $\beta_o(0) = 0$  pues  $H_t(0) = \alpha + t$ .
- $f(x) = |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{|x|^\beta}\right)$ , extendida continuamente, tiene  $\beta_o(0) = \beta$  pues  $H_t(0) = \alpha + t(\beta + 1)$ .

**Ejemplo 2.3.24** Si  $f(x) = |x| \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) + |x|^{3/2}$  (ver la figura 2.9) se puede comprobar que  $\beta_o(0) = 1$ . El exponente de oscilación captura el fenómeno oscilatorio que el exponente chirp no logra detectar. Es decir que el exponente de oscilación sigue detectando el fenómeno oscilatorio en 0, aunque se suma una función suave en 0. Más aún, en [37], se prueba que el exponente de oscilación de una función en  $x_0$  se mantiene estable si a la función o señal se le suma una función más regular en  $x_0$ .

## Coeficientes wavelet $t$ -leaders y exponente de oscilación

Arneodo et. al. definen el exponente de oscilación [7] y establecen propiedades que relacionan a los coeficientes wavelet de una función  $f$  con su exponente de oscilación en  $x_0$ . Posteriormente, en [4, 37], se propone una fórmula que permite estimar el exponente de oscilación de  $f$  en  $x_0$  en términos de los coeficientes wavelet  $t$ -leaders. Para definir los coeficientes  $t$ -leaders se considera una wavelet madre  $\psi$  con  $r$  primeras derivadas de rápido decaimiento (condición (2.7)) y  $r$  momentos nulos (condición (2.8)), tal que  $r > t + 1$ .

**Definición 2.3.25** Sean  $t > 0$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función tal que  $f^{-t}$  es acotada. Sea  $I_j(x_0)$  el único intervalo  $I_{j,k}$ , del nivel  $j$  que contiene a  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Si  $c_{j,k}$  son los coeficientes wavelet de  $f$ , se define el coeficiente wavelet  $t$ -leader de  $f$  en  $x_0$  del nivel  $j$  como:

$$d_j^t(x_0) = \sup_{I_{l,h} \subset 3I_j(x_0)} |c_{l,h} 2^{-tl}|. \quad (2.24)$$

**Observación 2.3.26** La definición de coeficientes wavelet puede adaptarse para  $f$  una distribución (ver en el Capítulo 4). Por lo tanto la Definición 2.3.25 puede extenderse a distribuciones.

Los coeficientes  $t$ -leaders permiten computar  $H_t(x_0)$ , el exponente Hölder puntual de la integral fraccionaria  $f^{-t}$  en  $x_0$ , sin necesidad de calcular  $f^{-t}$ . La fórmula es sencilla y similar a la dada en (2.17).

**Proposición 2.3.27** (S. Jaffard, S. Roux y P. Abry, 2011)

Sea  $f$  una función uniformemente Hölder. Entonces

$$H_t(x_0) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(d_j^t(x_0))}{\log(2^{-j})}. \quad (2.25)$$

Luego se puede calcular  $\beta_o(x_0)$  mediante la fórmula (2.23).

# Capítulo 3

## Entropía wavelet leaders

En este capítulo proponemos otro cuantificador para caracterizar la regularidad local de señales: la *entropía wavelet leaders puntual*. Definimos esta nueva medida de regularidad combinando el concepto de entropía con los coeficientes wavelet leaders (ver Sección 2.2.2).

Algunos antecedentes sobre el estudio de cuantificadores que combinan medidas de la teoría de la información con coeficientes wavelet se pueden encontrar en los trabajos de Torres et al. [68, 21] y Figliola et al. [19, 10, 60]. De un modo heurístico, en los trabajos citados se proponen métodos basados en dichos cuantificadores para analizar la dinámica de series temporales biomédicas.

A partir de las ideas planteadas en [19, 10, 60], utilizamos los coeficientes wavelet leaders de la función o señal  $f$  en  $x_0$ , correspondientes a los primeros  $m$  niveles de resolución para definir una distribución de probabilidades discreta  $P_{x_0}$ , definida en cada  $x_0$  y en cada nivel de resolución  $m$ . La *entropía wavelet leaders* de una función  $f$  en  $x_0$ , consiste en computar la entropía de Shannon [65] de la distribución de probabilidades  $P_{x_0}$ . Este cuantificador refina lo formulado en [19, 10, 60], donde los cuantificadores se definen en intervalos no solapados de determinado tamaño, limitado por la cantidad de datos de la señal y su contenido frecuencial. En cambio, la *entropía wavelet leaders* tiene una mejor resolución temporal pues se define puntualmente.

Además encontramos evidencias de que este cuantificador muestra la evolución de la regularidad local de diversas señales (electroencefalogramas (EEG) [58], señales provenientes de los mercados financieros [59]). Más allá de estos hallazgos heurísticos, probamos que, efectivamente, existe un nivel de resolución  $m$  tal que la entropía wavelet leaders puntual es muy cercana a su máximo valor si el exponente Hölder puntual es cercano a cero. Esto justifica que el cuantificador resulte una herramienta alternativa para detectar cambios en la regularidad local de una función o señal.

En este capítulo introducimos la entropía wavelet leaders puntual y analizamos sus propiedades. También mostramos algunas aplicaciones en señales provenientes de EEG,

registradas en crisis epilépticas, y comparamos nuestro cuantificador con la entropía wavelet definida en [60, 61]. Asimismo mostramos una aplicación a una serie de datos del índice Dow-Jones, registrada en el período 1928-2011.

### 3.1. Entropía

La entropía es una noción introducida por R. Clausius, a mediados del 1800, para describir a la energía perdida en fenómenos físicos de la termodinámica. Unos años más tarde L. Boltzman formula esta noción desde el punto de vista de las probabilidades, como medida de desorden en sistemas termodinámicos, lo cual da lugar al desarrollo de la mecánica estadística. Posteriormente, a mediados del siglo XX, C. E. Shannon funda la teoría de la información [65] y reformula el concepto de entropía para cuantificar la información promedio contenida en un mensaje. Asimismo, A. Kolmogorov [42] e Y.G. Sinai [66] convierten la teoría de la información de Shannon en una herramienta fundamental para el estudio de los sistemas dinámicos.

Si  $X$  es una fuente de información con símbolos  $\{x_1, \dots, x_m\}$  que ocurren con probabilidad  $\{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  se define la entropía de Shannon de la distribución de probabilidades como:

**Definición 3.1.1** *La entropía de Shannon de la distribución de probabilidades  $P = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  es*

$$S(P) = - \sum_{i=1}^m \rho_i \log_2(\rho_i) = \sum_{i=1}^m \rho_i \log_2(1/\rho_i), \quad (3.1)$$

y se define  $\rho_i \log_2(\rho_i) = 0$  si  $\rho_i = 0$ .

En cada sumando  $\log_2(1/\rho_i)$  puede interpretarse como la sorpresa asociada con la salida de  $x_i$ ; cuanto más improbable es un mensaje más información se da al recibirlo. Si  $\rho_i$ , la probabilidad de salida de  $x_i$ , es pequeña la sorpresa asociada a la salida de este símbolo es grande; no obstante el sumando  $\rho_i \log_2(1/\rho_i)$  produce un aporte pequeño al promedio de la información.

La función  $S(\rho_1, \dots, \rho_m)$  verifica la siguiente propiedad:

**Proposición 3.1.2**  *$S(\rho_1, \dots, \rho_m)$  es una función continua que verifica que*

$$0 \leq S(\rho_1, \dots, \rho_m) \leq \log_2(m),$$

y alcanza su máximo valor  $\log_2(m)$  cuando la distribución de probabilidades es equiprobable.

Para la teoría de la información  $S(\rho_1, \dots, \rho_m)$  cuantifica la incerteza asociada a la distribución de probabilidades  $P$ . La función  $S$  es máxima si la distribución de

probabilidades  $P$  es equiprobable, es decir cuando los símbolos de salida  $x_i$  tienen todos la misma probabilidad de salida y por lo tanto la incerteza de la salida de la fuente de información es máxima. En contraposición, la entropía  $S$  es nula cuando se puede predecir con certeza cuál es la salida, es decir cuando  $\rho_j = 1$  y  $\rho_i = 0$  para todo  $i \neq j$ . Para profundizar sobre la teoría de la información y sus cuantificadores se puede consultar [15].

### 3.1.1. Entropía wavelet

En [57] se define la entropía espectral de una señal, usando la noción de entropía y de transformada de Fourier a tiempo corto, como una aproximación para medir el grado de orden o de desorden de una señal. Una de las desventajas de este cuantificador es que requiere que las señales sean estacionarias, es decir que la serie de datos temporal tenga media y varianza invariante en el tiempo. El requerimiento de estacionariedad de la señal no es necesario si se utiliza la transformada wavelet. Por lo tanto la transformada wavelet es una herramienta apropiada para el análisis de series de datos temporales no estacionarias, como es el caso, por ejemplo, de las señales provenientes de electroencefalogramas.

A fin de analizar la dinámica de señales de electroencefalogramas Torres et al. [68, 21] y Figliola et al. [19, 10, 60] introducen metodologías que computan cuantificadores de la teoría de la información de distribuciones de probabilidades definidas a partir de los coeficientes wavelet.

En [19, 10, 60] se asume que la señal tiene  $N$  datos  $\{f(n) : n = 1, \dots, N\}$  correspondientes a una grilla registrada en intervalos regulares de tiempo  $\Delta t$ .

En este contexto la wavelet madre  $\psi$  es una función B-spline cúbica (ver fórmula (2.6)) y la descomposición wavelet se lleva a cabo en todos los niveles de resolución  $j = 1, \dots, j_{max}$ , con  $j_{max} \leq \log_2(N)$ . Con lo cual, por la fórmula (3.9), la expansión wavelet de la señal, en los niveles de resolución de  $j = 1, \dots, j_{max}$ , es

$$f(x) \approx \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_k C_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j x - k), \quad (3.2)$$

donde  $C_{j,k} = \langle f, 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \rangle$  son los coeficientes wavelet usuales. Observar que los coeficientes wavelet que definimos en la fórmula (2.4) del Capítulo 2 difieren en un factor de los usuales. Más precisamente, para funciones unidimensionales tenemos que  $c_{j,k} = 2^{j/2} C_{j,k}$ .

A partir de la noción de energía de la transformada de Fourier, en [19, 10, 60] se



define la energía en los niveles de resolución  $j = 1, \dots, j_{max}$  como

$$E_j = \sum_k |C_{j,k}|^2, \quad (3.3)$$

y la energía total de la señal como

$$E_{tot} = \sum_{j=1}^{j_{max}} E_j = \sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_k |C_{j,k}|^2. \quad (3.4)$$

Finalmente, la *energía wavelet relativa* es

$$\rho_j = \frac{E_j}{E_{tot}} \quad (3.5)$$

para los niveles de resolución  $j = 1, \dots, j_{max}$ . Estos valores definen la distribución de probabilidades de la energía wavelet relativa,

$$P^{(w)} = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}. \quad (3.6)$$

La distribución de probabilidades de la energía wavelet relativa  $P^{(w)}$  puede evaluarse en cuantificadores de la teoría de la Información tales como: la entropía y la complejidad estadística [19, 10, 60, 61]. En particular, la *entropía wavelet de Shannon* [65] se define como

$$S(P^{(w)}) = - \sum_{j=1}^{j_{max}} \rho_j \log_2(\rho_j). \quad (3.7)$$

La entropía wavelet de Shannon provee un criterio útil para comparar distribuciones de probabilidades y se puede interpretar como una medida de orden o desorden de la señal [10, 60, 61]. En efecto, un proceso muy ordenado puede representarse por una señal periódica de una única frecuencia. En este caso los coeficientes wavelet se concentran en un único nivel de resolución y por lo tanto todas las energías wavelet relativas  $\rho_j$  son nulas salvo en el nivel de resolución que incluye la frecuencia representativa de la señal. En consecuencia la entropía wavelet de Shannon es nula. Por el contrario, las señales generadas por procesos aleatorios representan comportamientos desordenados. Este tipo de señales tienen coeficientes wavelet significativos en todas las frecuencias y se puede esperar que las contribuciones de los coeficientes wavelet sean del mismo orden. En este caso la entropía wavelet de Shannon toma su máximo valor  $\log_2(j_{max})$ .

**Observación 3.1.3** *Para seguir la evolución temporal de la entropía wavelet de Shannon se divide a la señal en ventanas temporales no solapadas y se calcula la entropía wavelet de Shannon de las distribuciones de probabilidades asociadas a cada intervalo temporal, asignando estos valores a los puntos centrales del intervalo de tiempo. La*

longitud del intervalo temporal debe ser tal que incluya al menos un coeficiente wavelet en cada nivel de resolución.

### 3.1.2. Entropía wavelet leaders puntual

Siguiendo la línea de investigación de los trabajos [19, 10, 60] introducimos la *entropía wavelet leaders puntual*, evaluando la entropía de Shannon en una distribución de probabilidades construida a partir de los coeficientes *wavelet leaders*, introducidos por S. Jaffard en [32] (ver Sección 2.2.2).

La información que proveen los coeficientes wavelet leaders se localiza en intervalos decrecientes, a medida que  $j$  aumenta, y esta información está directamente relacionada con la regularidad de la señal [35], como se muestra en el resultado enunciado en el Teorema 2.2.19. En consecuencia la *entropía wavelet leaders puntual* resulta una herramienta alternativa para analizar la regularidad de señales.

Considerando una wavelet madre  $\psi$  con  $r$  momentos nulos y  $r$  veces derivable,  $r \in \mathbb{N}$ , con sus  $r$  primeras derivadas de rápido decaimiento, tenemos que  $f \in L^2(\mathbb{R})$  puede reconstruirse como

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \psi(2^j x - k) \quad (3.8)$$

o bien

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_{1,k} \varphi(2x - k) + \sum_{j \geq 1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \psi(2^j x - k), \quad (3.9)$$

donde  $c_{j,k} = \langle f, 2^j \psi(2^j x - k) \rangle$  son los coeficientes wavelet de  $f$  y  $s_{1,k}$  son los coeficientes de escala del nivel  $j = 1$ .

A partir de  $(d_j(x_0))_{j=1, \dots, m}$ , los coeficientes wavelet leaders de  $f$  en  $x_0$  de los niveles de resolución  $j = 1, \dots, m$  de la Fórmula (2.15), definimos la distribución de probabilidades  $P_{x_0}$  asociada a cada  $x_0$  en el dominio de  $f$  y la evaluamos en la entropía de Shannon.

**Definición 3.1.4** Sean  $f \in L^2(\mathbb{R})$  una función acotada y  $(d_j(x_0))_{j=1, \dots, m}$ , los coeficientes wavelet leaders de  $f$  en  $x_0$  de los niveles de resolución  $j = 1, \dots, m$ . Definimos la distribución de probabilidades  $P_{x_0} = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$  como

$$\rho_i = \frac{d_i^2(x_0)}{\sum_{j=1}^m d_j^2(x_0)} \quad \text{si } d_i(x_0) \neq 0 \quad \text{y} \quad \rho_i = 0 \quad \text{en otro caso}, \quad (3.10)$$

y la *entropía wavelet leaders puntual* de  $f$  en  $x_0$  del nivel de resolución  $m$ , como

$$S_{f,m}(x_0) = S(P_{x_0}) = - \sum_{i=1}^m \rho_i \log_2(\rho_i). \quad (3.11)$$

Además se define  $\rho_i \log_2(\rho_i) = 0$  si  $\rho_i = 0$ .

### Cálculo de la entropía wavelet leaders puntual en señales muestreadas

Sea  $f$  una señal muestreada, es decir una serie de datos  $\{f(n) : n = 1, \dots, N\}$  registrados durante algún fenómeno. Recordando la noción de subespacio de escala dada en la Sección 2.1, podemos suponer que  $f$  pertenece al subespacio de escala  $V_{j_{max}+1}$ , con  $j_{max} \leq \log_2(N)$ . Por lo tanto, usando la fórmula (2.1), tenemos que

$$V_{j_{max}+1} = V_1 + W_1 + \dots + W_{j_{max}}.$$

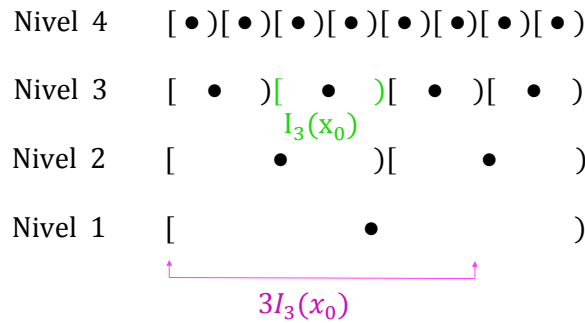
Con lo cual tenemos una cantidad finita de niveles de resolución y la expansión wavelet es

$$\sum_{j=1}^{j_{max}} \sum_k c_{j,k} \psi(2^j x - k), \quad (3.12)$$

donde  $k$  toma  $2^{j-1}$  valores consecutivos de enteros. El cómputo de los líderes en cada  $x_0$  consiste en calcular el siguiente supremo,

$$d_j(x_0) = \sup \{|c_{l,h}| : I_{l,h} \subset 3I_j(x_0), 1 \leq l \leq j_{max}\} \quad (3.13)$$

donde el intervalo diádico  $I_j(x_0)$  es el intervalo del nivel  $j$  que contiene a  $x_0$  y concentra la información del correspondiente coeficiente wavelet  $c_{j,k}$ . La siguiente figura esquematiza el cómputo de  $d_3(x_0)$  para una señal de  $2^4$  datos.



$d_3(x_0)$  es el supremo de los valores absolutos de los coeficientes wavelet con wavelets localizadas en este intervalo

Figura 3.1: Esquema del cálculo del coeficiente wavelet leader  $d_3(x_0)$ . Cada punto • identifica al coeficiente wavelet que tiene información de la señal sobre el intervalo.

Si los coeficientes wavelet de mayor amplitud, en un entorno de  $x_0$ , están concen-

trados en el nivel de resolución más alto  $j_{max}$  se verifica que los coeficientes wavelet leaders en  $x_0$  son todos iguales en todos los niveles de resolución. En consecuencia la distribución de probabilidades  $P_{x_0}$  es equiprobable y  $S_{f,j_{max}}(x_0)$ , la entropía wavelet leaders puntual del nivel de resolución  $j_{max}$ , alcanza su valor máximo  $\log_2(j_{max})$ . Por el contrario, la entropía wavelet leaders puntual del nivel de resolución  $j_{max}$  es nula si los coeficientes wavelet, en un entorno de  $x_0$ , son nulos o bien si los coeficientes wavelet no nulos sólo están concentrados en el nivel  $j$  más bajo.

## 3.2. Entropía wavelet leaders y exponente Hölder puntual

De un modo heurístico probamos la evolución de este nuevo cuantificador generando dos señales sintéticas a partir de la función generalizada de Weierstrass,

$$F(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^{-kH(x)} \text{sen}(\lambda^k x), \quad (3.14)$$

cuyo exponente Hölder puntual es  $h(F, x) = H(x)$  (ver Sección 2.2). En ambos casos las series de datos generadas tienen  $2^{15}$  datos.

Para calcular la entropía wavelet leaders de señales muestreadas implementamos un algoritmo en MATLAB. Usando una wavelet ortogonal B-spline cúbica de 3 momentos nulos [62] calculamos los coeficientes wavelet de la señal, vía el algoritmo de Mallat [47], para 14 niveles de resolución, considerando a la señal en el nivel más alto de resolución. Luego usando la fórmula (3.13) calculamos los coeficientes wavelet leaders para los niveles  $j = 1, \dots, 14$  y finalmente, mediante la fórmula (3.11), computamos la entropía wavelet leaders puntual  $S_{F,14}(x)$ .

**Ejemplo 3.2.1** Como primer ejemplo generamos una serie de datos a partir de  $F(x)$  de la fórmula (3.14), con

$$H(x) = \frac{1}{4\pi}(x + 2\pi),$$

donde  $x$  toma  $2^{15}$  valores regularmente espaciados del intervalo  $(-2\pi, 2\pi)$ .

En la Figura 3.2 mostramos el gráfico de  $F(x)$ .

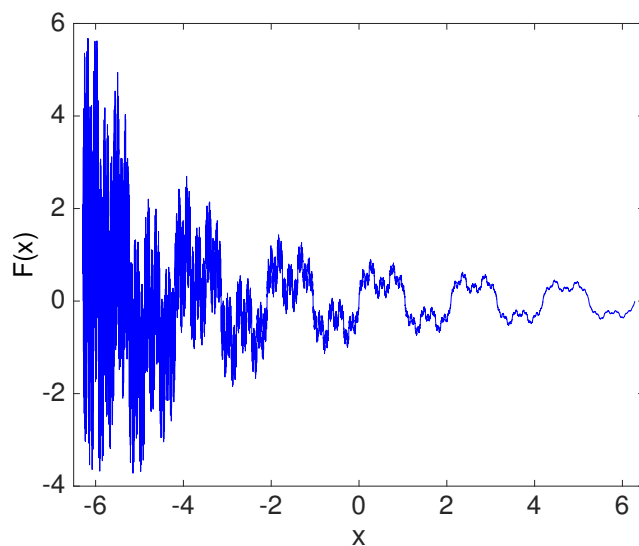


Figura 3.2: Gráfico de  $F(x)$  con  $H(x) = \frac{1}{4\pi}(x + 2\pi)$ .

*En las Figuras 3.3 y 3.4 mostramos la evolución del exponente Hölder puntual  $H(x)$  y de la entropía wavelet leaders puntual  $S_{F,14}(x)$ .*

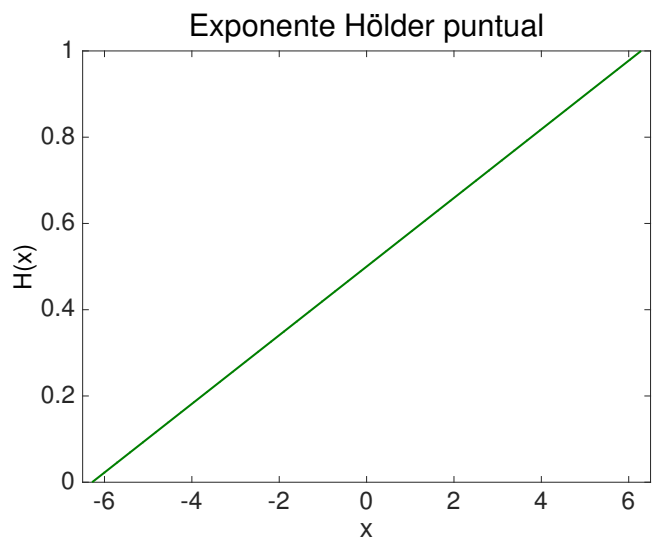


Figura 3.3: Gráfico de la función Hölder puntual  $H(x) = \frac{1}{4\pi}(x + 2\pi)$ .

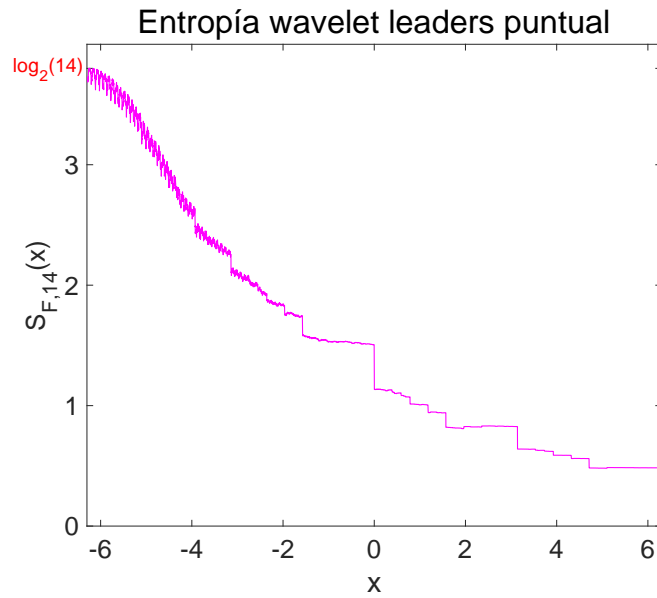


Figura 3.4: Gráfico de la entropía wavelet leaders  $S_{F,14}(x)$ .

**Ejemplo 3.2.2** Como segundo ejemplo generamos una serie de datos a partir de  $F(x)$  de la fórmula (3.14), con

$$H(x) = \frac{2}{100}(49 - x^2),$$

donde  $x$  toma  $2^{15}$  valores regularmente espaciados del intervalo  $(-2\pi, 2\pi)$ . En la Figura 3.5 mostramos el gráfico de  $F(x)$ .

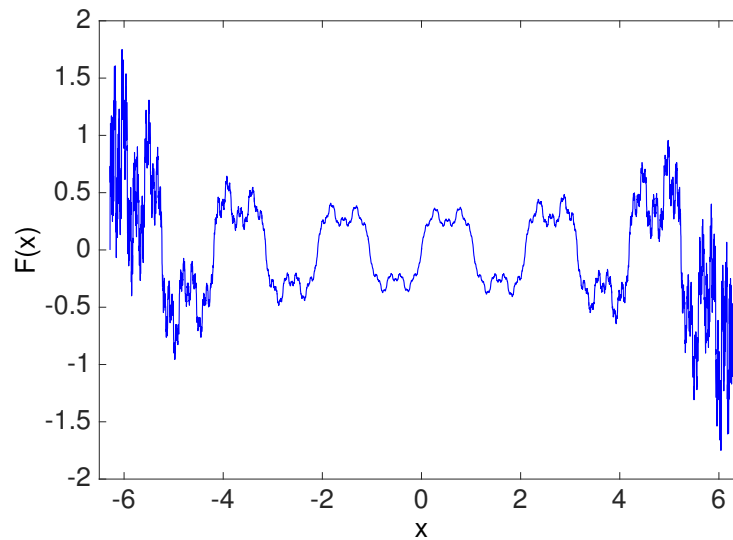


Figura 3.5: Gráfico de  $F(x)$  con  $H(x) = \frac{2}{100}(49 - x^2)$ .

En las Figuras 3.6 y 3.7 mostramos la evolución del exponente Hölder puntual  $H(x)$

y de la entropía wavelet leaders puntual  $S_{F,14}(x)$ .

