



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

## Invariantes cuantitativos y geométricos para la complejidad de espacios y grupos

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área  
Ciencias Matemáticas

**Eugenio Borghini**

**Director:** Elías Gabriel Minian.

**Consejero de estudios:** Jonathan Ariel Barmak.

Buenos Aires

Fecha de defensa: 5 de Junio de 2020.

---

# Invariantes cuantitativos y geométricos para la complejidad de espacios y grupos

## Resumen

La presente Tesis está dedicada al estudio de invariantes numéricos que miden la complejidad de la topología y del tipo homotópico de un espacio. Una manera natural de cuantificar la complejidad de un espacio es a través del cálculo de la cantidad mínima de piezas “simples” necesarias para ensamblarlo, dado que intuitivamente, los espacios que exhiben una topología muy compleja deberían ser difíciles de construir. Es esta la idea esencial en que se basa la definición de algunos de los invariantes clásicos que detectan la presencia de topología no trivial, tales como la categoría de Lusternik-Schnirelmann (L-S) y nociones afines. Las triangulaciones mínimas de espacios también han sido estudiadas con este fin. En este sentido, demostramos que las triangulaciones mínimas de las superficies cerradas optimizan el número de vértices en triangulaciones de espacios de su tipo homotópico, con la única excepción del toro con dos manijas. Este resultado cierra un problema planteado por Karoubi y Weibel. Asimismo, probamos que las triangulaciones mínimas de una superficie cerrada  $S$  minimizan el número de 2-símplices entre aquellos complejos simpliciales cuyo grupo fundamental es isomorfo a  $\pi_1(S)$ . Esto responde parcialmente una pregunta formulada por Babenko, Balacheff y Bulteau. A pesar de la similitud con el resultado anterior, la motivación para este problema proviene de la relación estrecha entre la *complejidad simplicial* y el *área sistólica* de grupos. El área sistólica de un grupo  $G$  es una noción ideada por Gromov que, a grandes rasgos, consiste en la mínima cantidad de área necesaria para construir un complejo  $K$  con grupo fundamental isomorfo a  $G$ , normalizada por la condición de que la mínima longitud de un lazo no contráctil (el *sístole*) en  $K$  sea igual a 1. Por su lado, la complejidad simplicial de un grupo  $G$  se define como la mínima cantidad de 2-símplices en un complejo simplicial  $K$  tal que  $\pi_1(K) = G$ . Esta noción, que puede ser considerada como una versión discreta para el área de un grupo, fue recientemente introducida por Babenko, Balacheff y Bulteau. Los autores mostraron que la complejidad simplicial aproxima (asintóticamente) el área sistólica de grupos, por lo que es natural abordar problemas sobre el área sistólica en este nuevo contexto combinatorio. A modo de ejemplo, un problema fundamental en el campo de la geometría sistólica de grupos que se remonta a Gromov y permanece abierto consiste en decidir si el área sistólica  $\sigma(G * \mathbb{Z})$  de un producto libre de grupos  $G * \mathbb{Z}$  coincide con  $\sigma(G)$ . Lo que está verdaderamente en cuestión aquí es saber si el modelo canónico (*wedge*) para grupos de la forma  $G * \mathbb{Z}$  es el más efectivo. Esto motiva el análisis del problema análogo para la complejidad simplicial de un producto libre de grupos, que también está abierto. En esta dirección, mostramos que la complejidad simplicial del grupo fundamental de superficies es estable respecto del producto libre con grupos libres. Describimos también una construcción, basada en la demostración de Stallings del teorema de Grushko, que consideramos puede transformarse en un primer paso hacia el cálculo tanto del área sistólica cuanto de la complejidad simplicial de un producto libre de grupos.

Finalmente, obtenemos nuevas estimaciones para el área sistólica de ciertos grupos a través del estudio de la geometría sistólica de los poliedros 2-dimensionales. Más concretamente, encontramos una superficie (posiblemente singular) de área relativamente grande contenida en aquellos poliedros riemannianos a trozos de dimensión 2 que cumplen una cierta condición cohomológica. A partir de esto, probamos una desigualdad sistólica nueva que extiende a poliedros rieman-

---

nianos a trozos de dimensión 2 una desigualdad de Guth para variedades riemannianas. Como consecuencia, deducimos que para una clase considerable de grupos el área sistólica es mayor o igual a  $\frac{1}{2}$ , lo que refina la mejor cota inferior universal previamente establecida y la acerca más a  $\frac{2}{\pi}$ , conjeturalmente la cota óptima.

Parte de los resultados de esta Tesis aparecen en los trabajos [16, 15, 17, 18], mientras que otros conformarán un artículo en preparación.

**Palabras clave.** Geometría sistólica, categoría de Lusternik-Schnirelmann, triangulaciones mínimas, complejidad simplicial de grupos.