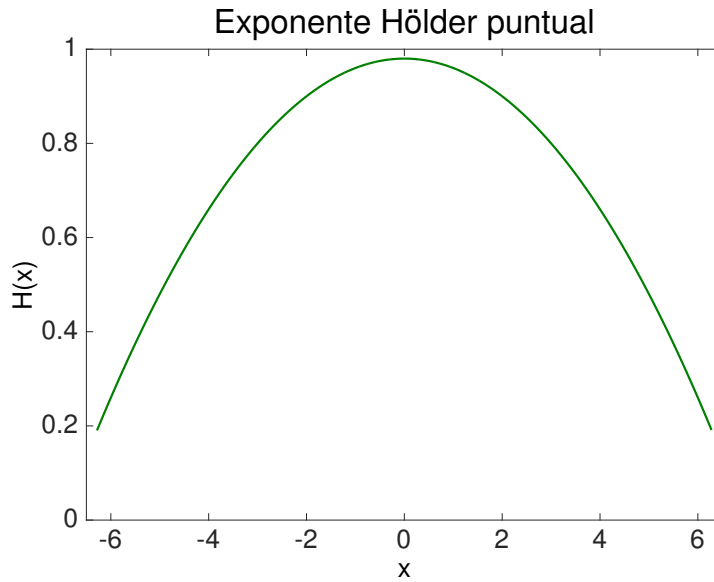


Figura 3.6: Gráfico de la función Hölder puntual  $H(x) = \frac{2}{100}(49 - x^2)$

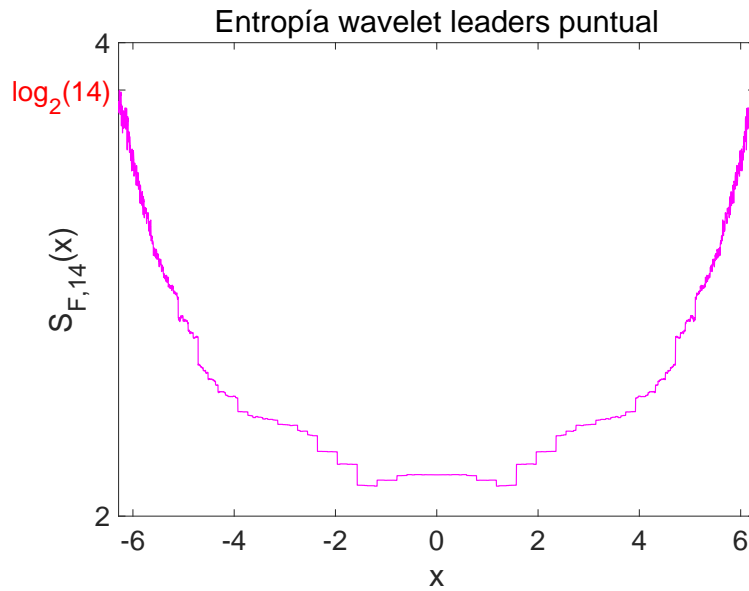


Figura 3.7: Gráfico de la entropía wavelet leaders  $S_{F,14}(x)$ .

En ambos ejemplos podemos observar que la entropía wavelet leaders puntual también revela la evolución de la regularidad de las señales, pero en un sentido inverso respecto del exponente Hölder puntual. Es decir que  $S_{F,14}(x)$  toma valores cercanos a su máximo cuando la señal es muy irregular y toma valores más pequeños cuando la señal es más regular.

Más allá de estos hallazgos probamos que, si  $f$  es uniformemente Hölder (Ver la Definición 2.2.12) y además verifica una condición de regularidad local, existe un nivel de resolución  $m$  tal que la entropía wavelet leaders puntual de una función  $f$  se acerca a su máximo cuando el exponente Hölder es próximo a cero.

**Proposición 3.2.3** Sean  $f \in L^2(\mathbb{R})$  una función acotada,  $H = h(x_0)$  el exponente Hölder puntual de  $f$  en  $x_0 \in \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$  y  $a > 1$ . Si  $f \in C^H(x_0)$  y  $f$  es una función uniformemente Hölder entonces existe un nivel de resolución  $m \in \mathbb{N}$ , con  $m = m(x_0)$ , tal que:

$$4^{-(ma-1)h(x_0)} \log_2 \left( m 4^{-(ma-1)h(x_0)} \right) \leq S_{f,m}(x_0) \quad (3.15)$$

Más aún, se pueden seleccionar infinitos niveles de resolución  $m$  tal que se verifica (3.15).

**Observación 3.2.4** La presencia de la constante  $a$  en la desigualdad de (3.15) se debe a un requerimiento técnico de la prueba de la Proposición 3.2.3.

**Demostración.** Sea  $m$  un número natural arbitrario. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el coeficiente wavelet leader  $d_m(x_0)$  es positivo.

Por definición la sucesión  $(d_i(x_0))_{i \in \mathbb{N}}$  es decreciente, por lo tanto la distribución de probabilidades  $P_{x_0}$  definida en (3.10) verifica

$$1 > \rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_m.$$

En consecuencia

$$m \rho_m \log_2 \left( \frac{1}{\rho_1} \right) \leq \sum_{i=1}^m \rho_i \log_2 \left( \frac{1}{\rho_i} \right) = S_{f,m}(x_0). \quad (3.16)$$

Usando la fórmula (3.10), obtenemos

$$m \rho_m \log_2 \left( \frac{1}{\rho_1} \right) = m \frac{d_m^2(x_0)}{\sum_{j=1}^m d_j^2(x_0)} \log_2 \left( \frac{\sum_{j=1}^m d_j^2(x_0)}{d_1^2(x_0)} \right). \quad (3.17)$$

Además, como  $m d_m^2(x_0) \leq \sum_{j=1}^m d_j^2(x_0) \leq m d_1^2(x_0)$ , tenemos que

$$\frac{d_m^2(x_0)}{d_1^2(x_0)} \log_2 \left( m \frac{d_m^2(x_0)}{d_1^2(x_0)} \right) \leq m \rho_m \log_2 \left( \frac{1}{\rho_1} \right), \quad (3.18)$$

es decir que (3.16) se reformula como,

$$\left( \frac{d_m(x_0)}{d_1(x_0)} \right)^2 \log_2 \left( m \left( \frac{d_m(x_0)}{d_1(x_0)} \right)^2 \right) \leq S_{f,m}(x_0). \quad (3.19)$$



Si  $f \in C^H(x_0)$ , a partir del Teorema 2.2.19, existe  $C > 0$  tal que  $d_j(x_0) \leq C 2^{-jH}$  para todo  $j > 0$ .

Por otro lado, dado que  $f$  es uniformemente Hölder, en virtud del Teorema 2.2.19, se puede calcular  $h(x_0) = H$  usando

$$H = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(d_j(x_0))}{\log(2^{-j})},$$

lo cual implica que para  $a > 1$  existe una cantidad infinita de niveles  $j$  tales que

$$C 2^{-jaH} \leq d_j(x_0). \quad (3.20)$$

Eligiendo  $m$  como uno de los  $j$  que verifica esta última desigualdad tenemos

$$C 2^{-maH} \leq d_m(x_0),$$

más aún,  $C 2^{-maH} \leq d_m(x_0) \leq C 2^{-mH}$ . Además también se verifica que  $d_1(x_0) \leq C 2^{-H}$ , con lo cual, acotando inferiormente en la desigualdad (3.19), obtenemos

$$\left( \frac{C 2^{-maH}}{C 2^{-H}} \right)^2 \log_2 \left( m \left( \frac{C 2^{-maH}}{C 2^{-H}} \right)^2 \right) \leq \left( \frac{d_m(x_0)}{d_1(x_0)} \right)^2 \log_2 \left( m \left( \frac{d_m(x_0)}{d_1(x_0)} \right)^2 \right). \quad (3.21)$$

Computando  $\left( \frac{C 2^{-maH}}{C 2^{-H}} \right)^2 \log_2 \left( m \left( \frac{C 2^{-maH}}{C 2^{-H}} \right)^2 \right)$  y usando la desigualdad de (3.19) resulta que

$$4^{-(ma-1)H} \log_2 (m 4^{-(ma-1)H}) \leq S_{f,m}(x_0).$$

■

**Observación 3.2.5** Como consecuencia de la Proposición 3.2.3, si existe  $m$  tal que se verifica la desigualdad (3.15) y  $h(x_0)$  es próximo a cero (por ejemplo  $h(x_0) \ll \frac{1}{20(ma-1)}$ ),  $S_{f,m}(x_0)$  toma un valor cercano a su máximo.

**Observación 3.2.6** En las señales generadas a partir de la función de Weierstrass, con exponente Hölder puntual predeterminado, observamos que además hay una relación inversa entre ambos cuantificadores. Es decir que cuando el exponente Hölder se aproxima a su máximo valor la entropía leaders se acerca a su valor mínimo. La proposición 3.2.3 no nos permite deducir esto. Sin embargo, si consideramos que los coeficientes wavelet de estas señales verifican la ley de potencias

$$d_i(x_0) = C 2^{-iH} \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

con  $C > 0$  y  $m$  el máximo nivel de resolución de la señal muestreada, podemos calcular  $S_{f,m}(x_0) = \sum_{i=1}^m \rho_i \log_2 \left( \frac{1}{\rho_i} \right)$ .

Usando la definición de  $\rho_i$ , dada en (3.10), tenemos,

$$\begin{aligned}
S_{f,m}(x_0) &= \sum_{i=1}^m \frac{d_i(x_0)^2}{\sum_{j=1}^m d_j(x_0)^2} \log_2 \left( \frac{\sum_{j=1}^m d_j(x_0)^2}{d_i(x_0)^2} \right) \\
&= \sum_{i=1}^m \frac{d_i(x_0)^2}{\sum_{j=1}^m d_j(x_0)^2} \left( \log_2 \left( \sum_{j=1}^m d_j(x_0)^2 \right) - \log_2(d_i(x_0)^2) \right) \\
&= \log_2 \left( \sum_{j=1}^m d_j(x_0)^2 \right) - \frac{1}{\sum_{j=1}^m d_j(x_0)^2} \sum_{i=1}^m d_i(x_0)^2 \log_2(d_i(x_0)^2).
\end{aligned}$$

Reemplazando  $d_i(x_0) = C 2^{-iH}$ ,  $\forall i = 1, \dots, m$ , tenemos

$$\begin{aligned}
S_{f,m}(x_0) &= \log_2(C^2) + \log_2 \left( \sum_{j=1}^m (4^{-H})^j \right) - \frac{1}{\sum_{j=1}^m C^2 (4^{-H})^j} \sum_{i=1}^m C^2 (4^{-H})^j (\log_2(C^2) + \log_2(4^{-Hi})) \\
&= \log_2 \left( \sum_{j=1}^m (4^{-H})^j \right) - \frac{1}{\sum_{j=1}^m (4^{-H})^j} \sum_{i=1}^m (4^{-H})^i \log_2(4^{-Hi}) \\
&= \log_2 \left( \sum_{j=1}^m (4^{-H})^j \right) - \frac{1}{\sum_{j=1}^m (4^{-H})^j} \sum_{i=1}^m (4^{-H})^i 2(-H)i.
\end{aligned}$$

Así obtenemos

$$S_{f,m}(x_0) = \log_2 \left( \sum_{j=1}^m (4^{-H})^j \right) + \frac{2H \sum_{i=1}^m i (4^{-H})^i}{\sum_{j=1}^m (4^{-H})^j}. \quad (3.22)$$

En este caso también la entropía wavelet leaders es cercana a su máximo si el exponente Hölder es cercano a cero.

Además, considerando que  $\sum_{i=1}^{+\infty} i (4^{-H})^i$  es convergente pues  $4^{-H} < 1$ , podemos acotar (3.22),

$$\begin{aligned}
S_{f,m}(x_0) &\leq \log_2 \left( \frac{4^{-H}}{1 - 4^{-H}} \right) + 2H \frac{\frac{4^{-H}}{(4^{-H}-1)^2}}{\frac{(4^{-H})^{m+1} - 4^{-H}}{4^{-H}-1}} = \log_2 \left( \frac{4^{-H}}{1 - 4^{-H}} \right) + \frac{2H}{(1 - 4^{-H})(1 - 4^{-Hm})} \\
&\leq -\log_2(1 - 4^{-H}) - 2H + \frac{2H}{(1 - 4^{-H})^2} \\
&\leq -\log_2(1 - 4^{-H}) + 2H \left( \frac{1}{(1 - 4^{-H})^2} - 1 \right).
\end{aligned}$$

En consecuencia,  $S_{f,m}(x_0)$  satisface que

$$S_{f,m}(x_0) \leq -\log_2(1 - 4^{-h(x_0)}) + 2h(x_0)4^{-h(x_0)} \left( \frac{2 - 4^{-h(x_0)}}{(1 - 4^{-h(x_0)})^2} \right). \quad (3.23)$$

En este caso podemos afirmar que la entropía wavelet leaders  $S_{f,m}(x_0)$  toma valores cercanos a cero si el exponente  $h(x_0)$  es suficientemente grande.

**Observación 3.2.7** Por otro lado una pregunta válida es ¿los máximos de  $S_{f,m}(x_0)$  indican irregularidad de la función  $f$ ? No tenemos una respuesta para funciones que verifican las hipótesis de la Proposición 3.2.3. Sin embargo, si consideramos que los coeficientes wavelet de  $f$  cumplen que existe  $C > 0$  tal que

$$d_i(x_0) = C 2^{-iH} \quad \forall i,$$

podemos afirmar que la entropía  $S_{f,m}(x_0)$  es máxima si y sólo si  $H = 0$  pues la distribución de probabilidades  $P_{x_0}$  es equiprobable si y sólo si  $d_i(x_0) = d_j(x_0)$ . Con lo cual, para este caso particular, si la entropía  $S_{f,m}(x_0)$  toma valores cercanos a su máximo valor tenemos que  $h(x_0)$  toma valores cercanos a 0.

### 3.3. Aplicaciones

En esta sección mostramos algunas aplicaciones. En primer lugar aplicamos esta metodología para analizar la serie de datos del índice financiero "Dow Jones Industrial Average", registrados en el período 1928-2011.

En segundo lugar mostramos una aplicación a series de datos de electroencefalogramas (EEG) registrados durante crisis epilépticas. Además, en este último caso, comparamos nuestros resultados con los obtenidos aplicando la entropía wavelet definida en [19, 10, 60].

#### 3.3.1. Análisis de señales de datos financieros

Existen evidencias empíricas de que las señales provenientes de los mercados financieros siguen leyes de escala y poseen estructuras autosimilares [49]. En los últimos años se desarrollaron modelos multifractales a fin de estudiar la dinámica de los mercados financieros y cuantificar su ineficiencia.

Con esta perspectiva, analizamos la dinámica del índice bursátil Promedio Industrial Dow Jones (DJIA) mediante la entropía wavelet leaders puntual, como un método alternativo para analizar su regularidad local. El índice bursátil DJIA es el precio promedio de las acciones de 30 empresas líderes de Estados Unidos de América. Desde 1928 se comenzó a calcular el índice a partir de los precios de las acciones de 30 empresas del sector industrial. En la actualidad el índice se compone de los precios de las acciones de diversos tipos de empresas líderes (compañías financieras, de informática, de alimentos, etc) además de las del sector industrial.

La serie de datos que analizamos es un promedio del registro diario más bajo y más alto del Dow Jones, desde el 1 de octubre de 1928 hasta el 12 de mayo de 2011, con un

total de 20719 datos, registrados en la base de datos de la compañía CME Group Index Services (<http://www.djindexes.com>). La Figura 3.8 muestra la evolución temporal del índice.

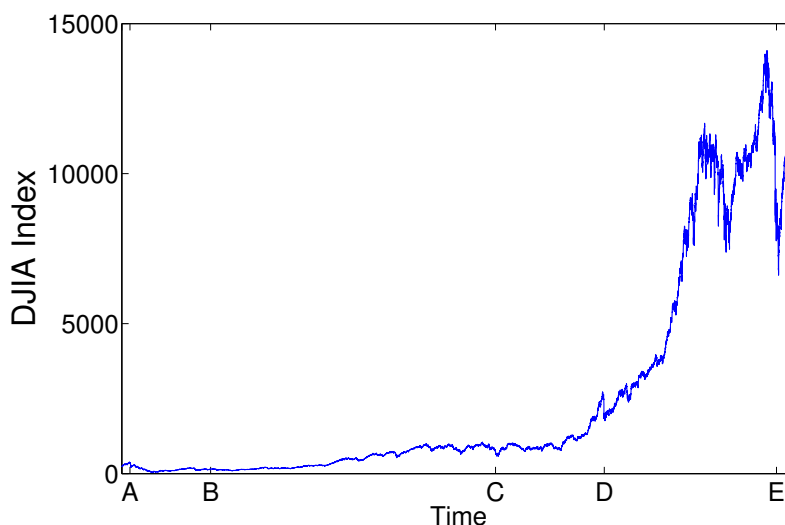


Figura 3.8: Evolución Temporal del DJIA. (A) 1-10-1929 (B) 1-9-1939 (C) 15-8-1974 (D) 3-11-1987 (E) 2-9-2008.

En la Figura 3.8 se identifican algunos eventos históricos de crisis financieras durante el período 1928-2011, tales como: (A) La caída del mercado financiero de Estados Unidos en 1929, (B) El comienzo de la segunda guerra mundial, (C) El estallido de la crisis del petróleo en 1973, (D) La crisis financiera de 1987, que comenzó en octubre de 1987 en Hong Kong y afectó a los mercados de Europa y Estados Unidos, (E) La crisis financiera global del año 2008.

Si  $x(t)$  es el valor del índice DJIA en el tiempo  $t$ , consideramos la serie de los retornos logarítmicos del índice bursátil  $rt(t) = \ln(x(t+1)/x(t))$ , con 20718 datos. En finanzas se utiliza la tasa logarítmica de variación para analizar la rentabilidad de un índice bursátil; una de sus ventajas es que la tasa logarítmica de variación de un precio entre  $t = M$  y en  $t = 1$  se puede computar con los retornos logarítmicos de los tiempos  $t = 1 \dots, M - 1$ , es decir

$$\ln(x(M)/x(1)) = rt(M - 1) + \dots + rt(1).$$

Para calcular la entropía wavelet leaders de los retornos logarítmicos implementamos un algoritmo en MATLAB, utilizando una wavelet madre  $\psi$  ortogonal B-spline cúbica de 3 momentos nulos [62]. Como  $14 < \log_2(20718) < 15$  utilizamos 14 niveles de resolución, considerando a la señal en el nivel más alto de resolución. Luego usando la fórmula (3.13) calculamos los coeficientes wavelet leaders para los niveles  $j = 1, \dots, 14$  y finalmente, mediante la fórmula (3.11), computamos la entropía wavelet leaders puntual  $S_{rt,14}(t)$ .

La figura 3.9 muestra la evolución de  $S_{rt,14}(t)$ .

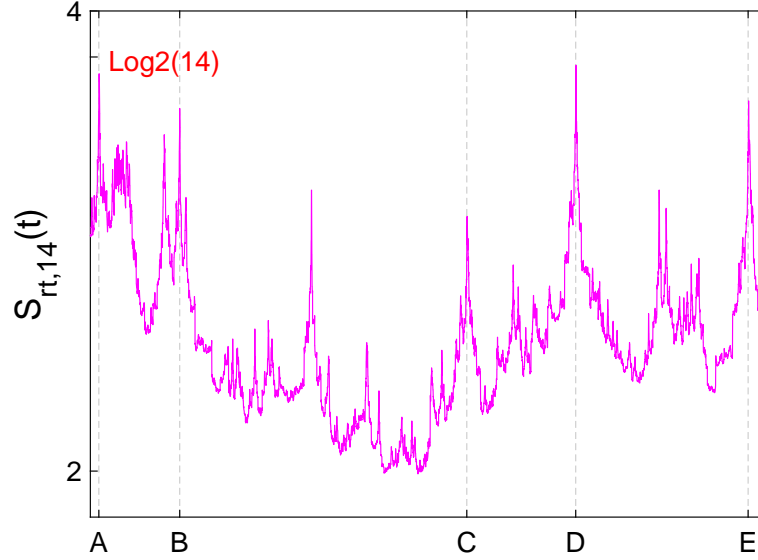


Figura 3.9: Evolución de la entropía wavelet leaders puntual  $S_{rt,14}(t)$ . (A) 1-10-1929 (B) 1-9-1939 (C) 15-8-1974 (D) 3-11-1987 (E) 2-9-2008.

Observando las Figuras 3.8 y 3.9, podemos concluir que la variación de la regularidad no se relaciona con la magnitud del precio del índice. También se puede observar que la entropía wavelet leaders puntual  $S_{rt,14}(t)$  capta los eventos de crisis financieras indicados en (A), (B), (D) y (E)), donde la entropía toma valores muy cercanos a  $\log_2(14)$ . El evento (C) no se detecta tan claramente; si bien  $S_{rt,14}(t)$  alcanza un máximo local en (C) su valor no es tan cercano al máximo absoluto de  $S_{rt,14}(t)$ .

De acuerdo a la teoría de la información la entropía es máxima si hay incerteza. En este contexto se podría interpretar que los eventos en los que se alcanzan valores cercanos al máximo absoluto de  $S_{rt,14}(t)$  serían indicadores de la inestabilidad del mercado financiero.

La fórmula

$$h(x_0) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(d_j(x_0))}{\log(2^{-j})}, \quad (3.24)$$

del Teorema 2.2.19, permite calcular el exponente Hölder puntual siempre que la señal  $f$  sea uniformemente Hölder.

En señales muestreadas no se puede calcular exactamente el límite inferior que caracteriza al exponente Hölder puntual. Sin embargo, podemos estimar el exponente Hölder puntual suponiendo que, para  $j = 1, \dots, 14$ , los coeficientes wavelet leaders

verifican

$$\log(d_j(x_0)) \approx \log(C) + h(rt, x_0) \log(2^{-j}),$$

donde  $h(rt, x_0)$  es el exponente Hölder puntual de  $rt$  en  $t = x_0$ . Ajustando los datos  $(\log(2^{-j}), \log(d_j(x_0)))$  mediante una regresión lineal podemos estimar  $h(rt, x_0)$ . En [45] se pueden consultar otras metodologías para estimar el exponente Hölder puntual en señales e imágenes.

La Figura 3.10 muestra la evolución del exponente Hölder  $h(rt, t)$  estimado en cada  $t$ . En este caso también se puede observar que los eventos de crisis financieras indicados en (A), (B), (D) y (E) son los más cercanos a cero, mientras que en (C) hay un mínimo local que también es similar a otros mínimos locales. Los gráficos de ambos cuantificadores son similares, aunque en el de la entropía los picos máximos están más diferenciados. La Figura 3.10 muestra una mayor oscilación de los valores del exponente Hölder puntual, lo cual hace que los mínimos no se destaquen del resto con claridad.

En ambos gráficos se observan otros mínimos y máximos locales que podrían indicar irregularidad de la señal, aunque no encontramos relación con algún hecho histórico o de crisis relevante.

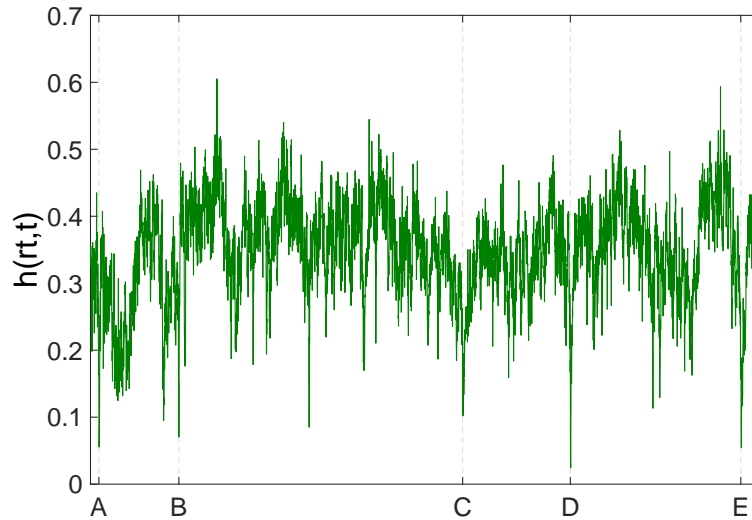


Figura 3.10: Estimación de la evolución del exponente Hölder puntual  $h(rt, t)$ . (A) 1-10-1929 (B) 1-9-1939 (C) 15-8-1974 (D) 3-11-1987 (E) 2-9-2008.

### 3.3.2. Análisis de señales biomédicas

El electroencefalograma (EEG) es una de las técnicas más antiguas utilizadas por la neurofisiología clínica para conocer características del cerebro. Aunque el uso del EEG tiene más de 50 años los neurofisiólogos se basan en la observación visual de

reconocimiento de patrones para analizar distintas patologías. Si bien esta metodología es útil, la inspección visual del EEG puede ser subjetiva y difícil de sistematizar.

A fin de superar estos obstáculos se han propuestos distintas metodologías, desde la perspectiva de la física estadística, para hacer un análisis cuantitativo del EEG. Para ampliar este tópico ver [58] y sus referencias.

Con este enfoque analizamos señales de EEG, registrados durante una convulsión epiléptica tónico-clónica, utilizando la entropía wavelet leaders puntual.

Las convulsiones epilépticas son síntomas de una disfunción cerebral producida por una descarga eléctrica de un grupo de neuronas localizadas en la corteza cerebral. Las convulsiones epilépticas clasificados como “crisis epilépticas generalizadas secundarias” generalmente comienzan con descargas neuronales anormales y localizadas, capaces de propagarse al resto de las células cerebrales y conducir a un ataque epiléptico tónico-clónico. Duran aproximadamente de 1 a 2 minutos y comienzan con la pérdida de la conciencia del individuo.

Una convulsión epiléptica tónico-clónica se caracteriza por contracciones musculares violentas. Inicialmente se producen espasmos tónicos caracterizados por rigidez muscular los cuales se reemplazan por movimientos y espasmos rítmicos característicos de la fase clónica.

Después de un período corto, de 1 a 3 s, se da una fase de reclutamiento de neuronas vecinas y propagación de la crisis. En esta fase la frecuencia del EEG es de 10  $Hz$  y rápidamente aumenta la magnitud de la señal.

Aproximadamente 10 s después del inicio de la crisis, se observan frecuencias bajas (de 0,5 – 3,5  $Hz$ ) que gradualmente disminuyen su actividad. La actividad clónica se corresponde con ráfagas de picos generalizados en cada sacudida mioclónica. Luego, comienza un aumento gradual de la frecuencia de la señal (3,5 – 7,5  $Hz$ ) y (7,5 – 12,5  $Hz$ ), que indican el final de la convulsión.

Analizamos varias señales de EEG registradas durante crisis epilépticas de diferentes pacientes. En este trabajo exhibimos los resultados obtenidos para una señal representativa de los hallazgos encontrados. La señal seleccionada corresponde al registro del EEG de una paciente de 39 años de edad, con diagnóstico de epilepsia resistente a fármacos. La fuente de localización de la convulsión es el lóbulo temporal [61]. Se analiza el registro correspondiente al electrodo ubicado en la localización central derecha de la cabeza (canal C4), sobre el cuero cabelludo.

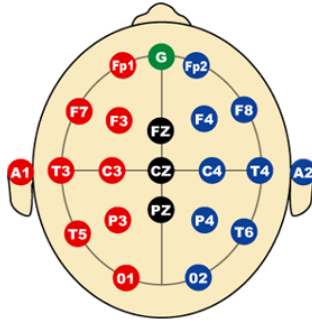


Figura 3.11: Esquema de la ubicación de los electrodos durante el registro de EEG.

Se elige analizar este canal porque tiene una cantidad mínima de artefactos, de acuerdo con lo observado por el equipo de médicos, después de la inspección visual de los registros de EEG (Ver [61] para más detalles técnicos).

El EEG incluye 60  $s$  previos al comienzo del ataque epiléptico y 120  $s$  de crisis y fases posteriores. Las diferentes fases de la crisis fueron determinadas por médicos especialistas. La frecuencia de muestreo de la señal es de  $\omega_s = 102,4 \text{ Hz}$ , con un total de  $N = 18432$  datos. En consecuencia  $j_{max} = 14$  y las frecuencias están limitadas por  $2^{j-j_{max}-2}\omega_s \leq |\omega| \leq 2^{j-j_{max}-1}\omega_s$ .

La Figura 3.12 muestra el registro del EEG. La señal tiene una amplitud de  $50 \mu\text{V}$  antes de la crisis epiléptica. El ataque epiléptico comienza en  $\mathbf{T1} = 80 \text{ s}$ , con una “descarga” de ondas lentas superpuestas por ondas rápidas con menor amplitud. Esta descarga dura  $\sim 8 \text{ s}$  y tiene una amplitud media de  $100 \mu\text{V}$ . Luego la crisis se propaga, lo cual complica el análisis del EEG debido a los artefactos musculares. Sin embargo, es posible establecer el comienzo de la fase clónica, alrededor de  $\mathbf{T2} = 125 \text{ s}$ , y el final de la crisis epiléptica en  $\mathbf{TF} = 155 \text{ s}$ , donde se observa una disminución abrupta de la amplitud de la señal. El inicio y finalización del ritmo de reclutamiento epiléptico, se estima en  $\mathbf{T1} \sim 75 \text{ s}$  y  $\mathbf{T3} \sim 110 \text{ s}$ , respectivamente.

A fin de eliminar los artefactos producidos por los movimientos musculares, que se asocian a los niveles de resolución más alto, se filtra la señal mediante la transformada wavelet. En la Figura 3.13 mostramos la señal EEG filtrada.



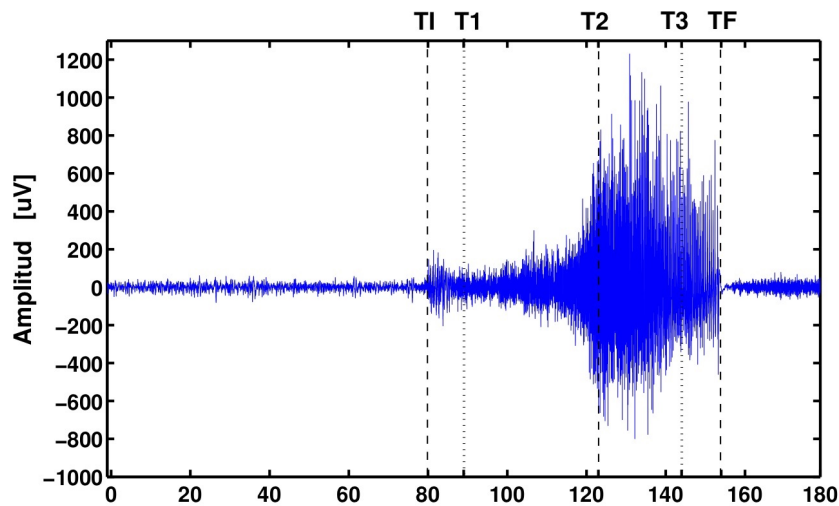


Figura 3.12: Señal del EEG registrada desde la ubicación central derecha (canal C4), durante una crisis epiléptica. Las líneas verticales marcan las siguientes transiciones: La crisis comienza en  $\mathbf{TI} = 80$  s y la fase clónica en  $\mathbf{T2} = 125$  s. La crisis termina en  $\mathbf{TF} = 155$  s. La transición de la etapa tónica (rigidez) a la etapa clónica (convulsiones) es alrededor de  $\mathbf{T2} = 125$  s y no es claramente discernible.  $\mathbf{T1} = 90$  s y  $\mathbf{T3} = 145$  s marcan el comienzo y el final del ritmo de reclutamiento epiléptico.

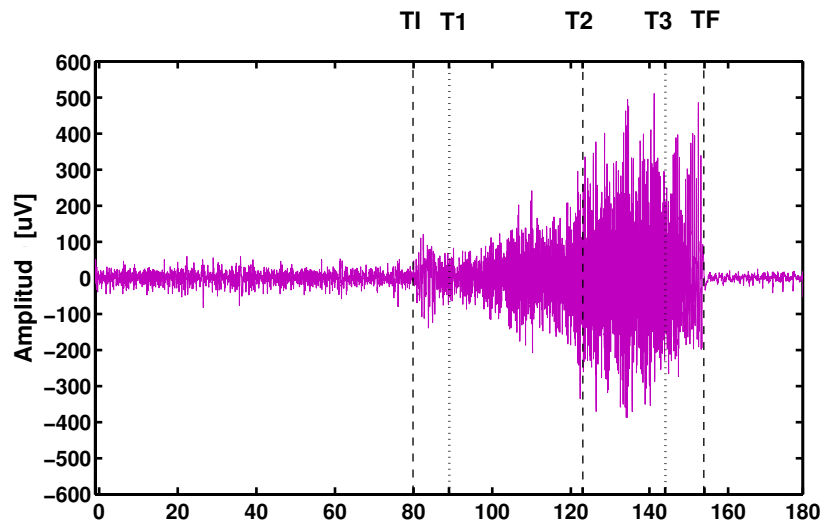


Figura 3.13: Señal filtrada, reconstruida con los niveles de resolución  $j = 9$  a  $j = 12$ , del EEG registrado durante una crisis epiléptica, grabada en la ubicación central derecha, canal C4. Las líneas verticales marcan las siguientes transiciones: La crisis comienza en  $\mathbf{TI} = 80$  s y la fase clónica en  $\mathbf{T2} = 125$  s. La crisis termina en  $\mathbf{TF} = 155$  s. La transición de la etapa tónica (rigidez) a la etapa clónica (convulsiones) es alrededor de  $\mathbf{T2} = 125$  s y no es claramente discernible.  $\mathbf{T1} = 90$  s y  $\mathbf{T3} = 145$  s marcan el comienzo y el final del ritmo de reclutamiento epiléptico.

Se reconstruye la señal limitando la reconstrucción a los niveles desde  $j = 9$  a  $j = 12$  que se asocian a las frecuencias medias y bajas ( $0,8-12,8 Hz$ ). Aunque la reconstrucción de la señal se hace para los niveles de resolución desde  $j = 9$  a  $j = 12$  estimamos los coeficientes wavelet leaders de la señal filtrada desde  $j = 1$  a  $j = 12$ , ya que considerar sólo unos pocos niveles de resolución no revela la regularidad.

En este caso también implementamos un algoritmo en MATLAB, utilizando una wavelet madre  $\psi$  ortogonal B-spline cúbica de 3 momentos nulos [62]. Mediante la fórmula (3.13) calculamos los coeficientes wavelet leaders para los niveles  $j = 1, \dots, 12$  y finalmente usamos la fórmula (3.11) para computar  $S_{EEG,12}(t)$ , la entropía wavelet leaders puntual de la señal filtrada del nivel de resolución 12. La figura 3.14 muestra la evolución de  $S_{EEG,12}(t)$ .

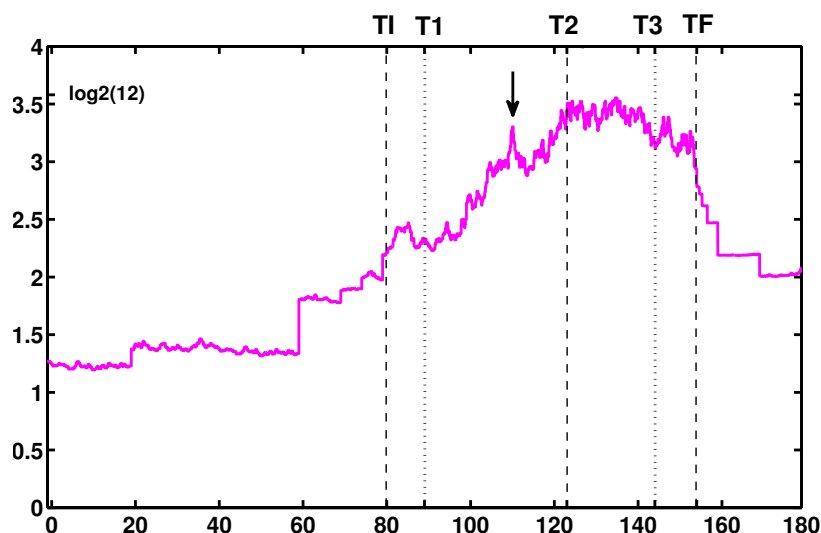


Figura 3.14: Evolución de  $S_{EEG,12}(t)$ , la entropía wavelet leaders (del nivel de resolución 12) calculada a la señal EEG filtrada. Las líneas verticales marcan las siguientes transiciones: La crisis comienza en  $\mathbf{T1} = 80 s$  y la fase clónica en  $\mathbf{T2} = 125 s$ . La crisis termina en  $\mathbf{TF} = 155 s$ . La transición de la etapa tónica (rigidez) a la etapa clónica (convulsiones) es alrededor de  $\mathbf{T2} = 125 s$ .  $\mathbf{T1} = 90 s$  y  $\mathbf{T3} = 145 s$  marcan el comienzo y el final del ritmo de reclutamiento epiléptico.

Se puede observar un incremento de la entropía wavelet leaders durante la crisis epiléptica, con máximos valores entre  $\mathbf{T2}$  y  $\mathbf{T3}$ , lo cual estaría asociado a la máxima irregularidad de la señal. En los segundos previos a la crisis (de 0 a 80 s) se puede observar un salto de la entropía wavelet leaders alrededor de los 60 s. Alrededor de los 85 s hay un máximo local y a partir de los  $\sim 90 s$  la entropía wavelet leaders crece en forma sostenida. Aproximadamente a los  $\sim 115 s$  hay un máximo local que podría anticipar el final de la fase tónica. También, hacia el final de la crisis, hay una caída

abrupta en  $\sim 155$  s que se puede asociar al final de la crisis epiléptica.

Al igual que en la sección anterior podemos suponer que el exponente Hölder puntual de la señal en  $t$  sigue la ley:

$$\log(d_j(t)) \approx \log(C) + h(EEG, t) \log(2^{-j}),$$

para  $j = 1, \dots, 12$ . Usando una regresión lineal estimamos el exponente Hölder puntual de la señal EEG filtrada. La figura 3.15 muestra la evolución de  $h(EEG, t)$ , el exponente Hölder puntual de la señal EEG filtrada.

Podemos observar que el exponente Hölder puntual estimado no distingue el fenómeno con precisión. El exponente Hölder puntual estimado toma valores concentrados en el intervalo  $[0,20,0,50]$  en los primeros 60 s antes del comienzo de la crisis epiléptica, sin embargo también toma estos valores durante la crisis. La entropía wavelet leaders revela con más precisión el fenómeno.

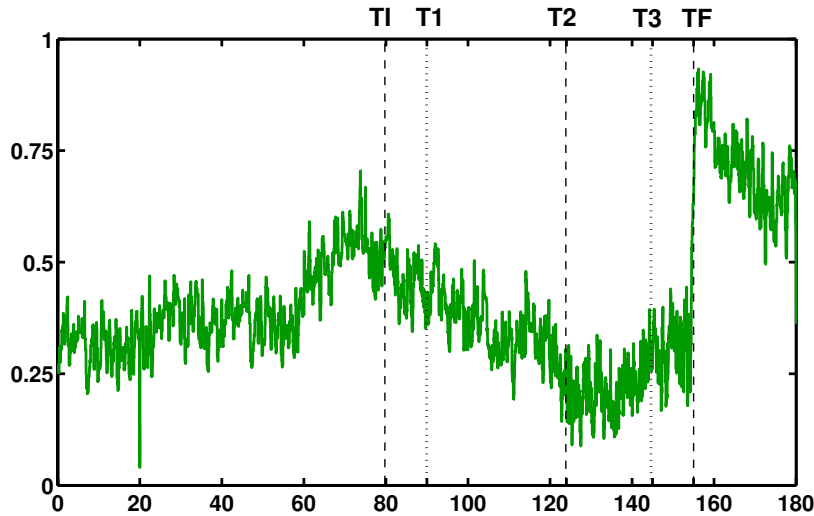


Figura 3.15: Evolución de  $h(EEG, t)$ , el exponente Hölder puntual estimado de la señal EEG filtrada. Las líneas verticales marcan las siguientes transiciones: La crisis comienza en **T1** = 80 s y la fase clónica en **T2** = 125 s. La crisis termina en **TF** = 155 s. La transición de la etapa tónica (rigidez) a la etapa clónica (convulsiones) es alrededor de **T2** = 125 s. **T1** = 90 s y **T3** = 145 s marcan el comienzo y el final del ritmo de reclutamiento epiléptico.

### Comparación con la entropía wavelet

En este apartado hacemos una comparación de los resultados obtenidos del análisis de la señal EEG usando la entropía wavelet leaders puntual versus los resultados obtenidos usando la entropía wavelet, definida en [19, 10, 60, 61], que considera los

coeficientes wavelet en lugar de los coeficientes wavelet leaders. En [61] se analiza la señal EEG filtrada mediante la entropía wavelet (de la fórmula (3.7)) normalizada, es decir

$$\frac{S(P^{(w)})}{\log_2(12)}.$$

Este cuantificador se aplica a ventanas temporales de longitud  $L = 2.5$  s cada una ( $N = 256$  datos) y se asigna cada resultado obtenido al punto medio de la ventana temporal. La Figura 3.16 muestra la evolución de la entropía wavelet normalizada.

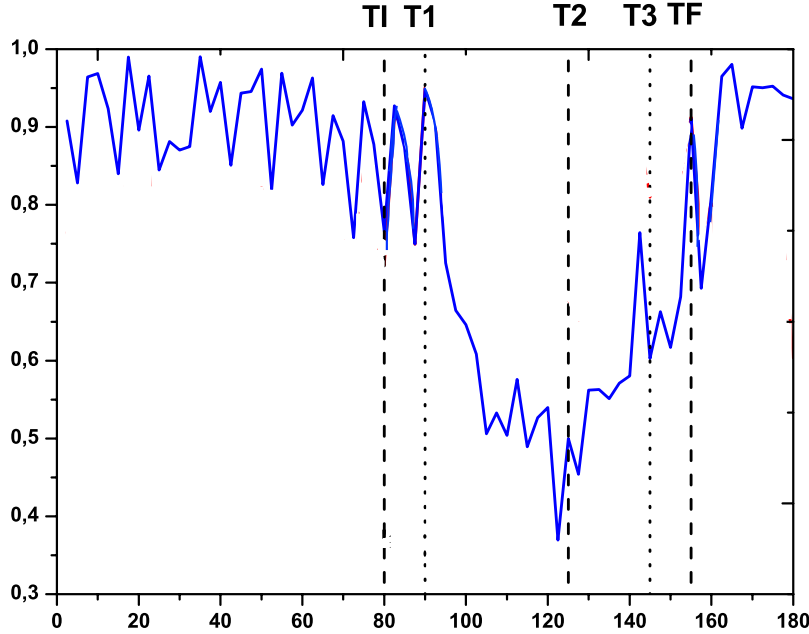


Figura 3.16: Evolución de la entropía wavelet normalizada de la señal EEG filtrada. Las líneas verticales marcan las siguientes transiciones: La crisis comienza en  $\mathbf{T1} = 80$  s y la fase clónica en  $\mathbf{T2} = 125$  s. La crisis termina en  $\mathbf{TF} = 155$  s. La transición de la etapa tónica (rigidez) a la etapa clónica (convulsiones) es alrededor de  $\mathbf{T2} = 125$  s.  $\mathbf{T1} = 90$  s y  $\mathbf{T3} = 145$  s marcan el comienzo y el final del ritmo de reclutamiento epiléptico.

La evolución de la entropía wavelet normalizada resulta más compatible con la del exponente Hölder puntual estimado. O. Rosso et. al. [61] interpretan a la entropía wavelet en términos del orden o desorden del sistema, asociando a las entropías altas con un grado de desorden alto y las entropías bajas con un sistema más ordenado.

Después del comienzo de la crisis hay un incremento en el grado de desorden del sistema que podría estar inducida por las altas frecuencias de EEG. El sistema se vuelve más ordenado cuando las frecuencias de la señal EEG están entre las medias y bajas, en particular luego de los  $\mathbf{T1} = 90$  s el sistema es más ordenado y se mantiene esta tendencia hasta  $\mathbf{T3}$ . Este “orden” es compatible con el proceso de sincronización de la actividad cerebral que hay entre  $\mathbf{T1}$  y  $\mathbf{T3}$ . Por otro lado se puede observar que

la entropía wavelet normalizada tiene un mínimo absoluto alrededor de  $\mathbf{T2} = 125$  s, en coincidencia con el comienzo de la fase clónica. El pico observado en  $\mathbf{T3} \cong 145$  s podría asociarse con el fin del ritmo de reclutamiento epiléptico. A partir de los 145 s la entropía wavelet se incrementa hasta  $\mathbf{TF} = 155$  s, el final de la crisis. Los máximos relativos que se observan en  $\sim 145$  s y  $\sim 155$  s podrían estar relacionados con el fin del ritmo de reclutamiento epiléptico y el fin de la crisis epiléptica, respectivamente.

Comparando las Figuras 3.14 y 3.16 podemos observar que ambos cuantificadores captan el fenómeno. La entropía wavelet leaders puntual distingue con más claridad la fase que va desde  $\mathbf{T2}$  a  $\mathbf{T3}$ , mientras que la entropía wavelet capta con más exactitud  $\mathbf{T2}$ , el inicio de la fase clónica.

Por otro lado, la entropía wavelet leaders se computa puntualmente mientras que la entropía wavelet se calcula en ventanas de tiempo no solapadas. Con lo cual la descripción del fenómeno a lo largo del tiempo es más precisa para el cuantificador asociado a los coeficientes wavelet leaders.

En [61] se analiza la eficacia de los cuantificadores wavelet aplicados a la señal EEG sin filtrar, incluyendo a todos los niveles de resolución.

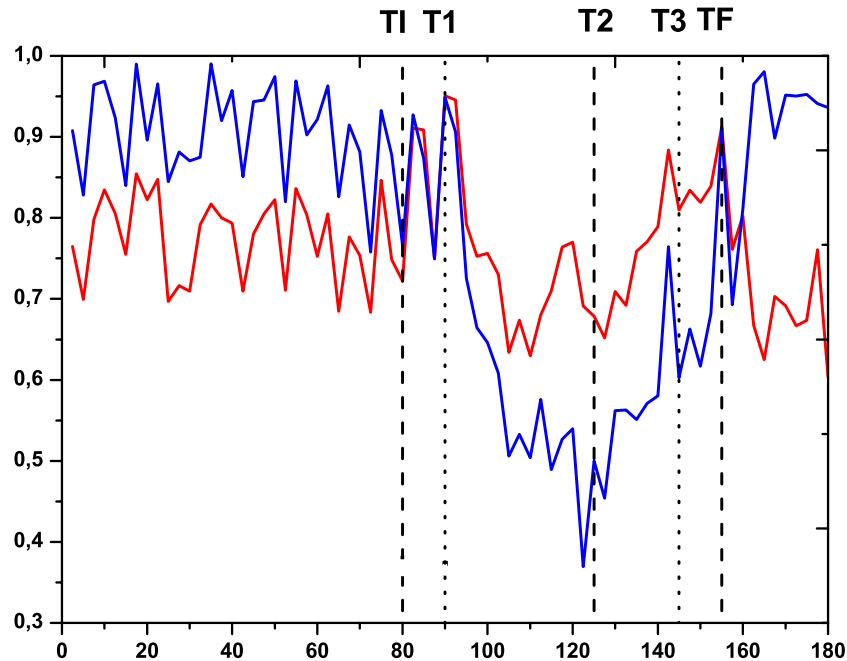


Figura 3.17: En azul se muestra la evolución de la entropía wavelet normalizada de la señal EEG filtrada y en rojo la evolución de la entropía wavelet normalizada de la señal EEG sin filtrar. Las líneas verticales marcan las siguientes transiciones: La crisis comienza en  $\mathbf{TI} = 80$  s y la fase clónica en  $\mathbf{T2} = 125$  s. La crisis termina en  $\mathbf{TF} = 155$  s. La transición de la etapa tónica (rigidez) a la etapa clónica (convulsiones) es alrededor de  $\mathbf{T2} = 125$  s.  $\mathbf{T1} = 90$  s y  $\mathbf{T3} = 145$  s marcan el comienzo y el final del ritmo de reclutamiento epiléptico.

La Figura 3.17 compara la entropía wavelet normalizada aplicada a la señal EEG filtrada vs. la entropía wavelet normalizada de la señal sin filtrar. Se puede notar que la entropía wavelet normalizada de la señal sin filtrar no detecta con claridad el fenómeno.

Sin embargo, cuando computamos la entropía wavelet leaders puntual a la señal EEG sin filtrar, considerando 14 niveles de resolución (Figura 3.18), obtenemos una evolución similar a la de  $S_{EEG,12}(t)$ , la entropía wavelet leaders de la señal filtrada asociada al nivel de resolución 12. Podemos observar estas similitudes comparando las Figuras 3.18 y 3.14.

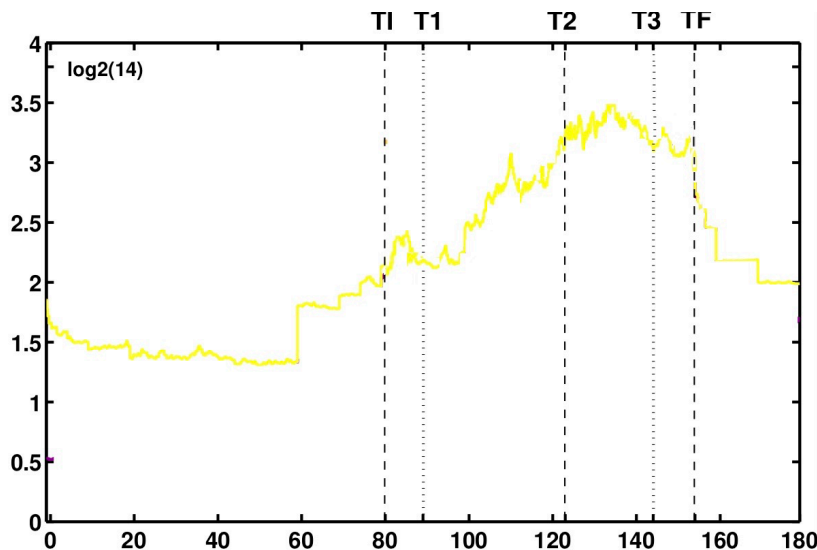


Figura 3.18: Evolución de la entropía wavelet leaders puntual de la señal sin filtrar del nivel de resolución 14. Las líneas verticales marcan las siguientes transiciones: La crisis comienza en  $\mathbf{TI} = 80$  s y la fase clónica en  $\mathbf{T2} = 125$  s. La crisis termina en  $\mathbf{TF} = 155$  s. La transición de la etapa tónica (rigidez) a la etapa clónica (convulsiones) es alrededor de  $\mathbf{T2} = 125$  s.  $\mathbf{T1} = 90$  s y  $\mathbf{T3} = 145$  s marcan el comienzo y el final del ritmo de reclutamiento epiléptico.

### 3.4. Conclusiones

En una primer aproximación al análisis de la regularidad local de señales introducimos la entropía wavelet leaders como una alternativa para analizar la variación de la regularidad de señales. Bajo ciertas hipótesis de regularidad local y global de la función  $f$  demostramos que si el exponente Hölder puntual de  $f$  es próximo a cero existe un nivel de resolución  $m$  tal que la entropía wavelet leaders puntual de  $f$  se acerca a su máximo valor.

Mostramos la evolución del cuantificador en diversas señales muestreadas tales como: señales teóricas generadas a partir de la función de Weierstrass generalizada y

señales registradas durante eventos o fenómenos diversos de la vida real (crisis financieras y crisis epilépticas). En las señales generadas a partir de la función de Weierstrass generalizada se verifica que si el exponente Hölder predeterminado es próximo a cero la entropía wavelet leaders del nivel más alto de resolución se aproxima a su máximo valor. Más aún, la evolución de la entropía wavelet leaders del nivel más alto de resolución se relaciona en forma inversa con su exponente Hölder puntual predeterminado, es decir que también se verifica que si el exponente Hölder se acerca a su máximo la entropía wavelet leaders puntual es próxima a su mínimo.

Esta relación inversa, que observamos en forma heurística, se comprueba teóricamente si los coeficientes wavelet leaders de la señal en  $x_0$  siguen la ley de potencias

$$d_i(x_0) = C 2^{-iH} \quad \forall i = 1, \dots, m,$$

con  $m$  el máximo nivel de resolución y  $H$  el exponente Hölder puntual en  $x_0$ .

Las hipótesis de la Proposición 3.2.3 no garantizan que los coeficientes wavelet verifiquen exactamente la ley de potencias, en consecuencia no podemos asegurar que se cumple una desigualdad similar a la planteada en (3.23). Por lo tanto surgen los siguientes interrogantes: ¿Vale una desigualdad análoga a (3.23) con las hipótesis de la Proposición 3.2.3? ¿Cómo deberíamos reformular las hipótesis de la Proposición 3.2.3 para obtener una desigualdad similar a (3.23)?

En este capítulo también aplicamos nuestro cuantificador para analizar señales reales. En las señales analizadas mostramos que la entropía wavelet leaders puntual detecta los eventos singulares. En particular en la señal de datos financieros, distingue con bastante precisión los eventos de crisis financieras (Figura 3.9). Asimismo, en la señal biomédica registrada durante una crisis epiléptica, el cuantificador es cercano a su máximo entre dos transiciones de la crisis (el comienzo de la fase clónica y el final del reclutamiento neuronal).

Además, en el caso de la señal EEG, comparamos nuestro cuantificador con la entropía wavelet, definida en [19, 10, 60, 61]. Una de las ventajas que tiene la entropía wavelet leaders puntual es que no es necesario filtrar la señal EEG para distinguir el fenómeno (ver las Figuras 3.14 y 3.18). En cambio la entropía wavelet no detecta con claridad el fenómeno si la señal no es filtrada previamente, como puede observarse en la Figura 3.17. En conclusión, si se analizan señales EEG sin filtrar, la entropía basada en los coeficientes wavelet leaders resulta más efectiva; mientras que, si se analizan señales EEG filtradas, nuestro cuantificador complementa la información que da la entropía basada en los coeficientes wavelet.

# Capítulo 4

## Frontera 2-microlocal

### 4.1. Introducción

La caracterización total de una singularidad puntual requiere de varios parámetros. Entre ellos, los exponentes clásicos de regularidad tales como: el *exponente Hölder puntual*, el *exponente Hölder local* [63], los exponentes de *oscilación y chirp* [39], [7] y el exponente de *escala débil* [52], entre otros.

Bajo ciertas condiciones de regularidad global de la función  $f$ , los exponentes clásicos de regularidad pueden extraerse de una curva en  $\mathbb{R}^2$ , cóncava hacia abajo, llamada la frontera 2-microlocal en  $x_0$ . Esta curva se define mediante la pertenencia de  $f$  a ciertos espacios funcionales característicos, los espacios 2-microlocales  $C_{x_0}^{s,s'}$ , con los parámetros  $s, s' \in \mathbb{R}$ .

Los espacios 2-microlocales fueron introducidos por J.M Bony [11] para analizar las propagaciones de las singularidades de las soluciones de ecuaciones hiperbólicas semilineales. Estos espacios se definen como espacios funcionales embebidos en el espacio de distribuciones temperadas  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  y la propiedad fundamental que poseen es que son estables bajo la acción de operadores diferenciales e integrales [11], es decir que

$$f \in C_{x_0}^{s,s'} \iff f^{(n)} \in C_{x_0}^{s-n,s'} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La definición de los espacios funcionales  $C_{x_0}^{s,s'}$  está asociada a condiciones sobre la descomposición de Littlewood-Paley de distribuciones temperadas. En [28], S. Jaffard reformula estas condiciones mediante la transformada wavelet, proporcionando otra caracterización de los espacios 2-microlocales de J.M Bony.

Más precisamente, si  $f$  es una distribución temperada y  $\psi$  una wavelet ortogonal, en el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , se definen los coeficientes wavelet de  $f$  como:

$$c_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad \text{con} \quad \psi_{j,k} = 2^j \psi(2^j x - k) \quad (4.1)$$



Luego, en [28] y sus referencias se prueba el siguiente resultado.

**Teorema 4.1.1** (*S. Jaffard, 1991*)

*Sea  $f$  es una distribución temperada.*

$f \in C_{x_0}^{s,s'}$  si y sólo si existe  $C > 0$  tal que  $|c_{j,k}| \leq C2^{-js} (1 + |k - 2^j x_0|)^{-s'} \forall j, k \in \mathbb{Z}$ .

Sin embargo, para poder analizar el comportamiento local de una función  $f$  en  $x_0$ , no es necesario que  $f$  este definida en infinito. A fin de poder hacer este análisis local en un abierto  $V$  que contiene a  $x_0$ , Y. Meyer y S. Jaffard [39, 52] definen los espacios 2-microlales  $C_{x_0}^{s,s'}$  **locales**, un espacio embebido en el espacio de distribuciones  $\mathcal{D}'(V)$ .

**Definición 4.1.2** Sean  $V$  un abierto que contiene a  $x_0$  y  $f \in \mathcal{D}'(V)$ .  $f$  pertenece al espacio  $C_{x_0}^{s,s'}$  **local** si existe un entorno abierto  $V_0 \subsetneq V$ ,  $x_0 \in V_0$  y  $F \in C_{x_0}^{s,s'}$  **global** tal

$$f = F \text{ en } V_0$$

Por ejemplo, si existe  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $\text{sop}(g) \subset V$ ,  $g = 1$  en  $V_0$  y  $gf \in C_{x_0}^{s,s'}$  **global** obtenemos que  $F = gf$  sirve para este propósito.

La caracterización wavelet del espacio  $C_{x_0}^{s,s'}$  **local** se resume en el siguiente teorema.

**Teorema 4.1.3** (*S. Jaffard e Y. Meyer 1996; Meyer, 1998*)

*Sea  $\psi$  una wavelet con las primeras  $r$  derivadas de rápido decaimiento,  $r \in \mathbb{N}$  y con  $N$  momentos nulos y sean  $s, s' \in \mathbb{R}$  tales que:*

$$r + s + \inf \{s', 1\} > 0 \text{ y } N > \sup \{s, s + s'\}. \quad (4.2)$$

*La función o distribución  $f$  pertenece al espacio 2-microlocal  $C_{x_0}^{s,s'}$  **local** si y sólo si existe una constante  $C > 0$  tal que*

$$|c_{j,k}| \leq C2^{-js} (1 + |k - 2^j x_0|)^{-s'} \quad (4.3)$$

*para todo  $j$  y  $k \in \mathbb{Z}$  tales que  $j \geq 0$  y  $|\frac{k}{2^j} - x_0| < 1$ .*

**Observación 4.1.4** *De aquí en adelante notaremos con  $C_{x_0}^{s,s'}$  al espacio 2-microlocal local que estará caracterizado por la equivalencia del Teorema 4.1.3. Para simplificar consideraremos  $\psi$  en la clase de Schwartz con infinitos momentos nulos, por ejemplo la wavelet de Meyer. En consecuencia se garantizan las condiciones requeridas en (4.2) para todo  $(s, s')$ .*

Por lo tanto, usamos la siguiente definición:

**Definición 4.1.5** Sea  $\psi$  una wavelet en la clase de Schwartz con infinitos momentos nulos. Sea  $f$  función o distribución definida en un entorno de  $x_0$ .

Decimos que  $f$  pertenece al espacio 2-microlocal  $C_{x_0}^{s,s'}$  si y sólo si existe una constante  $C > 0$  tal que

$$|c_{j,k}| \leq C 2^{-js} (1 + |k - 2^j x_0|)^{-s'}, \quad (4.4)$$

para todo  $j$  y  $k \in \mathbb{Z}$  tales que  $j \geq 0$  y  $|\frac{k}{2^j} - x_0| < 1$ .

Cabe destacar que se han dado otras caracterizaciones de los espacios 2-microlocal locales, en el espacio del tiempo, para ciertos conjuntos de pares ordenados  $(s, s')$  [43, 64, 46, 17].

A fin de dar una descripción geométrica del comportamiento singular de una función en  $x_0$  se define el dominio 2-microlocal de  $f$  en  $x_0$  [52], un conjunto convexo definido en el plano  $(s, s')$  por

$$D(f, x_0) = \{(s, s') : f \in C_{x_0}^{s,s'}\}. \quad (4.5)$$

**Definición 4.1.6** La frontera 2-microlocal de  $f$  en  $x_0$  es el borde del conjunto  $D(f, x_0)$ , dado en la fórmula (4.5). Haciendo el cambio de variable  $\sigma = s + s'$  tenemos que, en plano  $(\sigma, s)$ , es la curva cóncava hacia abajo y decreciente determinada por:

$$S(\sigma) = \sup\{s : f \in C_{x_0}^{s,\sigma-s}\}. \quad (4.6)$$

Bajo ciertas condiciones de regularidad global de la función  $f$  (ver Definición 2.2.12) es posible extraer los diversos exponentes de regularidad de la curva  $S(\sigma)$ , obteniendo una descripción completa de la regularidad de  $f$  en  $x_0$  (Ver la Figura 4.1).

**Proposición 4.1.7** (*Y. Meyer, 1998; J. Lévy Véhel y S. Seuret, 2004*)

Si  $S(0) > 0$  y  $f$  es uniformemente Hölder, entonces

- El exponente Hölder puntual en  $x_0$  es  $h(x_0) = S(0)$ .
- El exponente Hölder local en  $x_0$  es  $\alpha_l(x_0) = \sigma$  tal que  $S(\sigma) = \sigma$ .
- El exponente chirp en  $x_0$  es  $\beta_c(x_0)$  es el inverso aditivo de la pendiente de la asíntota a izquierda de la curva  $S(\sigma)$ .
- El exponente de oscilación en  $x_0$  es  $\beta_o(x_0)$  es el inverso aditivo de la pendiente de la recta tangente a izquierda en el punto  $(0, S(0))$ .

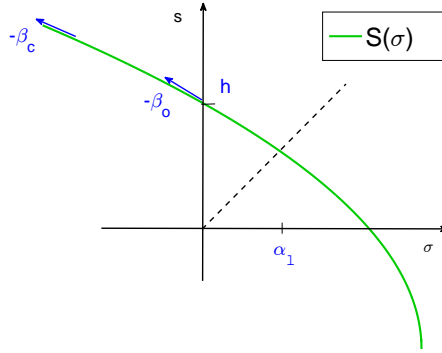


Figura 4.1: Frontera 2-microlocal y exponentes de regularidad.

**Observación 4.1.8** En [52] Y. Meyer estudia el exponente de escala débil en  $x_0$ . Dada  $f$  una función localmente acotada se define este exponente como

$$\beta_w(x_0) = \sup\{s : \exists n \text{ tal que } f^{(-n)} \in C^{s+n}(x_0)\},$$

donde  $f^{(-n)}$  es una primitiva de orden  $n$  de  $f$ . Este exponente también puede extraerse de la curva  $S(\sigma)$  como  $\beta_w(x_0) = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} S(\sigma)$ .

La frontera 2-microlocal otorga una descripción más precisa de la regularidad local de una función  $f$ . Más aún, provee también una herramienta para describir la regularidad local de  $T(f)$ , con  $T$  un operador integro-diferencial. En virtud de estas propiedades, se ha reformulado la noción determinística de frontera 2-microlocal a una versión estocástica. El análisis 2-microlocal estocástico se desarrolla en [25], con el propósito de describir la regularidad de procesos aleatorios. En particular, esta versión estocástica provee una herramienta para analizar la regularidad de martingalas e integrales estocásticas [9], así como también describir las singularidades oscilantes de los procesos de Lévy [8].

En una dirección inversa también es relevante diseñar funciones prototipo con una estructura de singularidades predeterminada. En el Capítulo 2 desarrollamos este tópico y mostramos varios resultados sobre la construcción de estas funciones. En este sentido, los autores de [29, 16] construyen funciones con un predeterminado exponente Hölder puntual, usando diferentes métodos. Por ejemplo, en [16], dada una función  $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  que es límite inferior de una sucesión de funciones continuas se construyen diversas funciones tales que su exponente Hölder puntual es  $h(x)$ . También, en [63], dada una función no negativa e inferiormente semicontinua  $\alpha_l(x)$ , los autores proveen una función cuyo exponente Hölder local es  $\alpha_l(x)$ , para  $x \in \mathbb{R}$ . Asimismo, en [33], se prescriben el exponente Hölder puntual y el exponente chirp. Más precisamente, dadas  $h(x)$  y  $\beta_c(x)$  definidas en el  $[0, 1]$ , funciones no negativas acotadas que son límite inferior de una sucesión de funciones continuas, se construye una función  $f$  tal que  $h(x)$  y  $\beta_c(x)$  son

sus respectivos exponentes Hölder puntual y chirp en cada  $x \in [0, 1] \setminus E$ , para  $E$  un conjunto de medida 0.

Siguiendo esta línea es natural preguntarse si dada una curva  $S(\sigma)$  cóncava hacia abajo y decreciente se puede construir una función o distribución  $f$  tal que la frontera 2-microlocal de  $f$  en  $x_0$  sea  $S(\sigma)$ . Los siguientes artículos dan respuesta a este interrogante y en cada trabajo se construye una función (o distribución)  $f$  cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es  $S(\sigma)$ , definida a través de los coeficientes wavelet de  $f$ .

- En [23] B. Guiheneuf, S. Jaffard y J. Lévy Véhel definen a los coeficientes wavelet de la función (o distribución)  $f$  a partir de una fórmula que depende de  $j, k$  y de  $S(\sigma)$ . Una condición requerida para que la fórmula tenga validez es que la curva frontera 2-microlocal no sea lineal.
- En [52] Y. Meyer construye la función (o distribución)  $f$  asumiendo que la curva frontera 2-microlocal es derivable.
- En [46] J. Lévy Véhel y S. Seuret predeterminan la frontera 2-microlocal en un punto  $x_0$  y también en simultáneo para un conjunto de puntos  $\{(x_0)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , denso y numerable en  $[0, 1]$ . Es decir que, dada una familia de curvas asociada a  $\{(x_0)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , construyen una función tal que la frontera 2-microlocal de cada  $(x_0)_n$  coincide con cada curva de la familia. Para probar este resultado usan la noción de *espectro 2-microlocal*, definida en ese mismo trabajo.

A partir de estos resultados surgen otras preguntas:

1. Las construcciones exhibidas en cada uno de los tres trabajos citados son distintas. Sin embargo, ¿hay alguna característica común en la definición de las funciones (o distribuciones) propuestas en estos trabajos? ¿Se podrían definir mediante una única fórmula genérica?
2. ¿Se pueden caracterizar a todas las funciones o distribuciones tal que  $S(\sigma)$  es su frontera 2-microlocal en  $x_0$  predeterminada?

En esta tesis respondemos estas preguntas. Respondiendo a la primer pregunta, si  $S(\sigma)$  es una función decreciente definida en  $\mathbb{R}$ , que es o bien cóncava hacia abajo, tal que  $S''(\sigma) < 0$ , o bien es lineal, determinamos una fórmula genérica a partir de la cual las distribuciones propuestas en los tres trabajos citados resultan un caso especial (Teorema 4.3.3). Además, nuestra fórmula genérica provee una familia prototipo de funciones o distribuciones con un determinado tipo de singularidad en  $x_0$ , es decir con predeterminada frontera 2-microlocal en  $x_0$ . Respondiendo a la segunda pregunta conseguimos caracterizar en forma completa a las funciones o distribuciones cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es  $S(\sigma)$  para el caso en que  $S(\sigma)$  es lineal (Teorema 4.3.6).

Para este caso enunciaremos condiciones necesarias y suficientes para que una función (o distribución) tenga a  $S(\sigma)$  como frontera 2-microlocal en un punto  $x_0$ .

El punto de partida es la generalización del resultado enunciado en [23], donde se construye una distribución  $f$ , con frontera 2-microlocal predeterminada, a partir de definir a sus coeficientes wavelet  $c_{j,k}$  con la siguiente fórmula:

**Proposición 4.1.9** (*B. Guiheneuf, S Jaffard y J. Lévy Véhel, 1998*)

Sea  $S(\sigma)$  una función cóncava hacia abajo y decreciente definida sobre  $\mathbb{R}$ . Asumimos que  $S(\sigma)$  no es una recta. Entonces los coeficientes

$$c_{j,k} = \inf_{\sigma} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} (1 + |k - 2^j x_0|)^{S(\sigma) - \sigma} \right\} \quad (4.7)$$

definen una distribución  $f$  cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es  $S(\sigma)$ .

La fórmula general que presentamos es una variación de la fórmula propuesta en (4.7). Los coeficientes wavelet  $c_{j,k}$  de la familia prototipo de distribuciones con frontera 2-microlocal predeterminada en  $x_0$ , deben satisfacer:

$$|c_{j,k}| \leq \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1 + |k - 2^j x_0|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma) - \sigma} \right\}, \quad \text{con } \mathcal{C}_{j,k}, \lambda_{j,k} > 0, \quad (4.8)$$

verificándose la **igualdad** si  $(j, k) \in I$ , para  $I$  un conjunto de subíndices predeterminado (4.25), y  $c_{j,k} \neq 0$  para infinitos  $j$ , con  $(j, k) \in I$ . Además las sucesiones  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  satisfacen condiciones específicas (ver Teorema 4.3.3).

Además, en este capítulo mostramos que, seleccionando apropiadamente  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$ , las funciones (o distribuciones) construidas en [23], [52] y [46] son un caso especial de la fórmula genérica propuesta.

## 4.2. Primera generalización del resultado de B. Guiheneuf, S Jaffard y J. Lévy Véhel sobre prescripción de la frontera 2-microlocal

En esta sección mostramos algunos resultados intermedios, los cuales forman parte del proceso que nos llevó a proponer y enunciar los resultados de los Teoremas 4.3.3 y 4.3.6.

Una primera aproximación para generalizar la prescripción de la frontera 2-microlocal es definir una familia prototipo de funciones cuya frontera 2-microlocal en  $x_0 = 0$  sea la función lineal  $S(\sigma) = \alpha + \frac{\gamma}{1-\gamma}(\alpha - \sigma)$ . En estas primeras ideas están las bases para generalizar la prescripción de la frontera 2-microlocal.

**Proposición 4.2.1** Sea la función  $S(\sigma) = \alpha + \frac{\gamma}{1-\gamma}(\alpha - \sigma)$  con  $\alpha > 0$ ,  $0 \leq \gamma < 1$ . Sean  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  sucesiones positivas tales que, para todo  $k_j$  tal que  $|k_j| < 2^j$ :

$$\blacksquare \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = 0 \quad y \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} = 0.$$

Entonces los coeficientes  $c_{j,k}$ , tales que

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} 2^{-j\alpha}, \quad \text{para } j, k : j \geq 0 \text{ y } 1 + |k| = \lambda_{j,k} 2^{j\gamma},$$

y todos los demás coeficientes nulos, definen una función  $f$  cuya frontera 2-microlocal en  $x_0 = 0$  es  $S(\sigma)$ . Con lo cual:

- Los coeficientes de regularidad Hölder, local y puntual, de  $f$  en  $x_0 = 0$  son, respectivamente,

$$\alpha_l(0) = \alpha, \tag{4.9}$$

$$y \quad h(0) = \frac{\alpha}{(1-\gamma)}. \tag{4.10}$$

- Los exponentes de oscilación y chirp de  $f$  son

$$\beta_o(0) = \beta_c(0) = \frac{h(0) - \alpha_l(0)}{\alpha_l(0)}. \tag{4.11}$$

### Demostración.

Consideremos  $(\sigma_0, s_0)$  un punto de la recta de ecuación

$$S(\sigma) = \alpha + \frac{\gamma}{1-\gamma}(\alpha - \sigma).$$

Probemos que  $(\sigma_0, s_0)$  pertenece a la frontera 2-microlocal de  $f$  en  $x_0 = 0$ . Es decir que si fijamos  $\sigma_0$  resulta que

$$s_0 = \sup\{s : f \in C_{x_0}^{s, \sigma_0 - s}\}.$$

Para ello probemos que:

$$f \notin C_{x_0}^{s_0 + \varepsilon, \sigma_0 - (s_0 + \varepsilon)} \quad \forall \varepsilon > 0,$$

y que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $s$  tal que  $s_0 - \varepsilon \leq s < s_0$  y  $f \in C_{x_0}^{s, \sigma_0 - s}$ .

Como  $(\sigma_0, s_0)$  es un punto de un punto de la recta tenemos que:

$$s_0(1 - \gamma) = \alpha(1 - \gamma) + \gamma(\alpha - \sigma_0) = \alpha - \gamma\sigma_0, \tag{4.12}$$

o equivalentemente

$$\alpha = s_0(1 - \gamma) + \gamma\sigma_0. \quad (4.13)$$

- Mostremos que  $f \notin C_{x_0}^{s_0+\varepsilon, \sigma_0-(s_0+\varepsilon)} \quad \forall \varepsilon > 0$ .

Supongamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f \in C_{x_0}^{s_0+\varepsilon, \sigma_0-(s_0+\varepsilon)}$ , es decir

$$|c_{j,k}| \leq C 2^{-j(s_0+\varepsilon)}(1 + |k|)^{s_0+\varepsilon-\sigma_0}$$

para alguna constante  $C$  y para todo  $j, k$ , tal que  $|\frac{k}{2^j}| < 1$ .

Por hipótesis tenemos que  $|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} 2^{-j\alpha}$ , así:

$$\mathcal{C}_{j,k} 2^{-j\alpha} \leq C 2^{-j(s_0+\varepsilon)}(1 + |k|)^{s_0+\varepsilon-\sigma_0}$$

y en virtud de la fórmula (4.13) y que  $1 + |k| = \lambda_{j,k} 2^{j\gamma}$ , reescribimos la desigualdad

$$\mathcal{C}_{j,k} 2^{-j(s_0(1-\gamma)+\gamma\sigma_0)} \leq C 2^{-j(s_0+\varepsilon)}(\lambda_{j,k} 2^{j\gamma})^{s_0+\varepsilon-\sigma_0}. \quad (4.14)$$

Simplificando esta desigualdad, tenemos

$$\mathcal{C}_{j,k} \leq C 2^{-j\varepsilon}(\lambda_{j,k})^{s_0+\varepsilon-\sigma_0}.$$

Con lo cual, aplicando  $\log_2(\cdot)$ , obtenemos

$$\log_2(\mathcal{C}_{j,k}) \leq \log_2(C) - j\varepsilon + \log_2(\lambda_{j,k})(s_0 + \varepsilon - \sigma_0),$$

o equivalentemente, dividiendo por  $j > 0$ ,

$$\frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k})}{j} \leq \frac{\log_2(C)}{j} - \varepsilon + \frac{\log_2(\lambda_{j,k})}{j}(s_0 + \varepsilon - \sigma_0).$$

Por hipótesis  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = 0$  y  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} = 0$ , para cualquier  $k_j$  tal que  $|k_j| < 2^j$ . Entonces, considerando  $k = k_j$  en la última desigualdad y tomando límite con  $j \rightarrow +\infty$ , tenemos que  $0 \leq -\varepsilon$ , lo cual es absurdo.

- Probemos que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $s$  tal que  $s_0 - \varepsilon \leq s < s_0$  y  $f \in C_{x_0}^{s, \sigma_0-s}$ .

Por hipótesis,  $1 + |k| = \lambda_{j,k} 2^{j\gamma}$ , entonces

$$\begin{aligned} 2^{-js_0}(1 + |k|)^{s_0-\sigma_0} &= 2^{-js_0}(\lambda_{j,k} 2^{j\gamma})^{s_0-\sigma_0} \\ &= \lambda_{j,k}^{s_0-\sigma_0} 2^{-j(s_0(1-\gamma)+\gamma\sigma_0)} \\ &= \lambda_{j,k}^{s_0-\sigma_0} 2^{-j\alpha}, \end{aligned}$$

o equivalentemente,

$$2^{-j\alpha} = \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} 2^{-js_0} (1 + |k|)^{s_0 - \sigma_0}. \quad (4.15)$$

Por lo tanto, a partir de esta última igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} |c_{j,k}| &= \mathcal{C}_{j,k} 2^{-j\alpha} \\ &= \mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} 2^{-js_0} (1 + |k|)^{s_0 - \sigma_0} \\ &= \mathcal{C}_{j,k} 2^{-j(s_0 - \varepsilon)} (1 + |k|)^{s_0 - \sigma_0 - \varepsilon} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} 2^{-j\varepsilon} (1 + |k|)^\varepsilon. \end{aligned}$$

Si probamos que  $\mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} 2^{-j\varepsilon} (1 + |k|)^\varepsilon$  está acotada podemos afirmar que:

$$|c_{j,k}| \leq C 2^{-j(s_0 - \varepsilon)} (1 + |k|)^{s_0 - \sigma_0 - \varepsilon}$$

para todo  $j, k$ , tal que  $|\frac{k}{2^j}| < 1$ , es decir que  $f \in C_{x_0}^{s, \sigma_0 - s}$  con  $s = s_0 - \varepsilon$ .

Probemos que  $\mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} 2^{-j\varepsilon} (1 + |k|)^\varepsilon$  es acotada.

Si  $j = 0$  sólo  $k = 0$  verifica que  $|k| < 2^j$ , con lo cual  $\mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} 2^{-j\varepsilon} (1 + |k|)^\varepsilon$  está acotada. Si  $j > 0$ ,

$$\mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} 2^{-j\varepsilon} (1 + |k|)^\varepsilon = \mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} 2^{-j\varepsilon} (\lambda_{j,k} 2^{j\gamma})^\varepsilon = \mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0 + \varepsilon} 2^{j(\gamma - 1)\varepsilon},$$

con lo cual, aplicando  $\log_2(\cdot)$  a  $\mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0 + \varepsilon} 2^{j(\gamma - 1)\varepsilon}$  tenemos la expresión

$$\log_2(\mathcal{C}_{j,k}) + (s_0 - \sigma_0 - \varepsilon) \log_2(\lambda_{j,k}) + j(\gamma - 1)\varepsilon,$$

o bien

$$j \left[ \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k})}{j} + (\gamma - 1)\varepsilon + (s_0 - \sigma_0 - \varepsilon) \frac{\log_2(\lambda_{j,k})}{j} \right].$$

Recordando que  $\gamma - 1 < 0$  y las hipótesis que cumplen  $\lambda_{j,k}$  y  $\mathcal{C}_{j,k}$ , si  $k = k_j$  con  $|k_j| < 2^j$ , tenemos que la última expresión tiende a  $-\infty$  cuando  $j \rightarrow +\infty$ .

En consecuencia, existe  $C$  tal que

$$0 < \mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0 + \varepsilon} 2^{j(\gamma - 1)\varepsilon} < C$$

para todo  $j, k$  admisibles.

Luego la frontera 2-microlocal coincide con la recta de ecuación

$$S(\sigma) = \alpha + \frac{\gamma}{1 - \gamma} (\alpha - \sigma),$$

y, en virtud de la Proposición 4.1.7, se pueden extraer los exponentes de regularidad. ■



**Observación 4.2.2** De la demostración anterior se deduce que  $s_0 = S(\sigma_0) = \sup\{s : f \in C_{x_0}^{s, \sigma_0 - s}\}$  podría ser un supremo, sin ser un máximo.

Razonando por el absurdo, si  $S(\sigma_0)$  es un máximo entonces  $f \in C_{x_0}^{s_0, \sigma_0 - s_0}$ . Es decir que existe una constante  $C > 0$  tal que:

$$|c_{j,k}| \leq C 2^{-js_0} (1 + |k|)^{s_0 - \sigma_0}$$

para todo  $j, k$ , tal que  $|\frac{k}{2^j}| < 1$ . En (4.15) probamos que

$$2^{-j\alpha} = \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} 2^{-js_0} (1 + |k|)^{s_0 - \sigma_0}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} 2^{-j\alpha} = \mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} 2^{-js_0} (1 + |k|)^{s_0 - \sigma_0},$$

lo cual implica que

$$\mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0} \leq C.$$

Pero esto puede ser absurdo. Por ejemplo, si consideramos las siguientes sucesiones, que cumplen las hipótesis de la Proposición 4.2.1,  $\lambda_{j,k} = 1$  y  $\mathcal{C}_{j,k} = 2^{\sqrt{j}}$  para  $j \geq 0$ , resulta que  $\mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{\sigma_0 - s_0}$  no es acotada.

Una primera cuestión es encontrar la relación entre la fórmula propuesta en la Proposición 4.2.1, que define los coeficientes wavelet de una familia de funciones con frontera 2-microlocal  $S(\sigma)$  lineal en  $x_0 = 0$ , y la fórmula (4.7) propuesta en la Proposición 4.1.9 para definir a una función con frontera 2-microlocal predeterminada  $S(\sigma)$ , cóncava hacia abajo, decreciente, no lineal.

La fórmula (4.7) se basa en el cálculo del ínfimo de funciones de la forma

$$a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma},$$

con  $a, b > 0$ . Si  $S(\sigma)$  es lineal es sencillo computar el cálculo del ínfimo, mediante el siguiente lema.

**Lema 4.2.3** Sea  $S(\sigma) = M\sigma + d$ , con  $M \leq 0$ , y sean  $a$  y  $b$  números reales positivos. Entonces

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma}\} = \begin{cases} 0 & \text{si } (ab)^M \neq b \\ (ab)^d & \text{si } (ab)^M = b. \end{cases}$$

**Demostración.**

$$a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma} = (ab)^d \cdot \left( \frac{(ab)^M}{b} \right)^\sigma$$

- Si  $\frac{(ab)^M}{b} \neq 1$  la función  $\left( \frac{(ab)^M}{b} \right)^\sigma$  tiende a 0 cuando  $\sigma \rightarrow +\infty$  o bien cuando  $\sigma \rightarrow -\infty$ . Por lo tanto

$$\inf_{\sigma} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = 0$$

- Si  $\frac{(ab)^M}{b} = 1$

$$\inf_{\sigma} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = (ab)^d$$

■

**Observación 4.2.4** ¿Cuál es la conexión entre la fórmula (4.7) y la fórmula propuesta en la Proposición 4.2.1?

Para  $S(\sigma) = \alpha + \frac{\gamma}{1-\gamma}(\alpha - \sigma) = \frac{\alpha}{1-\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma-1}\sigma$  y  $x_0 = 0$  calculemos

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1 + |k - 2^j x_0|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\}.$$

Por el Lema 4.2.3 tenemos que

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = \begin{cases} 0 & \text{si } (ab)^M \neq b \\ (ab)^d & \text{si } (ab)^M = b. \end{cases}$$

con  $d$  la ordenada al origen de  $S(\sigma)$  y  $M$  la pendiente de  $S(\sigma)$ . Por lo tanto considerando  $a = 2^{-j}$  y  $b = \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}}$ , se tiene que

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = \left( 2^{-j} \frac{1 + |k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{\frac{\alpha}{1-\gamma}} \quad \text{si } (2^{-j})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left( \frac{1 + |k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{1-\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

La igualdad  $(2^{-j})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{1-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$  es equivalente a  $(2^j)^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} = \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma}}$ , o bien  $1 + |k| = \lambda_{j,k} 2^{j\gamma}$ . En definitiva,

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1 + |k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\} = 2^{-j\alpha} \quad \text{si } 1 + |k| = \lambda_{j,k} 2^{j\gamma}.$$

Es decir que, en la Proposición 4.2.1, los coeficientes wavelet se definen como

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1 + |k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\} \quad \text{si } j, k \text{ verifican } j \geq 0 \text{ y } 1 + |k| = \lambda_{j,k} 2^{j\gamma}$$

y como 0 en los demás casos.

A partir de esta observación proponemos una primera aproximación que generaliza la Proposición 4.1.9, definiendo una amplia familia de funciones, cuya frontera 2-microlocal es  $S(\sigma)$ , una función decreciente definida sobre  $\mathbb{R}$ , tal que o bien  $S(\sigma)$  es una curva cóncava hacia abajo con  $S''(\sigma) < 0$  o bien  $S(\sigma)$  es lineal.

**Teorema 4.2.5** *Sea  $S(\sigma)$  una función decreciente definida sobre  $\mathbb{R}$ , tal que o bien  $S(\sigma)$  es una curva cóncava hacia abajo con  $S''(\sigma) < 0$  o bien  $S(\sigma)$  es lineal. Sean  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  sucesiones positivas tales que, para todo  $k_j$  tal que  $|k_j - 2^j x_0| < 2^j$ :*

$$\blacksquare \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} = 0.$$

Entonces los coeficientes  $c_{j,k}$  tales que

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1 + |k - 2^j x_0|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma) - \sigma} \right\}, \quad \text{si } j \geq 0 \text{ y } \left| \frac{k}{2^j} - x_0 \right| < 1, \quad (4.16)$$

$c_{j,k} \neq 0$  para infinitos  $j > 0$  tales que  $\left| \frac{k}{2^j} - x_0 \right| < 1$ , y los demás coeficientes nulos, definen una función  $f$  cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es  $S(\sigma)$ .

**Demostración.** La demostración es un caso particular de la demostración que daremos del Teorema 4.3.3.  $\blacksquare$

**Ejemplo 4.2.6** *De la Observación 4.2.4, si  $S(\sigma)$  es lineal, de la forma*

$$S(\sigma) = \alpha + \frac{\gamma}{1 - \gamma}(\alpha - \sigma),$$

con  $0 \leq \gamma < 1$ , la familia de funciones con  $S(\sigma)$  su frontera 2-microlocal en  $x_0 = 0$ , que provee el Teorema 4.2.5, queda determinada por los coeficientes wavelet

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} 2^{-j\alpha},$$

para  $j, k$  tales que  $j \geq 0$  y

$$1 + |k| = \lambda_{j,k} 2^{j\gamma}$$

y todos los demás coeficientes nulos, con  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  sucesiones que verifican las hipótesis del teorema.

**Observación 4.2.7** *Eligiendo  $\mathcal{C}_{j,k} = 1$  y  $\lambda_{j,k} = 1$  tenemos que el Teorema 4.2.5 es una generalización de la Proposición 4.1.9, para  $S(\sigma)$  una función decreciente definida sobre  $\mathbb{R}$ , tal que o bien  $S(\sigma)$  es una curva cóncava hacia abajo con  $S''(\sigma) < 0$  o bien  $S(\sigma)$  es lineal. Cabe aclarar que la fórmula (4.7) no hace distinciones sobre  $j, k$  pues si  $j < 0$  o  $\left| \frac{k}{2^j} - x_0 \right| \geq 1$  el cómputo de la fórmula (4.7) es 0 (comprobaremos este cómputo más adelante, en la Observación 4.3.5).*

La fórmula propuesta en (4.16), que define los coeficientes wavelet  $c_{j,k}$ , también se basa en el cálculo del ínfimo de funciones da la forma

$$a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}$$

con  $a = 2^{-j}$  y  $b = \frac{1+|k-2^j x_0|}{\lambda_{j,k}}$ , para cada par  $(j, k)$  fijo.

En el Lema 4.2.3 consideramos el caso lineal, examinemos el caso en que  $S(\sigma)$  es una función no lineal.

**Lema 4.2.8** *Sea  $S(\sigma)$  una función definida en  $\mathbb{R}$ , estrictamente cóncava hacia abajo, decreciente y dos veces derivable y sean  $a, b > 0$ . Entonces:*

- Para  $a = b = 1$ :

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = 1.$$

- Para  $ab < 1$  y  $b \geq 1$ :

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = \begin{cases} a^{S(\sigma_1)}b^{S(\sigma_1)-\sigma_1} & \text{si } \exists \sigma_1 : (ab)^{S'(\sigma_1)} = b \\ \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma} & \text{si } (ab)^{S'(\sigma)} < b \forall \sigma \\ \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma} & \text{si } (ab)^{S'(\sigma)} > b \forall \sigma. \end{cases}$$

- Para otros  $a$  y  $b$  se verifica que  $\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = 0$ .

**Observación 4.2.9** *El valor  $\sigma_1$  es único, lo que hace que esté bien definido el cálculo del ínfimo.*

**Demostración.**

- Si  $ab = 1$ ,  $a \neq 1$  y  $b \neq 1$ :

$$a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma} = (ab)^{S(\sigma)} \cdot b^{-\sigma} = b^{-\sigma}$$

entonces variando  $\sigma$  en todo  $\mathbb{R}$  se tiene que

$$\inf_{\sigma} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = \inf_{\sigma} \{b^{-\sigma}\} = 0.$$

- Si  $ab > 1$  y  $b > 1$ :

Como  $S(\sigma)$  es cóncava hacia abajo su gráfico está por debajo de todas las rectas tangentes, es decir que  $S'(\sigma) \leq S'(\sigma_0)\sigma + d$  y entonces

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} S(\sigma) = -\infty.$$

En consecuencia

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \underbrace{(ab)^{S(\sigma)}}_{\rightarrow 0} \underbrace{b^{-\sigma}}_{\rightarrow 0} = 0,$$

y, como  $a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma} > 0$ , resulta que:

$$\inf_{\sigma} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma} = 0.$$

- Si  $ab > 1$  y  $b \leq 1$ :

El gráfico de  $S(\sigma)$  está por debajo de todas sus rectas tangentes, en particular de la recta tangente a  $S$  en  $\sigma_0$ , o sea

$$S(\sigma) \leq S'(\sigma_0)\sigma + d \quad \text{para todo } \sigma.$$

Considerando que  $ab > 1$ , tenemos

$$0 < (ab)^{S(\sigma)}b^{-\sigma} \leq (ab)^{S'(\sigma_0)\sigma + d} b^{-\sigma},$$

y la expresión  $(ab)^{S'(\sigma_0)\sigma + d}b^{-\sigma}$  puede reescribirse como  $\left(\frac{(ab)^{S'(\sigma_0)}}{b}\right)^{\sigma} (ab)^d$ .

$S'$  es estrictamente decreciente, por lo tanto podemos asegurar que existe  $\sigma_0$  tal que  $S'(\sigma_0) \neq \frac{\ln(b)}{\ln(ab)}$ , lo cual equivale a  $\frac{(ab)^{S'(\sigma_0)}}{b} \neq 1$ . En consecuencia, como  $\left(\frac{(ab)^{S'(\sigma_0)}}{b}\right)^{\sigma} (ab)^d$  tiende 0 cuando  $\sigma \rightarrow +\infty$  o bien cuando  $\sigma \rightarrow -\infty$ , obtenemos que

$$\inf_{\sigma} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = \min\left\{\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} (ab)^{S(\sigma)}b^{-\sigma}, \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} (ab)^{S(\sigma)}b^{-\sigma}\right\} = 0.$$

- Si  $ab < 1$  y  $b < 1$ :

Como  $S(\sigma)$  es decreciente, se cumple que  $S(\sigma) \geq S(0)$  para todo  $\sigma < 0$ . Entonces, teniendo en cuenta que  $ab < 1$ , resulta que  $(ab)^{S(\sigma)} \leq (ab)^{S(0)}$  para todo  $\sigma < 0$ . En consecuencia:

$$\lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \underbrace{(ab)^{S(\sigma)}}_{\text{acotada}} \underbrace{b^{-\sigma}}_{\rightarrow 0} = 0.$$

Siendo  $a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma} > 0$  resulta que:

$$\inf_{\sigma} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma} = 0.$$

- Si  $ab < 1$  y  $b \geq 1$ :

Derivando la función  $a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}$  se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma} = a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}[\ln(ab)S'(\sigma) - \ln(b)].$$

Como  $a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma} > 0$ , el signo de la derivada depende de  $\ln(ab)S'(\sigma) - \ln(b)$ .

- Si  $(ab)^{S'(\sigma)} > b \ \forall \sigma$  entonces  $\ln(ab)S'(\sigma) - \ln(b) > 0 \ \forall \sigma$  con lo cual  $a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}$  resulta estrictamente creciente y entonces

$$\inf_{\sigma} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}.$$

- Si  $(ab)^{S'(\sigma)} < b \ \forall \sigma$  entonces  $\ln(ab)S'(\sigma) - \ln(b) < 0 \ \forall \sigma$  con lo cual  $a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}$  resulta estrictamente decreciente y entonces

$$\inf_{\sigma} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}.$$

- Si existe  $\sigma$  tal que  $(ab)^{S'(\sigma)} = b$  tenemos que la ecuación  $\ln(ab)S'(\sigma) - \ln(b) = 0$  tiene solución. Por hipótesis  $S'(\sigma)$  es estrictamente decreciente, lo cual implica que el conjunto solución de la ecuación tiene un único elemento. Es decir que existe un único  $\sigma_1$  tal que  $S'(\sigma_1) = \frac{\ln(b)}{\ln(ab)}$ .

Observemos que  $b \neq 1$ . De lo contrario tenemos que  $S'(\sigma_1) = 0$ . Como  $S'$  es estrictamente decreciente esto implica que  $S'(\sigma) > 0$  para todo  $\sigma < \sigma_1$ , lo cual es absurdo.

Mostremos que en  $\sigma_1$  hay un mínimo de  $a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}$ . Teniendo en cuenta que  $\ln(ab) < 0$ , tenemos

$$\ln(ab)S'(\sigma) - \ln(b) > 0 \iff S'(\sigma) < \frac{\ln(b)}{\ln(ab)} = S'(\sigma_1), \text{ es decir si } \sigma > \sigma_1.$$

Asimismo,

$$\ln(ab)S'(\sigma) - \ln(b) < 0 \iff S'(\sigma) > \frac{\ln(b)}{\ln(ab)} = S'(\sigma_1), \text{ es decir si } \sigma < \sigma_1.$$

Por lo tanto, la función  $a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}$  tiene un mínimo en  $\sigma_1$ , es decir que:

$$\inf_{\sigma} \{a^{S(\sigma)}b^{S(\sigma)-\sigma}\} = a^{S(\sigma_1)}b^{S(\sigma_1)-\sigma_1}.$$

■

Si  $0 < a \leq 1$ , los lemas 4.2.3 y 4.2.8 pueden unificarse el siguiente lema, que sera útil para demostrar el resultado general de prescripción de la frontera 2-microlocal en  $x_0$ .

**Lema 4.2.10** Sea  $S(\sigma)$  decreciente, definida sobre  $\mathbb{R}$ , tal que o bien  $S(\sigma)$  es una curva cóncava hacia abajo con  $S''(\sigma) < 0$  o bien  $S(\sigma)$  es lineal, y sean  $0 < a \leq 1$ ,  $b > 0$ . Entonces:

- Para  $a = b = 1$ :

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma}\} = 1.$$

- Para  $1 \leq b < \frac{1}{a}$ :

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma}\} = \begin{cases} a^{S(\sigma_1)} b^{S(\sigma_1) - \sigma_1} & \text{si } \exists \sigma_1 : (ab)^{S'(\sigma_1)} = b \\ \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma} & \text{si } (ab)^{S'(\sigma)} < b \forall \sigma \\ \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma} & \text{si } (ab)^{S'(\sigma)} > b \forall \sigma. \end{cases}$$

- Para otros  $a$  y  $b$ ,  $\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma}\} = 0$ .

**Demostración.** Mostremos que, si  $0 < a \leq 1$ , la fórmula dada para el caso lineal  $S(\sigma) = M\sigma + d$ , en el Lema 4.2.3, coincide con la fórmula propuesta en este lema.

1) Si  $M = 0$  el Lema 4.2.3 asegura que, si  $b \neq 1$  entonces  $\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma}\} = 0$  y, si  $b = 1$ ,  $\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma}\} = a^d$ . Computando las fórmulas del Lema 4.2.10 se obtienen los mismos resultados.

2) Consideremos  $M > 0$ .

- Si  $a = b = 1$  entonces  $(ab)^d = 1$ .
- Si  $ab < 1$  y  $b = 1$  entonces  $\frac{(ab)^M}{b} \neq 1$ . Así, el Lema 4.2.3 asegura que  $\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma}\} = 0$ . Computando la fórmula propuesta en este Lema 4.2.10 obtenemos que

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma}\} = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} a^{S(\sigma)}.$$

Teniendo en cuenta que  $a^M > 1$ ,  $\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma}\} = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} a^{M\sigma} a^d = 0$ .

- Si  $ab < 1$ ,  $b > 1$  y  $\exists \sigma_1 : (ab)^{S'(\sigma_1)} = b$ , tenemos que

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma) - \sigma}\} = a^{S(\sigma_1)} b^{S(\sigma_1) - \sigma_1}.$$

Este cómputo coincide con el del Lema 4.2.3 pues, como  $(ab)^{S'(\sigma_1)} = (ab)^M = b$ ,

$$a^{S(\sigma_1)} b^{S(\sigma_1) - \sigma_1} = (ab)^{M\sigma_1 + d} b^{-\sigma_1} = ((ab)^M)^{\sigma_1} (ab)^d b^{-\sigma_1} = b^{\sigma_1} (ab)^d b^{-\sigma_1} = (ab)^d.$$

- Si  $ab < 1$ ,  $b > 1$  y  $(ab)^{S'(\sigma)} \neq b \forall \sigma$  tenemos que  $\frac{(ab)^M}{b} \neq 1$ . El cómputo coincide con el del Lema 4.2.3, pues

$$a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma)-\sigma} = (ab)^{M\sigma+d} b^{-\sigma} = \left( \frac{(ab)^M}{b} \right)^\sigma (ab)^d,$$

que converge a 0 si  $\sigma \rightarrow +\infty$  o bien si  $\sigma \rightarrow -\infty$ .

- Si  $ab \geq 1$  y  $b > 1$  tenemos que  $(ab)^M < 1$  con lo cual  $(ab)^M \neq b$ , es decir que  $\frac{(ab)^M}{b} \neq 1$  y para ambas fórmulas  $\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{a^{S(\sigma)} b^{S(\sigma)-\sigma}\} = 0$ .
- $ab \geq 1$  y  $b < 1$  no es un caso posible si  $a \leq 1$ .

■

### 4.2.1. Resultado

Uno de los objetivos planteados es dar una fórmula genérica, para prescribir a la frontera 2-microlocal en  $x_0$ , que incluya las construcciones presentadas en [23, 52, 46].

Si bien, a partir del Teorema 4.2.5, podemos deducir la construcción del trabajo [23], no es posible incluir a la función construida por Y. Meyer en [52]. Inspirados por la construcción exhibida en [52] damos una segunda versión del teorema.

Partimos al conjunto de los naturales como la unión disjunta

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} \Lambda_m, \quad (4.17)$$

con  $\Lambda_m$  un conjunto infinito de naturales (por ejemplo  $\Lambda_m$  podría ser el conjunto de los naturales tal que su desarrollo binario tiene exactamente  $m$  unos). Sea  $\{r_m\}$  un conjunto denso y numerable en el intervalo  $[0, 1]$ , por ejemplo los racionales.

Si  $[\cdot]$  denota la parte entera, definamos el conjunto de subíndices

$$I = \{(j, k_j) : j \in \Lambda_m \text{ y } [|k_j - 2^j x_0|] = [2^{j r_m}]\}.$$

**Teorema 4.2.11** *Sea  $S(\sigma)$  una función decreciente definida sobre  $\mathbb{R}$ , tal que o bien  $S(\sigma)$  es una curva cóncava hacia abajo con  $S''(\sigma) < 0$  o bien  $S(\sigma)$  es lineal. Sean  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  sucesiones positivas tales que, para todo  $k_j$  tal que  $|k_j - 2^j x_0| < 2^j$ :*

- $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = 0$  y  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} = 0$ .

Luego los coeficientes  $c_{j,k}$  tales que

$$|c_{j,k}| \leq \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-j S(\sigma)} \left( \frac{1 + |k - 2^j x_0|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\}, \quad (4.18)$$



y se verifica la **igualdad** para  $(j, k) \in I$ , con  $c_{j,k} \neq 0$  para infinitos  $j \in I$ , definen una función (o distribución)

$$f(x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}, |k-2^j x_0| < 2^j} c_{j,k} \psi(2^j x - k),$$

cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es  $S(\sigma)$ .

**Demostración.** La demostración es un caso particular de la demostración de la versión más general del Teorema 4.3.3. ■

#### 4.2.2. Conexión con el resultado propuesto por Y. Meyer

Y. Meyer desarrolla su resultado en el plano  $(s, s')$  describiendo a la frontera como los  $(s, s')$  tales que  $s = A(s')$ . En [52] prueba el siguiente resultado.

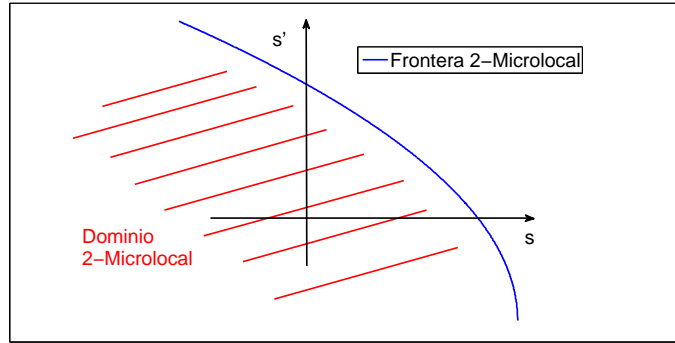


Figura 4.2: Dominio 2-microlocal y frontera en el plano  $(s, s')$ .

**Teorema 4.2.12** (Y. Meyer, 1998)

Sea  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función cóncava hacia abajo, Lipschitz y derivable tal que  $-1 \leq \frac{dA}{dt}(t) \leq 0$  y sea  $E$  el conjunto definido por  $s \leq A(s')$ ,  $(s, s') \in \mathbb{R}^2$ . Entonces existe una función  $f$  definida en un entorno de  $x_0$  tal que el dominio 2-microlocal de  $f$  en  $x_0$  es  $E$ .

La demostración es constructiva y allí se exhibe una función  $f$  que verifica lo planteado. Se elige  $\{s'_m\}$  un conjunto denso y numerable en  $\mathbb{R}$  y define

$$p_m = -\frac{dA}{dt}(s'_m) \quad y \quad \tau_m = A(s'_m) - \frac{dA}{dt}(s'_m)s'_m. \quad (4.19)$$

Así, muestra que los coeficientes wavelet

$$c_{j,k} = 2^{-j\tau_m} \quad \text{si } j \in \Lambda_m \text{ y } k_j = [2^{jp_m}]$$

y los demás nulos, con  $\Lambda_m$  de la fórmula (4.23), definen una función  $f$  cuya frontera 2-microlocal en  $x_0 = 0$  es  $s = A(s')$ .

En el plano  $(\sigma, s)$  la frontera 2-microlocal puede escribirse como

$$S(\sigma) = s \text{ tal que } s = A(\sigma - s).$$

Sean  $j \in \Lambda_m$  y  $k_j = [2^{jp_m}]$ . Observemos que si  $A$  no es lineal el conjunto  $\{p_m\}$  es un conjunto denso y numerable en el  $[0, 1] \cap \text{Im}(A)$ , pues  $-\frac{dA}{dt}(t)$  es biyectiva y continua (por las hipótesis que impusimos a  $S(\sigma)$ ). En el caso lineal  $p_m$  es constante.

De la definición de los coeficientes wavelet tenemos que

$$c_{j,k_j} = 2^{-j\tau_m} = 2^{-j(A(s'_m) - \frac{dA}{dt}(s'_m)s'_m)}.$$

Con lo cual, usando que  $s_m = A(s'_m)$  y  $s_m + s'_m = \sigma_n$ , obtenemos

$$c_{j,k_j} = 2^{-j s_m} \left[ 2^{-j \frac{dA}{dt}(s'_m)} \right]^{s_m - \sigma_m} = 2^{-j s_m} [2^{j p_m}]^{s_m - \sigma_m}.$$

Queremos reformular  $c_{j,k}$  como

$$\mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\},$$

eligiendo apropiados  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$ , de manera que se verifique la igualdad en (4.18). Para ello definimos  $\mathcal{C}_{j,k} = 1$  y

$$\lambda_{j,k} = \begin{cases} \frac{1+|k|}{2^{jp_m}} & \text{si } j \in \Lambda_m \text{ y } k = [2^{jp_m}] \\ 1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calculemos  $\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\}$  para  $j \in \Lambda_m$  y  $k = [2^{jp_m}]$ . En este caso,

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\} = \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} (2^{jp_m})^{S(\sigma)-\sigma} \right\} = \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma) - p_m(S(\sigma)-\sigma)} \right\}.$$

Consideremos  $(s, s')$  tales que  $s = A(s')$ . Por ser  $A(s')$  cóncava hacia abajo y derivable tenemos que la recta tangente a  $A$  en  $s'_m$  está por encima del gráfico de  $A(s')$ , es

decir que, para todo  $s'$ ,

$$s = A(s') \leq A(s'_m) + \frac{dA}{dt}(s'_m)(s' - s'_m),$$

que equivale a que

$$s - \frac{dA}{dt}(s'_m)s' \leq A(s'_m) - \frac{dA}{dt}(s'_m)s'_m,$$

y en virtud de las fórmulas de (4.19), tenemos  $s + p_m s' \leq \tau_m$ . En consecuencia,

$$2^{-j\tau_m} \leq 2^{-j(s+p_ms')}.$$

En particular, si  $s = A(\sigma - s)$ , con  $\sigma \in \mathbb{R}$ , es decir  $s = S(\sigma)$ , tenemos

$$2^{-j\tau_m} \leq 2^{-j(s+p_m(\sigma-s))} = 2^{-j(S(\sigma)-p_m(S(\sigma)-\sigma))}. \quad (4.20)$$

Por otra parte, mediante el cambio de variable  $\sigma_m = s_m + s'_m$ , tenemos

$$\tau_m = A(s'_m) + p_ms'_m = A(\sigma_m - s_m) + p_m(\sigma_m - s_m) = S(\sigma_m) - p_m(s_m - \sigma_m).$$

Por lo tanto, la fórmula (4.20) se reformula como

$$2^{-j(S(\sigma_m)-p_m(s_m-\sigma_m))} \leq 2^{-j(S(\sigma)-p_m(S(\sigma)-\sigma))} \quad \text{para todo } \sigma \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, se cumple que

$$\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\} = \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{ 2^{-jS(\sigma)-p_m(S(\sigma)-\sigma)} \} = 2^{-j\tau_m}.$$

Para los otros  $j, k$  definimos  $c_{j,k} = 0$ . Claramente, verifican la desigualdad de la fórmula (4.18) si  $\mathcal{C}_{j,k} = 1$  y  $\lambda_{j,k} = 1$ . Así la función  $f$  definida por Meyer pertenece a la familia de funciones propuesta en el Teorema 4.2.11.

**Observación 4.2.13** *Las sucesiones  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  verifican las hipótesis del Teorema 4.2.11 pues,*

$$\mathcal{C}_{j,k} = 1 \quad \text{y} \quad 1 \leq \lambda_{j,k} \leq 2$$

para  $j, k$  tal que  $j \geq 0$  y  $|k| < 2^j$ .

### 4.3. Versión general de la prescripción de la frontera 2-microlocal

En esta sección exponemos y probamos los dos resultados principales de este capítulo. El Teorema 4.3.3 provee una clase amplia de funciones (o distribuciones) cuya frontera 2-microlocal es  $S(\sigma)$ , una función predeterminada tal que  $S''(\sigma) < 0$  o bien  $S(\sigma)$  es lineal. Esta clase contiene los ejemplos construidos por [52, 23, 46].

El Teorema 4.3.6 es más satisfactorio, pues en el caso en que la frontera 2-microlocal predeterminada es lineal, caracterizamos todas las funciones (o distribuciones) cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es la recta predeterminada.

Si bien el Teorema 4.2.11 generaliza los resultados propuestos en [52] y [23] no alcanza para establecer una familia de funciones (o distribuciones), con  $S(\sigma)$  la frontera 2-microlocal predeterminada en  $x_0$ , que también contenga a la función propuesta en el trabajo de J. Lévy Véhel y S. Seuret en [46]. Por lo tanto, debemos ajustar las hipótesis para que los coeficientes wavelet de la función  $f$  definida en [46], también se recuperen a partir de la fórmula

$$\mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1 + |k - 2^j x_0|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma) - \sigma} \right\}.$$

A fin de lograr este objetivo modificaremos las condiciones que deben cumplir las sucesiones  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$ . Para ello vamos a requerir condiciones más débiles que

$$\blacksquare \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} = 0,$$

las condiciones planteadas en el Teorema 4.2.11.

Una aproximación para relajar las condiciones requeridas para las sucesiones  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  es generalizar la Proposición 4.2.1. Revisando la demostración de la Proposición 4.2.1 es posible ajustar las hipótesis y demostrar, usando los mismos argumentos, el siguiente resultado.

**Proposición 4.3.1** *Sea la función  $S(\sigma) = \alpha + \frac{\gamma}{1-\gamma}(\alpha - \sigma)$  con  $0 \leq \gamma < 1$ . Sean  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  sucesiones positivas tales que:*

- Para todo  $k_j$  tal que  $|k_j| < 2^j$  se verifica que, dado cualquier  $C \in \mathbb{R}$ ,

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} + C \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} \right) \leq 0.$$

- Existe una sucesión  $(j_n, k_n)$ ,  $j_n$  estrictamente creciente, tal que  $1 + |k_n| = \lambda_{j_n, k_n} 2^{j_n \gamma}$

con  $|k_n| < 2^{j_n}$  y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j_n, k_n})}{j_n} = 0 \quad y \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j_n, k_n})}{j_n} = 0.$$

Luego los coeficientes  $c_{j,k}$  tales que

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} 2^{-j\alpha}, \quad \text{para } j \geq 0 \quad y \quad 1 + |k| = \lambda_{j,k} 2^{j\gamma},$$

y los demás nulos, definen una función  $f$

$$f(x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}, |k| < 2^j} c_{j,k} \psi(2^j x - k),$$

cuya frontera 2-microlocal en  $x_0 = 0$  es  $S(\sigma)$ .

Esta proposición y el Teorema 4.2.11 son el punto de partida para enunciar una versión general de la prescripción de la frontera 2-microlocal en  $x_0$ .

### 4.3.1. Preliminares

Consideremos  $S(\sigma)$  una función decreciente definida sobre  $\mathbb{R}$ , tal que o bien  $S(\sigma)$  es una curva cóncava hacia abajo con  $S''(\sigma) < 0$  o bien  $S(\sigma)$  es lineal.

El siguiente lema será de utilidad para demostrar el teorema general. Consiste en un resultado técnico que permite acotar a la expresión

$$\frac{S'(\sigma)(\sigma_0 - \sigma) + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma) - 1}$$

para todo  $\sigma \in \mathbb{R}$ , siendo  $(\sigma_0, s_0)$  un punto del gráfico de  $S(\sigma)$  y  $\varepsilon > 0$ .

**Lema 4.3.2** *Sea  $S(\sigma)$  una función decreciente definida sobre  $\mathbb{R}$ , tal que o bien  $S(\sigma)$  es una curva cóncava hacia abajo con  $S''(\sigma) < 0$  o bien  $S(\sigma)$  es lineal y sean  $(\sigma_0, s_0)$  un punto del gráfico de  $S$  y  $\varepsilon > 0$ . Entonces existe  $B < 0$  tal que*

$$\frac{S'(\sigma)(\sigma_0 - \sigma) + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma) - 1} < B \tag{4.21}$$

para todo  $\sigma \in \mathbb{R}$ .

**Demostración.** Si  $S$  es cóncava hacia abajo, la recta tangente a  $S$  en  $x = \sigma$  verifica que

$$y(x) = S'(\sigma)(x - \sigma) + S(\sigma) \geq S(x) \tag{4.22}$$

para todo  $x$ .

Analicemos como se comporta la expresión

$$\frac{S'(\sigma)(\sigma_0 - \sigma) + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma) - 1},$$

distinguiendo entre dos casos: cuando  $S'$  es acotada y cuando no es acotada.

- $S'(\sigma)$  acotada:

Por la desigualdad (4.22) evaluada en  $x = \sigma_0$  tenemos que

$$S'(\sigma)(\sigma_0 - \sigma) + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon \geq \varepsilon$$

Con lo cual, como  $S'(\sigma) - 1 < 0$ ,

$$\frac{S'(\sigma)(\sigma_0 - \sigma) + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma) - 1} \leq \frac{\varepsilon}{S'(\sigma) - 1}.$$

Por lo tanto, si  $A < S'(\sigma) < 0$ , obtenemos que  $\frac{\varepsilon}{S'(\sigma)-1} < \frac{\varepsilon}{A-1}$  y

$$\frac{S'(\sigma)(\sigma_0 - \sigma) + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma) - 1} < \frac{\varepsilon}{A - 1} = B.$$

- $S'(\sigma)$  no acotada:

Si  $S'$  no es acotada inferiormente entonces

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} S'(\sigma) = -\infty.$$

Queremos probar que la desigualdad planteada en (4.21) se cumple si  $\sigma \rightarrow +\infty$ , pues  $S'(\sigma)$  resulta acotada si el parámetro  $\sigma$  está acotado superiormente y, análogamente al caso anterior, vale la desigualdad para estos valores de  $\sigma$ .

Si probamos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{S'(\sigma)(\sigma_0 - \sigma) + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma) - 1} = -\infty,$$

entonces podremos afirmar que existe  $B$  tal que, para todo  $\sigma$ ,

$$\frac{S'(\sigma)(\sigma_0 - \sigma) + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma) - 1} < B.$$

El cociente  $\frac{S'(\sigma)(\sigma_0 - \sigma) + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma) - 1}$  es:

$$\frac{S'(\sigma)}{S'(\sigma) - 1} \sigma_0 + \frac{-S'(\sigma)\sigma + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma) - 1}.$$

Por un lado, tenemos que

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{S'(\sigma)}{S'(\sigma) - 1} \sigma_0 = \sigma_0.$$

Además vale que

$$\lim_{\sigma \rightarrow +\infty} -S'(\sigma)\sigma + S(\sigma) = +\infty,$$

pues de lo contrario, si  $-S'(\sigma)\sigma + S(\sigma)$  fuese acotada, tendríamos que existe  $N$  tal que

$$S'(\sigma)x - S'(\sigma)\sigma + S(\sigma) \leq S'(\sigma)x + N$$

para todo  $\sigma$ . En consecuencia, por la desigualdad (4.22), tendríamos

$$S(x) \leq S'(\sigma)(x - \sigma) + S(\sigma) \leq S'(\sigma)x + N$$

para todo  $x$ . En particular, si  $x = 1$  se verificaría

$$S(1) - N \leq S'(\sigma)$$

para todo  $\sigma$ , lo que es absurdo si  $S'(\sigma)$  no es acotada inferiormente.

Entonces, usando la regla de L'Hospital, podemos afirmar que

$$\begin{aligned} & \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{-S'(\sigma)\sigma + S(\sigma) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma) - 1} = \\ & = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{-S''(\sigma)\sigma - S'(\sigma) + S'(\sigma)}{S''(\sigma)} = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} -\sigma = -\infty. \end{aligned}$$

■

Al igual que en la sección anterior, inspirados en la construcción realizada en [52], partimos al conjunto de los naturales como la unión disjunta

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{m \in \mathbb{N}} \Lambda_m, \quad (4.23)$$

con  $\Lambda_m$  un conjunto infinito de naturales (por ejemplo  $\Lambda_m$  podría ser el conjunto de los naturales tal que su desarrollo binario tiene exactamente  $m$  unos).

Sea  $\{r_m\}_{m \in \mathbb{N}}$  una sucesión tal que

$$\{r_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ es denso y numerable en } \text{Im} \left( \frac{S'(\sigma)}{S'(\sigma) - 1} \right) \subseteq [0, 1], \quad (4.24)$$

salvo en el caso lineal donde  $r_m$  es la constante  $\frac{S'(\sigma)}{S'(\sigma) - 1}$  para todo  $m$ .

Definimos el conjunto de subíndices

$$I = \{(j, k_j) : j \in \Lambda_m \text{ y } [|k_j - 2^j x_0|] = [2^{j r_m}]\}. \quad (4.25)$$

### 4.3.2. Resultados principales

**Teorema 4.3.3** *Sea  $S(\sigma)$  una función decreciente definida sobre  $\mathbb{R}$ , tal que o bien  $S(\sigma)$  es una curva cóncava hacia abajo con  $S''(\sigma) < 0$  o bien  $S(\sigma)$  es lineal.*

*Sean  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  sucesiones positivas tales que, para todo  $k_j$  tal que  $|k_j - 2^j x_0| < 2^j$ , se verifica que*

(i) *Dado cualquier  $C \in \mathbb{R}$ ,*

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} + C \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} \right) \leq 0.$$

(ii) *Si  $(j, k_j) \in I$ , definido en (4.25),*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} = 0.$$

*Sean los coeficientes wavelet  $c_{j,k}$  tales que*

$$|c_{j,k}| \leq \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-j S(\sigma)} \left( \frac{1 + |k - 2^j x_0|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma) - \sigma} \right\}, \quad (4.26)$$

*y que verifiquen la **igualdad** si  $(j, k) \in I$ . Además  $c_{j,k} \neq 0$  para infinitos  $j$ , con  $(j, k) \in I$ .*

*Si  $\psi$  es cualquier wavelet en la clase de Schwartz, con infinitos momentos nulos, entonces la función (o la distribución)*

$$f(x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}, |k - 2^j x_0| < 2^j} c_{j,k} \psi(2^j x - k)$$

*tiene frontera 2-microlocal  $S(\sigma)$  en  $x_0$ .*

**Observación 4.3.4** *Si  $S(\sigma)$  no es lineal veremos en la demostración que siempre tenemos garantizado que  $c_{j,k} \neq 0$  para infinitos  $j$  tales que  $(j, k) \in I$ . No obstante debemos hacer el requerimiento si queremos incluir el caso en que  $S(\sigma)$  es lineal.*



**Observación 4.3.5** *El Teorema 4.3.3 también es una generalización de la Proposición 4.1.9 si elegimos  $\mathcal{C}_{j,k} = 1$  y  $\lambda_{j,k} = 1$  y consideramos la igualdad en la fórmula (4.26).*

*En el Teorema 4.3.3 definimos la sumatoria sobre  $j \geq 0$  y  $|k - 2^j x_0| < 2^j$ , pues la definición de espacio 2-microlocal local requiere definir a la función (o distribución)  $f$  en un entorno de  $x_0$ .*

*En cambio, en la Proposición 4.1.9 los autores definen a los coeficientes wavelet para todo  $j, k \in \mathbb{Z}$ . Esta diferencia en los subíndices se debe a que, en el caso  $S$  no lineal, si  $j < 0$  o bien  $|k - 2^j x_0| \geq 2^j$  la fórmula (4.7) vale 0. Esto es así pues si  $j < 0$  y  $S$  no es lineal, el Lema 4.2.8 garantiza que, como  $a = 2^{-j} > 1$ , el cálculo del ínfimo en las fórmulas (4.7) y (4.26) es 0, es decir  $c_{j,k} = 0$ . Por otro lado si  $|k - 2^j x_0| \geq 2^j$  se tiene que*

$$b = 1 + |k - 2^j x_0| \geq 1 + 2^j > \frac{1}{a}.$$

*Con lo cual, por el Lema 4.2.10, se deduce que el ínfimo calculado en (4.7) resulta nulo.*

*En el Teorema 4.3.3, debemos especificar que la sumatoria es sobre los  $(j, k)$  tales que  $j > 0$  y  $|k - 2^j x_0| < 2^j$  ya que estamos considerando que  $S$  puede ser lineal. Además si  $|k - 2^j x_0| \geq 2^j$  no tenemos garantizado que los coeficientes wavelet sean nulos, pues*

$$b = \frac{1 + |k - 2^j x_0|}{\lambda_{j,k}} \geq \frac{1 + 2^j}{\lambda_{j,k}},$$

*pero no podemos asegurar que  $\frac{1+2^j}{\lambda_{j,k}} \geq \frac{1}{a} = 2^j$ .*

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad probamos el teorema para  $x_0 = 0$  y en este caso el conjunto de subíndices de (4.25) es  $I = \{(j, k_j) : j \in \Lambda_m \text{ y } |k_j| = [2^{j r_m}]\}$ .

Sea  $j \geq 0$  y  $|k| < 2^j$ . Para simplificar la demostración consideremos que los coeficientes wavelet verifican la igualdad en la fórmula (4.26) para  $j \geq 0$  y  $|k| < 2^j$ . No obstante, en la demostración quedará claro que sólo es necesario que se cumpla la igualdad si  $(j, k) \in I$ .

Por lo tanto, si

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-j S(\sigma)} \left( \frac{1 + |k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma) - \sigma} \right\},$$

usando el Lema 4.2.10 para  $a = 2^{-j}$  y  $b = \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}}$ , tenemos que los coeficientes wavelet se computan como:

- Si  $2^{-j} = 1$  y  $\frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} = 1$ :

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} = \mathcal{C}_{0,0}.$$

- Si  $1 \leq \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} < 2^j$ :

$$|c_{j,k}| = \begin{cases} \mathcal{C}_{j,k} (2^{-j})^{S(\sigma_{j,k})} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma_{j,k})-\sigma_{j,k}} & \text{si } \exists \sigma_{j,k} : \left( 2^{-j} \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S'(\sigma_{j,k})} = \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \\ \mathcal{C}_{j,k} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} (2^{-j})^{S(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} & \text{si } \left( 2^{-j} \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S'(\sigma)} < \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \quad \forall \sigma \\ \mathcal{C}_{j,k} \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} (2^{-j})^{S(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} & \text{si } \left( 2^{-j} \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S'(\sigma)} > \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \quad \forall \sigma. \end{cases} \quad (4.27)$$

- Si  $2^{-j}$  y  $\frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}}$  no están en los casos precedentes:

$$|c_{j,k}| = 0.$$

Sea  $(\sigma_0, s_0)$  un punto de la curva  $(\sigma, S(\sigma))$ , queremos probar que

$$\sup\{s : f \in C_0^{s, \sigma_0-s}\} = s_0.$$

Basta con probar que para todo  $\varepsilon > 0$ , se verifica que

$$\text{A) } f \notin C_0^{s_0+\varepsilon, \sigma_0-(s_0+\varepsilon)} \text{ y B) } f \in C_0^{s_0-\varepsilon, \sigma_0-(s_0-\varepsilon)}.$$

**A)** Mostremos que  $f \notin C_0^{s_0+\varepsilon, \sigma_0-(s_0+\varepsilon)}$  para todo  $\varepsilon > 0$ :

Supongamos que existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f \in C_0^{s_0+\varepsilon, \sigma_0-(s_0+\varepsilon)}$ , es decir que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$|c_{j,k}| \leq C 2^{-j(s_0+\varepsilon)} (1+|k|)^{s_0+\varepsilon-\sigma_0} \quad (4.28)$$

para todo  $j$  y  $k \in \mathbb{Z}$ :  $|k| < 2^j$ , y mostremos que esto nos lleva a una contradicción.

Probaremos que dado  $(\sigma_0, s_0)$  es posible construir una sucesión  $(j_n, k_n)$ , con  $j_n$  estrictamente creciente, tal que

$$(j_n, k_n) \in I = \{(j, k_j) : j \in \Lambda_m \text{ y } |k_j| = [2^{j r_m}]\},$$

que verifica que existe  $\sigma_n$  tal que

$$\left( 2^{-j_n} \frac{1+|k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \right)^{S'(\sigma_n)} = \frac{1+|k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \text{ y } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \sigma_0. \quad (4.29)$$

Por hipótesis tenemos que  $c_{j,k}$  son no nulos para infinitos  $j$  tales que  $(j, k) \in I$ , o sea

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\} \neq 0$$

para infinitos  $j$  tal que  $(j, k) \in I$ .

En el caso lineal, como consecuencia del Lema 4.2.3, esta hipótesis garantiza que existen infinitos  $j_n$ , con  $(j_n, k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in I$ , tal que

$$\left( 2^{-j_n} \frac{1+|k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \right)^{S'(\sigma_0)} = \frac{1+|k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}}.$$

Por lo tanto se cumple lo que planteamos en (4.29) para  $\sigma_n = \sigma_0$ .

En el caso no lineal la construcción de la sucesión  $(j_n, k_n)$  se lleva a cabo de la siguiente forma:

Como  $S'(\sigma_0) < 0$  resulta que  $\frac{S'(\sigma_0)}{S'(\sigma_0)-1} \in [0, 1)$ . Por lo tanto, existe una subsucesión  $(r_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$  de la sucesión  $(r_m)_{m \in \mathbb{N}}$  densa y numerable en  $\text{Im} \left( \frac{S'(\sigma)}{S'(\sigma)-1} \right)$ , tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{m_n} = \frac{S'(\sigma_0)}{S'(\sigma_0) - 1}.$$

Como los conjuntos  $\Lambda_{m_n}$  son infinitos podemos elegir  $j_n \in \Lambda_{m_n}$  una sucesión estrictamente creciente y  $k_n = k_{j_n} = \lceil 2^{j_n r_{m_n}} \rceil$ .

Así  $(j_n, k_n) \in I$  y

$$2^{j_n r_{m_n}} \leq 1 + |k_n| \leq 1 + 2^{j_n r_{m_n}} \leq 2 \cdot 2^{j_n r_{m_n}}.$$

Es decir que  $1 + |k_n| = K_n \cdot 2^{j_n r_{m_n}}$  con  $1 \leq K_n \leq 2$ .

Por otro lado, teniendo en cuenta la hipótesis  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j, k_j})}{j} = 0$ , para  $(j, k_j) \in I$ , tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \left( \frac{1+|k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \right)}{\log_2 \left( 2^{-j_n} \frac{1+|k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \right)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(1+|k_n|) - \log_2(\lambda_{j_n, k_n})}{-j_n + \log_2(1+|k_n|) - \log_2(\lambda_{j_n, k_n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{j_n \left( \frac{K_n}{j_n} + r_{m_n} - \frac{\log_2(\lambda_{j_n, k_n})}{j_n} \right)}{j_n \left( \frac{K_n}{j_n} + r_{m_n} - 1 - \frac{\log_2(\lambda_{j_n, k_n})}{j_n} \right)} \\ &= S'(\sigma_0). \end{aligned}$$

Como  $S$  es estrictamente cóncava hacia abajo, la función  $S' : \mathbb{R} \rightarrow \text{Im}(S')$  es estricta-

mente decreciente y en consecuencia biyectiva. Entonces existe  $\sigma_n$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n = \sigma_0 \text{ y } S'(\sigma_n) = \frac{\log_2 \left( \frac{1+|k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \right)}{\log_2 \left( 2^{-j_n} \frac{1+|k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \right)} \text{ para } n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N},$$

que es equivalente a lo planteado en (4.29).

Además, podemos tomar  $n_0$  tal que se verifica

$$1 \leq \frac{1 + |k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \leq 2^{j_n},$$

para todo  $n \geq n_0$ . Esto es válido pues, dado que  $1 + |k_n| = K_n 2^{j_n r_{m_n}}$  con  $1 \leq K_n \leq 2$ , si aplicamos  $\log_2(\cdot)$  a la expresión  $\frac{1+|k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}}$  y dividimos por  $j_n$  obtenemos que

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2 \left( \frac{1+|k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \right)}{j_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{K_n}{j_n} + r_{m_n} - \frac{\log_2(\lambda_{j_n, k_n})}{j_n} \right) = \frac{S'(\sigma_0)}{S'(\sigma_0) - 1} < 1.$$

En definitiva se cumplen las condiciones de la primer igualdad de la fórmula (4.27) con  $\sigma_{j_n, k_n} = \sigma_n$  (en el caso lineal  $\sigma_n = \sigma_0$ ) y entonces vale que

$$|c_{j_n, k_n}| = \mathcal{C}_{j_n, k_n} (2^{-j_n})^{S(\sigma_n)} \left( \frac{1 + |k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \right)^{S(\sigma_n) - \sigma_n}.$$

En consecuencia, la desigualdad de la fórmula (4.28), se reescribe para  $n \geq n_0$ ,  $j = j_n$  y  $k = k_n$ , como

$$\mathcal{C}_{j_n, k_n} (2^{-j_n})^{S(\sigma_n)} \left( \frac{1 + |k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \right)^{S(\sigma_n) - \sigma_n} \leq C 2^{-j_n(s_0 + \varepsilon)} (1 + |k_n|)^{s_0 + \varepsilon - \sigma_0}.$$

O equivalentemente,

$$\mathcal{C}_{j_n, k_n} \leq C 2^{-j_n(s_0 - S(\sigma_n))} 2^{-j_n \varepsilon} (1 + |k_n|)^{s_0 - \sigma_0 - S(\sigma_n) + \sigma_n} (1 + |k_n|)^\varepsilon (\lambda_{j_n, k_n})^{S(\sigma_n) - \sigma_n}.$$

Aplicando  $\log_2(\cdot)$  y dividiendo por  $j_n$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j_n, k_n})}{j_n} &\leq \frac{\log_2(C)}{j_n} - (s_0 - S(\sigma_n)) - \varepsilon + \frac{\log_2(1 + |k_n|)}{j_n} (s_0 - \sigma_0 - S(\sigma_n) + \sigma_n) + \\ &\quad + \frac{\log_2(1 + |k_n|)}{j_n} \varepsilon + \frac{\log_2(\lambda_{j_n, k_n})}{j_n} (S(\sigma_n) - \sigma_n). \end{aligned}$$

Recordando que  $j_n$  y  $k_n$  fueron seleccionados tales que  $(j_n, k_n) \in I$ , es decir  $1 + |k_n| =$

$K_n 2^{j_n r_{m_n}}$ , con  $1 \leq K_n \leq 2$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\log_2(C_{j_n, k_n})}{j_n} &\leq \frac{\log_2(C)}{j_n} - (s_0 - S(\sigma_n)) - \varepsilon + \left( \frac{\log_2(K_n)}{j_n} + r_{m_n} \right) (s_0 - \sigma_0 - S(\sigma_n) + \sigma_n) + \\ &+ \left( \frac{\log_2(K_n)}{j_n} + r_{m_n} \right) \varepsilon + \frac{\log_2(\lambda_{j_n, k_n})}{j_n} (S(\sigma_n) - \sigma_n). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Entonces, considerando las hipótesis sobre  $\mathcal{C}_{j, k_j}$  y  $\lambda_{j, k_j}$ , para  $(j, k_j) \in I$ ,

$$\lim_{\substack{j \rightarrow +\infty \\ (j, k_j) \in I}} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j, k_j})}{j} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{j \rightarrow +\infty \\ (j, k_j) \in I}} \frac{\log_2(\lambda_{j, k_j})}{j} = 0,$$

y aplicando límite cuando  $n \rightarrow +\infty$  en (4.30), obtenemos

$$0 \leq \varepsilon \left( \frac{S'(\sigma_0)}{S'(\sigma_0) - 1} - 1 \right) = \varepsilon \frac{1}{S'(\sigma_0) - 1},$$

lo cual es absurdo pues  $\varepsilon \frac{1}{S'(\sigma_0) - 1} < 0$ .

**B)** Mostremos que  $f \in C_0^{(s_0 - \varepsilon, \sigma_0 - (s_0 - \varepsilon))}$  para todo  $\varepsilon > 0$ :

Basta probar que existe  $C > 0$  tal que

$$|c_{j, k}| \leq C 2^{-j(s_0 - \varepsilon)} (1 + |k|)^{s_0 - \varepsilon - \sigma_0} \forall j, k \in \mathbb{Z} : j \geq 0, |k| < 2^j. \quad (4.31)$$

En realidad, es suficiente probar (4.31) para  $j \geq n_0$ , con  $n_0 \in \mathbb{N}$ , pues la constante  $C$  se puede ajustar para finitos  $j$ .

Por lo tanto basta con hallar  $n_0 \in \mathbb{N}$  y  $C > 0$  tal que

$$\frac{|c_{j, k}|}{2^{-j(s_0 - \varepsilon)} (1 + |k|)^{s_0 - \varepsilon - \sigma_0}} \leq C \quad \forall j \geq n_0 \in \mathbb{N}, |k| < 2^j. \quad (4.32)$$

En (4.27) computamos los coeficientes wavelet  $c_{j, k}$  a partir de distintas fórmulas. Analicemos estos diversos cálculos de  $c_{j, k}$  y mostremos que el razonamiento para probar que  $\frac{|c_{j, k}|}{2^{-j(s_0 - \varepsilon)} (1 + |k|)^{s_0 - \varepsilon - \sigma_0}}$  es acotada es similar en todos los casos.

■ En el caso

$$|c_{j, k}| = \mathcal{C}_{j, k} (2^{-j})^{S(\sigma_{j, k})} \left( \frac{1 + |k|}{\lambda_{j, k}} \right)^{S(\sigma_{j, k}) - \sigma_{j, k}},$$

con  $\sigma_{j, k}$  tal que

$$\left( 2^{-j} \frac{1 + |k|}{\lambda_{j, k}} \right)^{S(\sigma_{j, k})} = \frac{1 + |k|}{\lambda_{j, k}} \quad \text{o sea} \quad 1 + |k| = \lambda_{j, k} 2^j \frac{S'(\sigma_{j, k})}{S'(\sigma_{j, k}) - 1}, \quad (4.33)$$

basta con mostrar que

$$\frac{\mathcal{C}_{j,k} (2^{-j})^{S(\sigma_{j,k})} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma_{j,k})-\sigma_{j,k}}}{2^{-j(s_0-\varepsilon)} (1+|k|)^{s_0-\varepsilon-\sigma_0}}$$

es acotada para  $j \geq n_0$  y  $|k| < 2^j$ , para probar la desigualdad de (4.32).

Reemplazando  $1+|k|$  por la fórmula obtenida en (4.33) y reformulando este último cociente, bastaría con probar que

$$\mathcal{C}_{j,k} 2^{-j(S(\sigma_{j,k})-(s_0-\varepsilon))} \left( 2^j \frac{S'(\sigma_{j,k})}{S'(\sigma_{j,k})-1} \right)^{S(\sigma_{j,k})-\sigma_{j,k}+\sigma_0-s_0+\varepsilon} (\lambda_{j,k})^{\sigma_0-s_0+\varepsilon} \quad (4.34)$$

es acotada.

■ La fórmula

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} (2^{-j})^{S(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma}$$

es válida si

$$\left( 2^{-j} \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S'(\sigma)} < \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \quad \forall \sigma \quad \text{es decir que} \quad \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S'(\sigma)-1} < 2^{jS'(\sigma)} \quad \forall \sigma,$$

o equivalentemente, por ser  $S'(\sigma) - 1 < 0$ ,

$$1+|k| > \lambda_{j,k} 2^{j \frac{S'(\sigma)}{S'(\sigma)-1}} \quad \forall \sigma.$$

Por otro lado, como  $S(\sigma) - \sigma \rightarrow -\infty$  cuando  $\sigma \rightarrow +\infty$ , es posible elegir  $\bar{\sigma}$ , suficientemente grande, tal que

$$S(\bar{\sigma}) - \bar{\sigma} - s_0 + \sigma_0 + \varepsilon < 0.$$

Y, en particular,

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\} \leq \mathcal{C}_{j,k} (2^{-j})^{S(\bar{\sigma})} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\bar{\sigma})-\bar{\sigma}}.$$

Por lo tanto, para probar la desigualdad (4.32), basta con probar que

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{C}_{j,k} (2^{-j})^{S(\bar{\sigma})} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\bar{\sigma})-\bar{\sigma}}}{2^{-j(s_0-\varepsilon)} (1+|k|)^{s_0-\varepsilon-\sigma_0}} = \\ & = \mathcal{C}_{j,k} (2^{-j})^{S(\bar{\sigma})-(s_0-\varepsilon)} (1+|k|)^{S(\bar{\sigma})-\bar{\sigma}-s_0+\sigma_0+\varepsilon} \lambda_{j,k}^{\bar{\sigma}-S(\bar{\sigma})}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

es acotada para  $j \geq n_0$  y  $|k| < 2^j$ .

Como  $1 + |k| > \lambda_{j,k} 2^j \frac{S'(\bar{\sigma})}{S'(\bar{\sigma})-1}$  y  $S(\bar{\sigma}) - \bar{\sigma} - s_0 + \sigma_0 + \varepsilon < 0$  resulta que la expresión (4.35) está acotada por

$$\mathcal{C}_{j,k} 2^{-j(S(\bar{\sigma})-(s_0-\varepsilon))} \left( 2^j \frac{S'(\bar{\sigma})}{S'(\bar{\sigma})-1} \right)^{S(\bar{\sigma})-\bar{\sigma}+\sigma_0-s_0+\varepsilon} (\lambda_{j,k})^{\sigma_0-s_0+\varepsilon} \quad (4.36)$$

■ Análogamente, la fórmula

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} (2^{-j})^{S(\sigma)} \left( \frac{1 + |k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma}$$

es válida si

$$1 + |k| < \lambda_{j,k} 2^j \frac{S'(\sigma)}{S'(\sigma)-1} \quad \forall \sigma.$$

Si elegimos  $\bar{\sigma}$ , suficientemente negativo, tal que

$$S(\bar{\sigma}) - \bar{\sigma} - s_0 + \sigma_0 + \varepsilon > 0,$$

tenemos que

$$(1 + |k|)^{S(\bar{\sigma})-\bar{\sigma}-s_0+\sigma_0+\varepsilon} < \left( \lambda_{j,k} 2^j \frac{S'(\bar{\sigma})}{S'(\bar{\sigma})-1} \right)^{S(\bar{\sigma})-\bar{\sigma}-s_0+\sigma_0+\varepsilon}.$$

Por lo tanto, podemos acotar  $\frac{|c_{j,k}|}{2^{-j(s_0-\varepsilon)} (1 + |k|)^{s_0-\varepsilon-\sigma_0}}$  por

$$\mathcal{C}_{j,k} 2^{-j(S(\bar{\sigma})-(s_0-\varepsilon))} \left( 2^j \frac{S'(\bar{\sigma})}{S'(\bar{\sigma})-1} \right)^{S(\bar{\sigma})-\bar{\sigma}+\sigma_0-s_0+\varepsilon} (\lambda_{j,k})^{\sigma_0-s_0+\varepsilon}. \quad (4.37)$$

En definitiva, debemos acotar las fórmulas (4.34), (4.36) y (4.37). Observemos que las fórmulas (4.36) y (4.37) son equivalentes a la fórmula (4.34) con  $\sigma_{j,k} = \bar{\sigma}$  para todo  $j, k$ , pues  $\bar{\sigma}$  sólo depende de  $\sigma_0, s_0$  y  $\varepsilon$ , en cada caso.

Por lo tanto, mostremos que la fórmula (4.34), que puede reformularse como

$$\mathcal{C}_{j,k} (\lambda_{j,k})^{(\sigma_0-s_0+\varepsilon)} 2^j \left[ \frac{S'(\sigma_{j,k})(\sigma_0-\sigma_{j,k})+S(\sigma_{j,k})-s_0+\varepsilon}{S'(\sigma_{j,k})-1} \right],$$

es acotada para todo  $j \geq n_0$  y  $|k| < 2^j$ .

Aplicando  $\log_2(\cdot)$  a esta la última expresión obtenemos

$$\log_2(\mathcal{C}_{j,k}) + \log_2(\lambda_{j,k}) (\sigma_0 - s_0 + \varepsilon) + j \left[ \frac{S'(\sigma_{j,k})(\sigma_0 - \sigma_{j,k}) + S(\sigma_{j,k}) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma_{j,k}) - 1} \right],$$

o bien,

$$j \left[ \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k})}{j} + \frac{\log_2(\lambda_{j,k})}{j} (\sigma_0 - s_0 + \varepsilon) + \frac{S'(\sigma_{j,k})(\sigma_0 - \sigma_{j,k}) + S(\sigma_{j,k}) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma_{j,k}) - 1} \right]. \quad (4.38)$$

Entonces, como  $|k| < 2^j$ , en virtud de la hipótesis

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k})}{j} + (\sigma_0 - s_0 + \varepsilon) \frac{\log_2(\lambda_{j,k})}{j} \right) \leq 0,$$

y del Lema 4.3.2, que garantiza que

$$\frac{S'(\sigma_{j,k})(\sigma_0 - \sigma_{j,k}) + S(\sigma_{j,k}) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma_{j,k}) - 1} < B < 0 \quad \text{para todo } \sigma_{j,k},$$

podemos afirmar que

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \log_2 \left( \mathcal{C}_{j,k} (\lambda_{j,k})^{(\sigma_0 - s_0 + \varepsilon)} 2^j \left[ \frac{S'(\sigma_{j,k})(\sigma_0 - \sigma_{j,k}) + S(\sigma_{j,k}) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma_{j,k}) - 1} \right] \right) = -\infty,$$

lo cual implica que existe una constante  $M > 0$  tal que

$$0 < \mathcal{C}_{j,k} (\lambda_{j,k})^{(\sigma_0 - s_0 + \varepsilon)} 2^j \left[ \frac{S'(\sigma_{j,k})(\sigma_0 - \sigma_{j,k}) + S(\sigma_{j,k}) - s_0 + \varepsilon}{S'(\sigma_{j,k}) - 1} \right] < M,$$

para  $j$  y  $k \in \mathbb{Z}$  tales que  $j \geq 0$ ,  $|k| < 2^j$ . ■

En el último teorema dimos condiciones suficientes sobre los coeficientes wavelet  $c_{j,k}$  de una función o distribución  $f$  para que  $S(\sigma)$  sea la frontera 2-microlocal de  $f$  en  $x_0$ .

Por lo tanto es natural preguntarse: ¿Son estas condiciones necesarias?

En el siguiente teorema damos condiciones necesarias y suficientes para caracterizar completamente a las funciones (o distribuciones) con frontera 2-microlocal  $S(\sigma)$  en  $x_0$ , en el caso en que  $S(\sigma)$  es lineal. Con lo cual también quedará probada la vuelta de la Proposición 4.3.1. Más precisamente,

**Teorema 4.3.6** *Sea la función  $S(\sigma) = \alpha + \frac{\gamma}{1-\gamma}(\alpha - \sigma)$  con  $0 \leq \gamma < 1$ . Sea  $\psi$  cualquier wavelet en la clase de Schwartz, con infinitos momentos nulos, y sea  $f$  definida por sus coeficientes wavelet:*

$$f(x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}, |k - 2^j x_0| < 2^j} c_{j,k} \psi(2^j x - k).$$

La frontera 2-microlocal de  $f$  en  $x_0$  es  $S(\sigma)$  **si y sólo si** para  $j \geq 0$  y  $|k - 2^j x_0| < 2^j$ ,

$$|c_{j,k}| \leq \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1 + |k - 2^j x_0|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma) - \sigma} \right\}, \quad (4.39)$$



con  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  sucesiones positivas tales que:

(i) Para todo  $C \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} + C \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} \right) \leq 0.$$

(ii) Existe una sucesión  $(j_n, k_n)$ , con  $j_n$  estrictamente creciente, tal que para  $(j_n, k_n)$  se verifica la **igualdad** en (4.39), con  $c_{j_n, k_n} \neq 0$ , y

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j_n, k_n})}{j_n} = 0 \quad y \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j_n, k_n})}{j_n} = 0.$$

**Observación 4.3.7** Observemos que si se verifican las hipótesis del Teorema 4.3.3 para  $S(\sigma)$  es lineal, también se verifican las hipótesis de la vuelta en este teorema. En el Teorema 4.3.3 la sucesión  $(j_n, k_n)$  verifica además que  $(j_n, k_n) \in I$ .

**Demostración.** Sin pérdida de generalidad consideremos  $x_0 = 0$ .

$\Leftarrow$ ) La demostración es similar a la del Teorema 4.3.3. Los argumentos que usamos sobre el conjunto de subíndices  $I$  pueden adaptarse para los subíndices  $(j_n, k_n)$  en el caso en que  $S$  es lineal. En este caso se simplifica la prueba de la parte A) del Teorema 4.3.3 pues por hipótesis  $c_{j_n, k_n} \neq 0$  y

$$|c_{j_n, k_n}| = \mathcal{C}_{j_n, k_n} \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-j_n S(\sigma)} \left( \frac{1 + |k_n|}{\lambda_{j_n, k_n}} \right)^{S(\sigma) - \sigma} \right\}.$$

En consecuencia, por el Lema 4.2.3, tenemos que  $|c_{j_n, k_n}| = \mathcal{C}_{j_n, k_n} 2^{-j_n \alpha}$  con  $1 + |k_n| = \lambda_{j_n, k_n} 2^{j_n \gamma}$ .

$\Rightarrow$ ) Para probar la necesidad de las condiciones debemos mostrar, en primer lugar, que los coeficientes wavelet de  $f$  se pueden describir con la fórmula (4.39). Para simplificar consideremos la igualdad en (4.39) y reformulemos  $|c_{j,k}|$ , los coeficientes wavelet de  $f$ , para que sean de la forma

$$\mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-j S(\sigma)} \left( \frac{1 + |k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma) - \sigma} \right\} = \begin{cases} \mathcal{C}_{j,k} 2^{-j \alpha} & \text{si } 1 + |k| = \lambda_{j,k} 2^{j \gamma} \\ 0 & \text{si } 1 + |k| \neq \lambda_{j,k} 2^{j \gamma}. \end{cases}$$

Si  $|c_{j,k}| \neq 0$  basta elegir

$$\lambda_{j,k} = \frac{1 + |k|}{2^{j \gamma}} \quad y \quad \mathcal{C}_{j,k} = \frac{|c_{j,k}|}{2^{-j \alpha}} \quad (4.40)$$

para que se cumpla la igualdad de la fórmula (4.39). Y, si  $|c_{j,k}| = 0$  basta tomar

$\lambda_{j,k} \neq \frac{1+|k|}{2^{j\gamma}}$  para que la fórmula (4.39) sea nula. Por ejemplo, si

$$\lambda_{j,k} = 2^j \quad \text{y} \quad \mathcal{C}_{j,k} = 2^{-j^2}, \quad (4.41)$$

la fórmula (4.39) se anula. Probemos que las sucesiones  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  verifican las condiciones (i) y (ii).

■ Condición (i):

Si  $c_{j,k} = 0$  es inmediato probar que las sucesiones definidas en (4.41) verifican (i).

Analicemos el caso en que  $c_{j,k} \neq 0$ . Por hipótesis la frontera 2-microlocal de  $f$  en 0 es  $S(\sigma)$  es decir que  $S(\sigma_0) = \sup\{s : f \in C_{x_0}^{s, \sigma_0-s}\}$  para todo  $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ , con lo cual para todo  $\varepsilon > 0$  y para todo  $(\sigma, s_0) \in \text{Graf}(S)$  tenemos que

$$1) f \notin C_0^{s_0+\varepsilon, \sigma_0-(s_0+\varepsilon)} \quad \text{y} \quad 2) f \in C_0^{s_0-\varepsilon, \sigma_0-(s_0-\varepsilon)}.$$

A partir de 2) tenemos que para todo  $j \geq 0$ ,  $|k| < 2^j$  existe  $C > 0$  tal que

$$\frac{|c_{j,k}|}{2^{-j(s_0-\varepsilon)} (1+|k|)^{s_0-\varepsilon-\sigma_0}} \leq C.$$

Considerando las definiciones de (4.40) esto es:

$$\frac{\mathcal{C}_{j,k} 2^{-j\alpha}}{2^{-j(s_0-\varepsilon)} (\lambda_{j,k} 2^{j\gamma})^{s_0-\varepsilon-\sigma_0}} \leq C,$$

o sea,

$$\mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{-s_0+\varepsilon+\sigma_0} 2^{j((1-\gamma)s_0-\alpha+\gamma\sigma_0+\varepsilon(\gamma-1))} \leq C.$$

Usando que  $s_0 = S(\sigma_0) = \alpha + \frac{\gamma}{1-\gamma}(\alpha - \sigma_0)$  i.e.  $(1-\gamma)s_0 - \alpha + \gamma\sigma_0 = 0$ , reformulamos la última desigualdad como:

$$\mathcal{C}_{j,k} \lambda_{j,k}^{-s_0+\varepsilon+\sigma_0} 2^{j\varepsilon(\gamma-1)} \leq C.$$

Si aplicamos  $\log_2(\cdot)$  y dividimos por  $j$  obtenemos

$$\frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k})}{j} + \frac{\log_2(\lambda_{j,k})}{j}(\sigma_0 - s_0 + \varepsilon) + \varepsilon(\gamma - 1) \leq \frac{\log_2(C)}{j}.$$

Tomando límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$  y luego límite superior, cuando  $j \rightarrow +\infty$ , obtenemos

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} + (\sigma_0 - s_0) \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} \right) \leq 0,$$

y como  $\sigma_0 - s_0$  toma todos los valores reales queda probada la condición i).

- Condición (ii):

Sea  $J := \{(j, k) : 1 + |k| = \lambda_{j,k} 2^{j\gamma}, j \geq 0, |k| < 2^j\}$ .

A partir de la condición (i), tomando  $C = 0$ , tenemos que

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} \leq 0 \text{ para } (j, k_j) \in J.$$

Para probar (ii) necesitamos construir  $(j_n, k_n) \in J$ ,  $j_n$  estrictamente creciente tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j_n, k_n})}{j_n} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j_n, k_n})}{j_n} = 0.$$

Para ello mostraremos que existe  $(j, k_j) \in J$  tal que ,

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = 0.$$

Razonemos por el absurdo y supongamos que para toda sucesión  $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $(j, k_j) \in J$ , existe  $\delta < 0$  tal que

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = \delta((k_j)_{j \in \mathbb{N}}) < \delta.$$

Tomando  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\delta < \varepsilon(\gamma - 1) < 0 \quad \text{i.e.} \quad \varepsilon < \frac{\delta}{\gamma - 1},$$

tenemos que

$$\frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} < \delta < \varepsilon(\gamma - 1) \quad \text{i.e.} \quad \mathcal{C}_{j,k_j} < 2^{j\varepsilon(\gamma-1)} \quad (4.42)$$

para todo  $j \geq j_0$  y para toda sucesión  $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $(j, k_j) \in J$ .

Teniendo en cuenta que  $(1 - \gamma)s_0 = \alpha - \gamma\sigma_0$  obtenemos que

$$\varepsilon(\gamma - 1) = \alpha - (s_0 + \varepsilon) + \gamma(s_0 + \varepsilon - \sigma_0).$$

Con lo cual reformulamos la desigualdad de la fórmula (4.42) como

$$\mathcal{C}_{j,k_j} < 2^{j\alpha} 2^{-j(s_0+\varepsilon)} 2^{j\gamma(s_0+\varepsilon-\sigma_0)} \quad \text{i.e.} \quad \mathcal{C}_{j,k_j} 2^{-j\alpha} < 2^{-j(s_0+\varepsilon)} (2^{j\gamma})^{s_0+\varepsilon-\sigma_0}. \quad (4.43)$$

Luego, para  $c_{j,k} \neq 0$  es decir  $|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} 2^{-j\alpha}$  y  $1 + |k_j| = \lambda_{j,k_j} 2^{j\gamma}$ , la fórmula

(4.43) es equivalente a

$$|c_{j,k_j}| < 2^{-j(s_0+\varepsilon)} \left( \frac{1+|k_j|}{\lambda_{j,k_j}} \right)^{s_0+\varepsilon-\sigma_0} = 2^{-j(s_0+\varepsilon)} (1+|k_j|)^{s_0+\varepsilon-\sigma_0} \lambda_{j,k_j}^{\sigma_0-s_0-\varepsilon}.$$

Por lo tanto, para  $\varepsilon < \frac{\delta}{\gamma-1}$  y  $(\sigma_0, s_0)$  tal que  $\sigma_0 - s_0 - \varepsilon = 0$  tenemos que

$$|c_{j,k_j}| < 2^{-j(s_0+\varepsilon)} (1+|k_j|)^{s_0+\varepsilon-\sigma_0},$$

para todo  $j \geq j_0$  y para toda sucesión tal que  $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$  tal que  $(j, k_j) \in J$ .

En el caso en que  $c_{j,k} = 0$  la desigualdad es obvia. Con lo cual existe  $C > 0$  tal que

$$|c_{j,k}| \leq C 2^{-j(s_0+\varepsilon)} (1+|k|)^{s_0+\varepsilon-\sigma_0}$$

para todo  $j \geq 0$  y  $k \in \mathbb{Z}$ :  $|k| < 2^j$ , es decir que  $f \in C_0^{s_0+\varepsilon, \sigma_0-(s_0+\varepsilon)}$ . Este hecho contradice la hipótesis 1) y el absurdo surge de suponer  $\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = \delta((k_j)_{j \in \mathbb{N}}) < \delta < 0$ , para toda  $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $(j, k_j) \in J$ .

En consecuencia para todo  $m \in \mathbb{N}$  existe  $(j, k_j^{(m)}) \in J$  tal que

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j^{(m)}})}{j} > -\frac{1}{m}.$$

Con lo cual existe  $(j_1, k_{j_1}^{(1)})$  tal que  $\frac{\log_2(\mathcal{C}_{j_1, k_{j_1}^{(1)}})}{j_1} > -1$  y, en general, existe  $j_m > j_{m-1}$  tal que  $\frac{\log_2(\mathcal{C}_{j_m, k_{j_m}^{(m)}})}{j_m} > -\frac{1}{m}$ .

Por lo tanto, seleccionando  $(j_m, k_m) = (j_m, k_{j_m}^{(m)})$  tenemos que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j_m, k_m})}{j_m} = 0.$$

Por otro lado, como

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} + C \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} \right) \leq 0,$$

para todo  $(k_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $(j, k_j) \in J$  y para todo  $C$ , obtenemos

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j_m, k_m})}{j_m} + C \frac{\log_2(\lambda_{j_m, k_m})}{j_m} \right) \leq 0 \quad \text{para todo } C.$$

En consecuencia,

$$\liminf_{m \rightarrow +\infty} C \frac{\log_2(\lambda_{j_m, k_m})}{j_m} \leq 0 \quad \text{para todo } C,$$

lo cual sólo es válido si  $\liminf_{m \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j_m, k_m})}{j_m} = 0$ . Esto implica que existe una subsucesión  $(j_{m_n}, k_{m_n}) \in J$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j_{m_n}, k_{m_n}})}{j_{m_n}} = 0.$$

Por lo tanto basta elegir  $(j_n, k_n) = (j_{m_n}, k_{m_n})$  para que se verifiquen las condiciones planteadas en *ii*).

■

### 4.3.3. Conexión con el resultado propuesto por J. Lévy Véhel y S. Seuret

En [46] J. Lévy Véhel y S. Seuret presentan resultados sobre la prescripción de la frontera 2-microlocal en un punto  $x_0$  y también en simultáneo para un conjunto de puntos  $\{(x_0)_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , denso y numerable en  $[0, 1]$ . Trabajan en el plano  $(s', \sigma)$  y la frontera 2-microlocal está determinada por  $\sigma = g(s')$  y para la prescripción en un punto proponen el siguiente teorema.

**Teorema 4.3.8** (*J. Lévy Véhel y S. Seuret, 2004*)

*Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función cóncava hacia abajo, no decreciente, con pendiente entre 0 y 1, tal que  $g(0) > 0$ . Existe una función  $f$  tal que la frontera 2-microlocal de  $f$  en 0 es  $g(s')$ .*

La construcción de la función  $f$ , definida en el  $[0, 1]$ , se desarrolla en la demostración del teorema y se define a través de los coeficientes wavelet de la siguiente forma: para  $j > 0$  y  $k > 0$ ,

$$c_{j,k} = 2^{-j\beta_{j,k}},$$

con

$$\beta_{j,k} = \inf_{\rho \in E_{j,k}} \chi_0^j(\rho),$$

donde

$$E_{j,k} = \{\rho : 0 \leq \rho \leq 1 \text{ y } k = \lceil 2^{j(1-\rho)} \rceil\},$$

y

$$\chi_0^j(\rho) = \min\{j, -g^*(\rho)\},$$

con  $g^*$  la transformada de Legendre para funciones cóncavas hacia abajo, definida por:

$$g^*(\rho) = \inf_{s'} \{\rho s' - g(s')\}.$$

Esta definición de los coeficientes puede adaptarse a la dada en fórmula propuesta en el Teorema 4.3.3. En primer lugar, para fijar ideas, mostraremos cómo adaptamos esta definición a la fórmula (4.26) para el caso concreto en que  $g$  es lineal. Luego analizaremos el caso general.

### Caso $g$ lineal:

Si  $g(s) = Ms' + d$  tenemos que

$$g^*(\rho) = \inf_{s'} \{\rho s' - Ms' - d\} = \begin{cases} -d & \text{si } \rho = M \\ -\infty & \text{si } \rho \neq M \end{cases},$$

$$\chi_0^j(\rho) = \min\{j, -g^*(\rho)\} = \min\{j, d \text{ ó } +\infty\} = \begin{cases} j & \text{si } \rho = M \text{ y } j \leq d \\ d & \text{si } \rho = M \text{ y } j > d \\ j & \text{si } \rho \neq M \end{cases}$$

y

$$\beta_{j,k} = \inf_{\rho \in E_{j,k}} \chi_0^j(\rho) = \begin{cases} j & \text{si } M \in E_{j,k} \text{ y } j \leq d \\ d & \text{si } M \in E_{j,k} \text{ y } j > d \\ j & \text{si } M \notin E_{j,k}. \end{cases}$$

En consecuencia la definición de la función  $f$  definida en [46], cuya frontera 2-microlocal es  $g$ , está dada por los coeficientes wavelet

$$c_{j,k} = 2^{-j\beta_{j,k}} = \begin{cases} 2^{-j^2} & \text{si } k = [2^{j(1-M)}] \text{ y } j \leq d \\ 2^{-jd} & \text{si } k = [2^{j(1-M)}] \text{ y } j > d \\ 2^{-j^2} & \text{si } k \neq [2^{j(1-M)}]. \end{cases} \quad (4.44)$$

Si elegimos apropiadamente a las sucesiones  $\mathcal{C}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  podemos describir a los coeficientes definidos en la fórmula (4.44) a través de la fórmula (4.26), propuesta en el

Teorema 4.3.3.

Para ello describamos la curva  $s = g(s')$  en el plano  $(\sigma, s)$  como

$$S(\sigma) = d + \frac{1-M}{M}(d-\sigma).$$

Por la Observación 4.2.4, la fórmula

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\}$$

se traduce en

$$|c_{j,k}| = \mathcal{C}_{j,k} 2^{-jd} \text{ si } 1+|k| = \lambda_{j,k} 2^{j(1-M)}$$

y sino  $|c_{j,k}| = 0$ .

Si, para  $j > 0$  y  $k > 0$  elegimos

$$\lambda_{j,k} = \frac{1+k}{2^{j(1-M)}} \text{ y } \mathcal{C}_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = [2^{j(1-M)}] \text{ y } j > d \\ 2^{-j^2+jd} & \text{si } k = [2^{j(1-M)}] \text{ y } j \leq d \text{ ó } k \neq [2^{j(1-M)}] \end{cases} \quad (4.45)$$

y para  $k \leq 0$  consideramos

$$c_{j,k} = 0 \leq \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\},$$

llegamos a la definición dada por J. Lévy Véhel y S. Seuret en [46] de la fórmula (4.44).

Mostremos que ambas sucesiones verifican las hipótesis del Teorema 4.3.3. En este caso el conjunto de subíndices  $I$  es

$$I = \{(j, k_j) : j \in \Lambda_m \text{ y } |k_j| = [2^{jr_m}]\},$$

con  $\{r_m\}$  la constante que resulta ser la  $\text{Im} \left( \frac{S'(\sigma)}{S'(\sigma)-1} \right) \subseteq [0, 1]$ , es decir

$$\text{Im} \left( \frac{S'(\sigma)}{S'(\sigma)-1} \right) = \frac{\frac{M-1}{M}}{\frac{M-1}{M}-1} = 1-M.$$

- Si  $k_j = [2^{j(1-M)}]$  y  $j > d$ :

Por la elección de las fórmulas dadas en (4.45) tenemos que  $\frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = \frac{\log_2(1)}{j} = 0$

y que  $\lambda_{j,k_j} = \frac{1+[2^{j(1-M)}]}{2^{j(1-M)}}$  resulta acotada entre 1 y 2, por lo tanto se verifica que

$$\lim_{\substack{j \rightarrow +\infty \\ (j,k_j) \in I}} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = \lim_{\substack{j \rightarrow +\infty \\ (j,k_j) \in I}} \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} = 0.$$

- Si  $k = [2^{j(1-M)}]$  y  $j \leq d$  ó  $k \neq [2^{j(1-M)}]$ :  
Sólo consideramos el caso  $k \neq [2^{j(1-M)}]$  pues analizamos límites con  $j \rightarrow +\infty$ .  
Observando las fórmulas de (4.45) tenemos que

$$\frac{1}{2^{j(1-M)}} \leq \frac{1+k}{2^{j(1-M)}} \leq \frac{2^j}{2^{j(1-M)}} = 2^{jM},$$

con lo cual  $\frac{\log_2(\lambda_{j,k})}{j}$  es acotada. Por otro lado

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k})}{j} = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(2^{-j^2+jd})}{j} = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{-j^2+jd}{j} = -\infty.$$

En consecuencia,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} + C \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} \right) \leq 0.$$

### Caso $g$ no lineal:

Sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función creciente con derivada entre 0 y 1 y  $g''(x) < 0$ , es decir  $g$  con hipótesis análogas a las de  $S(\sigma)$  en el Teorema 4.3.3.

**Observación 4.3.9** *Se puede probar que si  $g$  es dos veces derivable, creciente con derivada entre 0 y 1 y  $g''(x) < 0$ , entonces*

- 1)  $-g^*$  es estrictamente cóncava hacia arriba y alcanza un mínimo en  $\rho = g'(0)$ .
- 2)  $\text{sop}(-g^*) = \{\rho : -g^* \neq +\infty\} = \overline{\text{Im}(g')}$ .

1) La transformada de Legendre de una función  $g$  estrictamente cóncava hacia abajo es

$$g^*(\rho) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{\rho x - g(x)\}$$

y resulta ser estrictamente cóncava hacia abajo, con lo cual  $-g^*$  es estrictamente cóncava hacia arriba.

Además, si  $0 \leq \rho_0 \leq 1$ , la función  $\rho_0 x - g(x)$  tiene un extremo en  $x_0$  tal que

$$g'(x_0) = \rho_0,$$

y además resulta ser un mínimo, es decir que  $g^*(\rho_0) = \rho_0 x_0 - g(x_0)$ .

Por otro lado, como  $\rho x - g(x) \Big|_{x=0} = -g(0)$ , tenemos

$$g^*(\rho) \leq -g(0) \quad \forall \rho,$$



más aún  $g^*(\rho)$  alcanza un máximo en  $-g(0)$  pues, si  $g'(0) = \rho_0$  entonces  $g^*(\rho_0) = -g(0)$ .  
En consecuencia,  $-g^*$  alcanza un mínimo en  $\rho_0 = g'(0)$ .

2) Probemos que  $\text{sop}(-g^*) = \{\rho : -g^* \neq +\infty\} = \overline{\text{Im}(g')}$ .

Sea  $\rho \in \overline{\text{Im}(g')}$ . Si  $\rho \in \text{Im}(g')$ , o sea  $\rho = g'(x_0)$ , tenemos que  $g^*(\rho) = \rho x_0 - g(x_0)$  sería finito. Por otro lado, si  $\rho \notin \text{Im}(g')$  equivale a que existe  $x_n \in \mathbb{R}$  tal que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g'(x_n) = \rho.$$

Observemos que este caso sólo se da si  $g(x)$  tiene una asíntota oblicua con pendiente  $\rho$ , o sea que existe  $d$  tal que

$$\rho x_n + d \geq g(x_n),$$

a partir de cierto  $n$ . Si  $g'(x_n) = \rho_n$  entonces las funciones  $\rho_n x - g(x)$  tienen un mínimo que se alcanza en  $x = x_n$  en cada caso, o sea que

$$g^*(\rho_n) = \rho_n x_n - g(x_n).$$

Por lo tanto

$$g^*(\rho_n) \geq \rho_n x_n - g(x_n) \geq (\rho_n - \rho)x_n - d$$

y, como  $(\rho_n - \rho)$  y  $x_n$  tienen el mismo signo, entonces

$$g^*(\rho_n) \geq -d.$$

En consecuencia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^*(\rho_n) = g^*(\rho)$$

es finito.

Además, si  $\rho \notin \overline{\text{Im}(g')}$ , derivando  $\rho x - g(x)$  tenemos  $\rho - g'(x)$ . Entonces, se podrían dar dos situaciones,

$$\rho - g'(x) > M > 0 \quad \forall x \quad \text{o bien} \quad \rho - g'(x) < N < 0 \quad \forall x.$$

En general, por ser  $g$  cóncava hacia abajo, tenemos que

$$g(x) \leq g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0),$$

para todo  $x$  y  $x_0$ .

Y, en particular,

$$g(0) \leq g'(x)(0 - x) + g(x) \quad \text{o bien} \quad g(0) + xg'(x) \leq g(x).$$

Entonces

$$\rho x - g(x) \leq \rho x - g(0) - xg'(x),$$

o equivalentemente

$$\rho x - g(x) \leq (\rho - g'(x))x + D.$$

Si  $\rho - g'(x) > M > 0$ , para todo  $x$ , tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\rho - g'(x))x + D = -\infty.$$

Y, si  $\rho - g'(x) < N < 0$ , para todo  $x$ , resulta que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\rho - g'(x))x + D = -\infty.$$

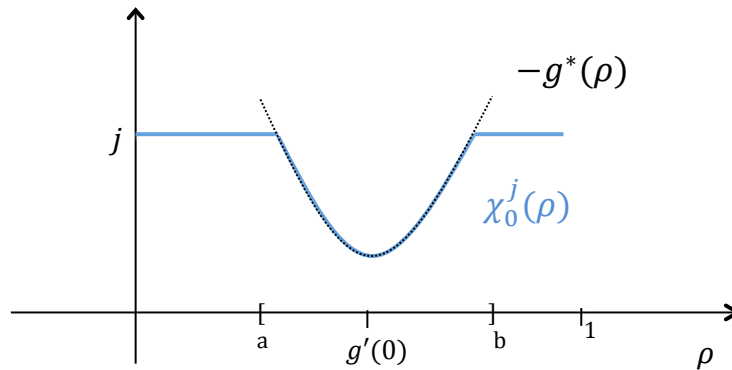
Por lo tanto  $g^*(\rho) = -\infty$ .

Ahora sí, calculemos

$$c_{j,k} = 2^{-j\beta_{j,k}}, \tag{4.46}$$

con  $\beta_{j,k} = \inf_{\rho \in E_{j,k}} \chi_0^j(\rho)$  y  $\chi_0^j(\rho) = \min\{j, -g^*(\rho)\}$ .

La Figura 4.3 es un esquema del gráfico de  $\chi_0^j(\rho)$  y de  $-g^*(\rho)$ .



Obs:  $[a,b] = \text{sop}(g^*)$

Figura 4.3: Gráfico de  $-g^*(\rho)$  y  $\chi_0^j(\rho)$ .

Por lo tanto, si

$$\inf_{\rho \in E_{j,k}} \{-g^*(\rho)\} = -g^*(\rho_{j,k}),$$

se tiene que

$$\beta_{j,k} = \begin{cases} j & \text{si } j \leq -g^*(\rho) \quad \forall \rho \in E_{j,k} \\ -g^*(\rho_{j,k}) & \text{si } j > -g^*(\rho_{j,k}). \end{cases}$$

La Figura 4.4 muestra un esquema de la ubicación de  $\rho_{j,k}$  para distintos intervalos  $E_{j,k}$  del nivel  $j$ .

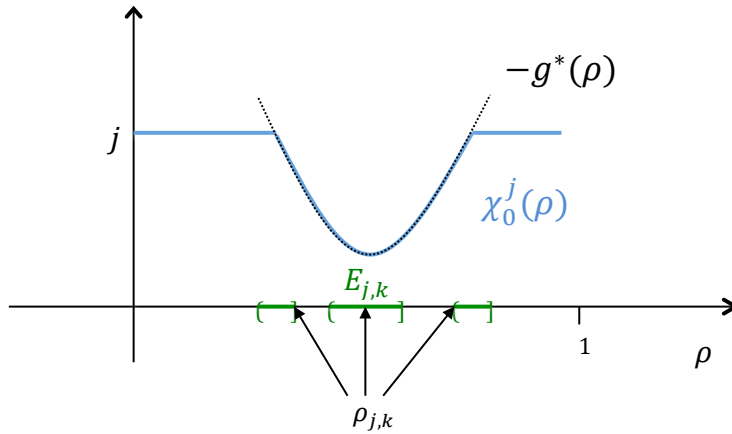


Figura 4.4: Ejemplos de distintos  $E_{j,k}$  y  $\rho_{j,k}$  para el nivel  $j$ .

Y la fórmula de los coeficientes wavelet de la fórmula (4.46) propuesta en [46] resulta ser

$$c_{j,k} = \begin{cases} 2^{-j^2} & \text{si } j \leq -g^*(\rho) \quad \forall \rho \in E_{j,k} \\ 2^{j g^*(\rho_{j,k})} & \text{si } j > -g^*(\rho_{j,k}). \end{cases} \quad (4.47)$$

Análogamente al caso lineal, probaremos que eligiendo apropiadamente sucesiones  $\mathcal{E}_{j,k}$  y  $\lambda_{j,k}$  se pueden describir a los coeficientes de (4.47) con la fórmula (4.26) del Teorema 4.3.3. Ambas sucesiones estarán definidas por distintas fórmulas, conforme si

(1)  $j > -g^*(\rho_{j,k})$ , (2)  $j \leq -g^*(\rho_{j,k})$  y  $-g^*(\rho_{j,k})$  finito o (3)  $j \leq -g^*(\rho_{j,k})$  y  $-g^*(\rho_{j,k})$  infinito.

(1) Si  $j > -g^*(\rho_{j,k})$ :

Consideremos

$$\lambda_{j,k} = \frac{1 + |k|}{2^{j(1-\rho_{j,k})}} \text{ y } \mathcal{C}_{j,k} = 1$$

y calculemos  $c_{j,k}$  a partir de nuestra definición.

$$c_{j,k} = \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1 + |k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma) - \sigma} \right\} = \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} (2^{j(1-\rho_{j,k})})^{S(\sigma) - \sigma} \right\}$$

Como

$$2^{-jS(\sigma)} (2^{j(1-\rho_{j,k})})^{S(\sigma) - \sigma} = 2^{-j(\rho_{j,k}(S(\sigma) - \sigma) + \sigma)} = 2^{-j(-\rho_{j,k}(\sigma - S(\sigma)) + \sigma)},$$

recordando el cambio de variable  $s + s' = \sigma$ , podemos describir a la curva  $\sigma = g(s')$  en el plano  $(\sigma, s)$ , a través de la función  $S(\sigma)$  definida como  $S(\sigma) = s$  tal que el  $s$  verifica,

$$\sigma = g(\sigma - s).$$

Análogamente dada la curva  $s = S(\sigma)$  se puede describir en el plano  $(s', \sigma)$  como la función  $g$  definida por  $g(s') = \sigma$  tal que  $\sigma$  verifica que

$$s' = \sigma - S(\sigma).$$

En definitiva vale que

$$\sigma = g(\sigma - S(\sigma)),$$

y en consecuencia

$$2^{-jS(\sigma)} (2^{j(1-\rho_{j,k})})^{S(\sigma) - \sigma} = 2^{-j(-\rho_{j,k}(\sigma - S(\sigma)) + g(\sigma - S(\sigma)))},$$

Y el ínfimo de  $2^{-j(-\rho_{j,k}(\sigma - S(\sigma)) + g(\sigma - S(\sigma)))}$  es

$$2^{-j \sup_{\sigma \in \mathbb{R}} \{-\rho_{j,k}(\sigma - S(\sigma)) + g(\sigma - S(\sigma))\}}.$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que para cualquier función  $h$  vale que

$$\sup\{h(\sigma)\} = -\inf\{-h(\sigma)\},$$

obtenemos

$$2^{-j \sup_{\sigma \in \mathbb{R}} \{-\rho_{j,k}(\sigma - S(\sigma)) + g(\sigma - S(\sigma))\}} = 2^{-j(-\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{\rho_{j,k}(\sigma - S(\sigma)) - g(\sigma - S(\sigma))\})}.$$

O equivalentemente, reemplazando  $s' = \sigma - S(\sigma)$ ,

$$2^{-j(-\inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \{\rho_{j,k}(\sigma - S(\sigma)) - g(\sigma - S(\sigma))\})} = 2^j \inf_{s' \in \mathbb{R}} \{\rho_{j,k} s' - g(s')\} = 2^j g^*(\rho_{j,k}),$$

que coincide con la fórmula (4.47).

Mostremos que las sucesiones  $\lambda_{j,k} = \frac{1+|k|}{2^{j(1-\rho_{j,k})}}$  y  $\mathcal{C}_{j,k} = 1$  verifican las hipótesis requeridas en el Teorema 4.3.3. Claramente  $\frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k})}{j} = 0$ .

Por otro lado calculemos efectivamente  $\lambda_{j,k}$  :

- Si  $\rho_{j,k} \in E_{j,k}$  entonces  $k = [2^{j(1-\rho_{j,k})}]$  y

$$\lambda_{j,k} = \frac{1 + [2^{j(1-\rho_{j,k})}]}{2^{j(1-\rho_{j,k})}}$$

- Si  $\rho_{j,k} \notin E_{j,k}$  entonces, por ser  $E_{j,k+1}$  y  $E_{j,k}$  intervalos adyacentes,  $\rho_{j,k} \in E_{j,k+1}$ , es decir que  $k+1 = [2^{j(1-\rho_{j,k})}]$  y

$$\lambda_{j,k} = \frac{[2^{j(1-\rho_{j,k})}]}{2^{j(1-\rho_{j,k})}}$$

Por lo tanto, en ambos casos  $\frac{1}{2} \leq \lambda_{j,k} \leq 2$ . En consecuencia,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} = 0$$

para todo  $k_j$  tal que  $|k_j| < 2^j$ .

- (2) Si  $j \leq -g^*(\rho_{j,k})$  y  $-g^*(\rho_{j,k})$  es finito:

Como el soporte de  $-g^*$  es un intervalo  $[a, b]$  no puede haber infinitos  $j$  tal que  $-g^*(\rho_{j,k}) > j$  con  $-g^*(\rho_{j,k})$  finito. Por lo cual el caso (2) se da para finitos  $j$  y entonces basta, por ejemplo, elegir

$$\lambda_{j,k} = \frac{1 + |k|}{2^{j(1-\rho_{j,k})}} \text{ y } \mathcal{C}_{j,k} = 2^{-jg^*(\rho_{j,k})} 2^{-j^2},$$

para que se cumpla que  $c_{j,k} = 2^{-j^2}$ . Como esta elección es para finitos  $j$  no es necesario verificar que se cumplen las hipótesis del Teorema 4.3.3, que imponen condiciones sobre las sucesiones cuando  $j \rightarrow +\infty$ .

(3) Si  $j \leq -g^*(\rho_{j,k})$  y  $-g^*(\rho_{j,k}) = +\infty$  :

Si  $-g^*(\rho_{j,k}) = +\infty$  tenemos que  $-g^*(\rho) = +\infty$  para todo  $\rho \in E_{j,k}$ , y esto implica que  $E_{j,k} \cap \text{sop}(-g^*) = \emptyset$ , es decir que  $\rho_{j,k} \notin \text{sop}(-g^*) = \overline{\text{Im}(g')}$ .

En consecuencia tenemos que no existe  $(s'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión tal que

$$\rho_{j,k} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g'(s'_n)$$

con  $k = \lfloor 2^{j(1-\rho_{j,k})} \rfloor$  o equivalentemente que

$$1 - \rho_{j,k} \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - g'(s'_n) \quad \forall (s'_n)_{n \in \mathbb{N}}. \quad (4.48)$$

Por otra parte, derivando la igualdad

$$\sigma = g(\sigma - S(\sigma)),$$

respecto de  $\sigma$ , tenemos que

$$\frac{1}{1 - S'(\sigma)} = g'(\sigma - S(\sigma))$$

o equivalentemente

$$1 - g'(\sigma - S(\sigma)) = 1 - \frac{1}{1 - S'(\sigma)} = \frac{S'(\sigma)}{1 - S'(\sigma)},$$

con lo cual, por la fórmula (4.48) , tenemos que

$$1 - \rho_{j,k} \notin \overline{\text{Im} \left( \frac{S'(\sigma)}{1 - S'(\sigma)} \right)}.$$

O sea que en el caso (3) tenemos que,

$$k \neq \lfloor 2^{jr_l} \rfloor \quad \text{con } (r_l)_l \text{ denso en } \text{Im} \left( \frac{S'(\sigma)}{1 - S'(\sigma)} \right). \quad (4.49)$$

Entonces, si seleccionamos

$$\lambda_{j,k} = \frac{1 + |k|}{2^{j(1-g'(0))}} \quad \text{y} \quad \mathcal{E}_{j,k} = 2^{-jg^*(g'(0))} 2^{-j^2},$$

y hacemos cálculos análogos a los hechos en el caso (1), obtenemos que,

$$\begin{aligned} c_{j,k} &= \mathcal{C}_{j,k} \cdot \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( \frac{1+|k|}{\lambda_{j,k}} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\} = \\ &= 2^{-jg^*(g'(0))} 2^{-j^2} \inf_{\sigma \in \mathbb{R}} \left\{ 2^{-jS(\sigma)} \left( 2^{j(1-g'(0))} \right)^{S(\sigma)-\sigma} \right\} = 2^{-jg^*(g'(0))} 2^{-j^2} 2^{jg^*(g'(0))} = 2^{-j^2}, \end{aligned}$$

en coincidencia con la fórmula (4.47).

Por lo observado en la fórmula (4.49) tenemos que  $(j, k) \notin I$ , en consecuencia sólo basta ver que se cumple la hipótesis del Teorema 4.3.3 que requiere que para cualquier  $C \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \left( \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} + C \frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j} \right) \leq 0.$$

La sucesión  $\lambda_{j,k_j}$  está acotada pues, si  $|k| < 2^j$  con  $(j, k) \notin I$ ,

$$\frac{1}{2^{j(1-g'(0))}} \leq \lambda_{j,k} = \frac{1+|k|}{2^{j(1-g'(0))}} \leq \frac{2^j}{2^{j(1-g'(0))}} = 2^{jg'(0)}.$$

Por lo tanto,  $\frac{\log_2(\lambda_{j,k_j})}{j}$  es acotada.

Y, por otro lado,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log_2(\mathcal{C}_{j,k_j})}{j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\log_2\left(2^{-jg^*(g'(0))} 2^{-j^2}\right)}{j} = \lim_{j \rightarrow \infty} -g^*(g'(0)) - j = -\infty,$$

es decir que se verifica la hipótesis requerida.

## 4.4. Conclusiones

En este capítulo analizamos con más profundidad el tipo de singularidad puntual que podría presentar una función o distribución, mediante la prescripción de la frontera 2-microlocal. Con este objetivo, presentamos una fórmula genérica, basada en los coeficientes wavelet, que provee una amplia clase de funciones o distribuciones cuya frontera 2-microlocal en  $x_0$  es  $S(\sigma)$ , donde  $S(\sigma)$  es una función decreciente definida en  $\mathbb{R}$  tal que  $S(\sigma)$  es cóncava hacia abajo con  $S''(\sigma) < 0$  o bien con  $S(\sigma)$  lineal. Esta clase de funciones (o distribuciones) incluye a cada una de las construcciones propuestas en [23, 52, 46].

Si  $S(\sigma)$  es lineal caracterizamos completamente a la familia de funciones o distribuciones con frontera 2-microlocal  $S(\sigma)$  pues las condiciones dadas sobre los coeficientes wavelet son las necesarias y suficientes para que  $S(\sigma)$  sea la frontera 2-microlocal en  $x_0$  de una función o distribución. En el caso general, cuando  $S(\sigma)$  no es lineal, conjeturamos que nuestras condiciones suficientes, para que  $S(\sigma)$  sea la frontera 2-microlocal en  $x_0$  de una función o distribución, están cerca de ser condiciones necesarias.

Nuestros resultados podrían ser un punto de partida para dar respuesta a algunos problemas abiertos [46, 36]. En primer lugar determinar las condiciones de compatibilidad que cumplen las diferentes fronteras 2-microlocales de una función  $f$ , cuando  $x$  varía en un intervalo  $I$  para luego predeterminar simultáneamente en cada  $x \in I$  la frontera 2-microlocal de  $f$ . En este sentido hay un avance en [46], donde los autores prueban un resultado sobre la prescripción de frontera 2-microlocal en simultáneo para un conjunto denso y numerable en un intervalo  $I$ . Una primera pregunta a responder es: ¿Será posible extender nuestro resultado para un conjunto denso y numerable o, más aún, para todo  $x \in I$ ? Además, ¿será posible debilitar las hipótesis sobre  $S(\sigma)$  para la prescripción de la frontera en un punto  $x_0$ ? ¿Qué condiciones se deberían requerir sobre un conjunto de curvas para poder definir una función  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  cuyas fronteras 2-microlocales en  $I$  sea dicho conjunto de curvas?

Por otro lado, nuestros resultados podrían ser útiles para modelizar señales y caracterizar en profundidad sus singularidades. Aunque, cabe aclarar que, para implementar alguna metodología con aplicaciones en señales, debería ser posible reformular las condiciones obtenidas para que resulten manejables en la práctica.



# Bibliografía

- [1] B. P. Abbott and et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, 2016.
- [2] B. P. Abbott and et al. Gw170817: Observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119:161101, 2017.
- [3] P. Abry, P. Goncalves, and J. Lévy Véhel. *Scaling, Fractals and Wavelets*. ISTE-Wiley, 2010.
- [4] P. Abry, S. G. Roux, and S. Jaffard. Detecting oscillating singularities in multifractal analysis: Application to hydrodynamic turbulence. *2011 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pages 4328–4331, 2011.
- [5] A. Arneodo, F. Argoul, J. F. Muzy, M. Tabard, and E. Bacry. *Beyond Classical Multifractal Analysis Using Wavelets: Uncovering a Multiplicative Process Hidden in the Geometrical Complexity of Diffusion Limited Aggregates*, pages 326–346. World Scientific Publishing Co, 1994.
- [6] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, and J. F. Muzy. Oscillating singularities on cantor sets: A grand-canonical multifractal formalism. *Journal of Statistical Physics*, 87(1):179–209, 1997.
- [7] A. Arneodo, E. Bacry, S. Jaffard, and J. F. Muzy. Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 4(2):159–174, 1998.
- [8] P. Balança. Fine regularity of Lévy processes and linear (multi)fractional stable motion. *Electron. J. Probab.*, 19:37 pp., 2014.
- [9] P. Balança and E. Herbin. 2-microlocal analysis of martingales and stochastic integrals. *Stochastic Processes and their Applications*, 122(6):2346 – 2382, 2012.
- [10] S. Blanco, A. Figliola, R. Quián Quiroga, O. A. Rosso, and E. Serrano. Time-frequency analysis of electroencephalogram series. iii. wavelet packets and information cost function. *Phys. Rev. E*, 57:932–940, 1998.

- [11] J. M. Bony. Second microlocalization and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations. In Sigeru Mizohata, editor, *Hyperbolic Equations and Related Topics*, pages 11 – 49. Academic Press, 1986.
- [12] A. Calderón and A. Zygmund. Local properties of solutions of elliptic partial differential equations. *Studia Mathematica*, 20(2):181–225, 1961.
- [13] C.K. Chui. *An Introduction to Wavelets*. Wavelet analysis and its applications. Academic Press, 1998.
- [14] C.K. Chui and J. Wang. A general framework of compactly supported splines and wavelets. *Journal of Approximation Theory*, 71(3):263 – 304, 1992.
- [15] T.M. Cover and J.A. Thomas. *Elements of Information Theory, 2nd Edition*. J. Wiley; New York, 2006.
- [16] K. Daoudi, J. Lévy Véhel, and Y. Meyer. Construction of continuous functions with prescribed local regularity. *Constructive Approximation*, 14(3):349–385, 1998.
- [17] A. Echelard. *Analyse 2-microlocale et application au débruitage*. PhD thesis, 2007.
- [18] K. Falconer. *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2013.
- [19] A. Figliola and E. Serrano. Analysis of physiological time series using wavelet transforms. *IEEE Engineering in Medicine and Biology Magazine*, 16(3):74–79, 1997.
- [20] M. Frame and N. Cohen. *Benoit Mandelbrot: A Life in Many Dimensions*. Fractals and Dynamics in Math. World Scientific, 2015.
- [21] L.G. Gamero, A. Plastino, and M.E. Torres. Wavelet analysis and nonlinear dynamics in a nonextensive setting. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 246(3):487 – 509, 1997.
- [22] J. Gerver. The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of  $\pi$ . *American Journal of Mathematics*, 92(1):33–55, 1970.
- [23] B. Guiheneuf, S. Jaffard, and J. Lévy Véhel. Two results concerning chirps and 2-microlocal exponents prescription. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 5(4):487 – 492, 1998.
- [24] B. Guiheneuf and J. Lévy Véhel. 2-Microlocal Analysis and Application in Signal Processing. In *International Wavelet Conference*, Tanger, Morocco, 1998.

- [25] E. Herbin and J. Lévy-Véhel. Stochastic 2-microlocal analysis. *Stochastic Processes and their Applications*, 119(7):2277 – 2311, 2009.
- [26] P. Ivanov, L. Amaral, A. Goldberger, S. Havlin, M. Rosenblum, Z. Struzik, and H.E. Stanley. Multifractality in human heartbeat dynamics. *Nature*, (399), 1999.
- [27] S. Jaffard. Exposants de hölder en des points donnés et coefficients d’ondelettes. *C.R.A.S. Série I*, 308:79–81, 1989.
- [28] S. Jaffard. Pointwise smoothness, two microlocalization and wavelet coefficients. *Publicacions Matemàtiques*, 35(1):155–168, 1991.
- [29] S. Jaffard. Functions with prescribed Hölder exponent. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2(4):400 – 401, 1995.
- [30] S. Jaffard. The spectrum of singularities of riemann’s function. *Revista matemática iberoamericana*, 12:441–460, 1996.
- [31] S. Jaffard. Old friends revisited: the multifractal nature of some classical functions. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 3(1):1–22, 1997.
- [32] S. Jaffard. Oscillation spaces: Properties and applications to fractal and multifractal functions. *Journal of Mathematical Physics*, 39:4129–4141, 1998.
- [33] S. Jaffard. Construction of functions with prescribed Hölder and chirp exponents. *Revista matemática iberoamericana*, 16(2):331–350, 2000.
- [34] S. Jaffard. On lacunary wavelet series. *Ann. Appl. Probab.*, 10(1):313–329, 2000.
- [35] S. Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. In *Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot, Proc. Symp. Pure Math.*, volume 72, pages 91 – 151. American Mathematical Society, 2004.
- [36] S. Jaffard. *Wavelet Methods for Multifractal Analysis of Functions*, chapter 3, pages 103–137. John Wiley Sons, Ltd, 2010.
- [37] S. Jaffard, P. Abry, and S.G. Roux. Function spaces vs. scaling functions: Tools for image classification. In M. Bergounioux, editor, *Mathematical Image Processing*, volume 5 of *Springer Proceedings in Mathematics*, pages 1–39. Springer, 2011.
- [38] S. Jaffard, C. Melot, R. Leonarduzzi, H. Wendt, P. Abry, S.G. Roux, and M.E. Torres. p-exponent and p-leaders, part i: Negative pointwise regularity. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 448:300 – 318, 2016.

- [39] S. Jaffard and Y. Meyer. *Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions*. Number n.º 587 in American Mathematical Society: *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, 1996.
- [40] J. W. Kantelhardt, S. A. Zschiegner, E. Koscielny-Bunde, S. Havlin, A. Bunde, and H. Eugene Stanley. Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316(1):87 – 114, 2002.
- [41] A. Kolmogorov. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds’ Numbers. *Akademiia Nauk SSSR Doklady*, 30:301–305, 1941.
- [42] A. Kolmogorov. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 119:861–864, 1958.
- [43] K.M. Kolwankar and J. Lévy Véhel. A time domain characterization of the fine local regularity of functions. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 8(4):319–334, 2002.
- [44] Y. Kopsinis, E. Aboutanios, D. A. Waters, and S. McLaughlin. Time-frequency and advanced frequency estimation techniques for the investigation of bat echolocation calls. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 127(2):1124–1134, 2010.
- [45] P. Legrand. *Local Regularity and Multifractal Methods for Image and Signal Analysis*, chapter 11, pages 367–411. John Wiley and Sons, Ltd, 2010.
- [46] J. Lévy Véhel and S. Seuret. 2-microlocal formalism. In *Fractal Geometry and Applications: A Jubilee of Benoit Mandelbrot, Proc. Symp. Pure Math.*, volume 72, pages 153 – 215. American Mathematical Society, 2004.
- [47] S. G. Mallat. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(7):674–693, 1989.
- [48] S. G. Mallat. *A Wavelet Tour of Signal Processing - The Sparse Way, 3rd Edition*. Academic Press, 2009.
- [49] B. Mandelbrot. *Fractals and Scaling in Finance*. Springer, 1997.
- [50] C. Melot. *Sur les singularités oscillantes et le formalisme multifractal*. Theses, Université Paris XII Val de Marne, 2002.

- [51] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs: Ondelettes*. Actualités mathématiques. Hermann, 1990.
- [52] Y. Meyer. *Wavelets, Vibrations, and Scalings*. CRM monograph series. American Mathematical Society, 1998.
- [53] Y. Meyer and H. Xu. Wavelet analysis and chirps. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 4(4):366 – 379, 1997.
- [54] U. Molter and M. Rosenblatt. A generalized version of the 2-microlocal frontier prescription. *ArXiv e-prints*, 2018.
- [55] J. F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo. Wavelets and multifractal formalism for singular signals: Application to turbulence data. *Phys. Rev. Lett.*, 67:3515–3518, 1991.
- [56] G. Parisi and U. Frisch. On the singularity structure of fully developed turbulence. In *Turbulence and Predictability of Geophysical Flows and Climate Dynamics*, volume 88, pages 84 – 87. 1985.
- [57] G. E. Powell and I.C. Percival. A spectral entropy method for distinguishing regular and irregular motion of hamiltonian systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 12(11):2053–2071, 1979.
- [58] M. Rosenblatt, A. Figliola, G. Paccosi, E. Serrano, and O.A. Rosso. A quantitative analysis of an eeg epileptic record based on multiresolution wavelet coefficients. *Entropy*, 16(11):5976 – 6005, 2014.
- [59] M. Rosenblatt, E. Serrano, and A. Figliola. An entropy based in wavelet leaders to quantify the local regularity of a signal and its application to analyze the dow jones index. *Int. J. Wavelets Multiresolution Inf. Process.*, 10(5), 2012.
- [60] O. A. Rosso, S. Blanco, J. Yordanova, V. Kolev, A. Figliola, M. Schürmann, and sar E. Ba. Wavelet entropy: a new tool for analysis of short duration brain electrical signals. *Journal of Neuroscience Methods*, 105(1):65 – 75, 2001.
- [61] O.A. Rosso, M.T. Martin, A. Figliola, K. Keller, and A. Plastino. Eeg analysis using wavelet-based information tools. *Journal of Neuroscience Methods*, 153(2):163 – 182, 2006.
- [62] E. Serrano, R. Sirne, M.Fabio, A. Viegner, C.E. D’Attellis, and J. Guglielmo. Spline wavelet packets application: Doppler signal analysis during operation time. *WSEAS Transactions on Signal Processing*, 4, 2008.

- [63] S. Seuret and J. Lévy Véhel. The local Hölder function of a continuous function. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 13(3):263 – 276, 2002.
- [64] S. Seuret and J. Lévy Véhel. A time domain characterization of 2-microlocal spaces. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 9(5):473–495, 2003.
- [65] C.E. Shannon. A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, 27:379 – 423, 1948.
- [66] Y.G. Sinai. On the concept of entropy of dynamical system. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 124:768–771, 1959.
- [67] L. Telesca and V. Lapenna. Measuring multifractality in seismic sequences. *Tectonophysics*, 423(1):115 – 123, 2006.
- [68] M. Torres, L. Gamero, and E. D’Attellis. Pattern detection in eeg using multiresolution entropy. *Latin American Applied Research*, 53:53–57, 1995.
- [69] M. Unser. A family of polynomial spline wavelet transforms. *Signal Processing*, 30(2):141 – 162, 1993.
- [70] M. Unser. Ten good reasons for using spline wavelets. In *Wavelet Applications in Signal and Image Processing V*, 1997.