---

# Quantitative and geometric invariants for the complexity of spaces and groups

## Abstract

This Thesis is devoted to the study of numerical invariants that measure the complexity of the topology and the homotopy type of a space. A natural way to quantify the complexity of a space is by computing the minimum number of “simple” pieces needed to assemble it, since intuitively, the spaces that exhibit highly non-trivial topology should be hard to build. This is the essential idea behind the definition of some classic invariants that detect non-trivial topology, such as the Lusternik-Schnirelmann (L-S) category and relatives. Minimal triangulations of spaces have also been studied for this reason. In this direction, we show that the minimal triangulations of closed surfaces optimize the number of vertices in triangulations of spaces of their homotopy type, with the only exception of the torus with two handles. This result settles a problem posed by Karoubi and Weibel. We also prove that minimal triangulations of a closed surface  $S$  minimize the number of 2-simplices among those simplicial complexes with fundamental group isomorphic to  $\pi_1(S)$ . This partially answers a question raised by Babenko, Balacheff and Bulteau. Despite the similarity with the first result, the motivation for this problem comes from the close connection between the *simplicial complexity* and the *systolic area* of groups. The systolic area of a group  $G$  is a notion due to Gromov that, roughly, consists of the minimum amount of area needed to build a complex  $K$  with fundamental group  $G$  out of riemannian simplices, normalized by the condition that the length of the shortest non-trivial loop (i.e. the systole) in  $K$  equals 1. Meanwhile, the simplicial complexity of a group  $G$  is defined as the minimum number of 2-simplices in a simplicial complex  $K$  with  $\pi_1(K) = G$ . This notion, that may be regarded as a discrete version of the area for groups, was recently introduced by Babenko, Balacheff and Bulteau. The authors showed that the simplicial complexity approximates (asymptotically) the systolic area of groups. Thus, it is natural to attack problems about the systolic area in this new combinatorial context. For instance, a basic open problem about the systolic geometry of groups, which goes back to Gromov, is whether the systolic area  $\sigma(G * \mathbb{Z})$  of a free product  $G * \mathbb{Z}$  equals  $\sigma(G)$ . The real question here is whether the canonical (wedge sum) model for the groups of the form  $G * \mathbb{Z}$  is the most effective one. This motivates the study of the analogue problem for the simplicial complexity of a free product of the form  $G * \mathbb{Z}$ , which is also open. In this direction, we prove that the simplicial complexity of fundamental groups of surfaces is stable under free product with free groups. We also describe a construction, based on Stallings’ topological proof of Grushko theorem, that we think might be a first step towards the computation of both the systolic area and the simplicial complexity of free product of groups.

Lastly, we provide new estimates for the systolic area of some specific groups through the study of the systolic geometry of polyhedra of dimension 2. More concretely, we find a (possibly singular) surface of relatively large area embedded in piecewise riemannian polyhedra of dimension 2 that satisfy a certain cohomological condition. Using this, we prove a new systolic inequality that extends to piecewise riemannian complexes of dimension 2 an inequality of Guth for riemannian manifolds. As a consequence, we conclude that for a large class of groups the systolic area is greater than or equal to  $\frac{1}{2}$ , which improves the best previously known general lower bound and brings it closer to the conjectured  $\frac{2}{\pi}$ .

Part of the results of the Thesis appear in the works [16, 15, 17, 18], while some others will

---

be the subject of an article in preparation.

**Keywords.** Systolic geometry, Lusternik-Schnirelmann category, minimal triangulations, simplicial complexity of groups.

---

## Gracias

Tal como todos los otros eventos que juzgo importantes en mi vida, completar un doctorado hubiera sido imposible sin la participación de muchísimas personas que, sabiéndolo o no, me ayudaron a llegar a destino. Llegó la hora de ofrecerles un pequeño homenaje.

Comienzo por agradecer a Gabriel, muy especialmente por confiar y aceptarme como alumno de doctorado sin haber previamente dirigido mi tesis de licenciatura. Destaco su perenne entusiasmo, la disponibilidad permanente para escuchar y discutir ideas, la manera en que encontró los problemas correctos en los momentos justos. Quiero agradecer también a Florent Balacheff, Gabriel Larotonda y Jorge Lauret por haber aceptado ser jurados de esta tesis, así como por sus comentarios y sugerencias.

Tuve la enorme fortuna de desarrollar mi doctorado en el grupo de Topología al mismo tiempo que Iván, Kevin y Martín, tres excelentes personas que además son excelentes matemáticos. Gracias Kevin por haber sido estos años compañero de banco y congresos.

La siempre animada “Hotel de Hilbert” me permitió conocer cómo hacen matemática otros grupos, hablar y aprender sobre docencia (y muchos otros aspectos de la vida), y discutir varios problemas interesantes ¡Gracias a todos! Y ahora estoy muy contento en la oficina 2038, gracias a todos sus integrantes.

Durante el doctorado fui testigo privilegiado del vertiginoso crecimiento científico y personal de dos equipos formados por tres personas cada uno: “El Bueno, el Ralo y el Feo” y “Prim Floyd”. Gracias a cada uno de ellos.

Gracias Andrea y Sergio por su calidez y recibirme en su casa: Por hacerme sentir uno más en las siempre muy interesantes reuniones del grupo de Álgebra Homológica.

A mis amigos Diego, Matías, Daniel, Coby, Nico y Leo.

A mis padres. Cada año que pasa soy más consciente del esfuerzo, el amor, los pequeños actos de heroísmo, las horas robadas al sueño que requirieron criarnos a mis hermanos y a mí. A mi hermana, por poner las cosas en perspectiva. A mi hermano, que sigue siendo el cómplice que me dio la vida. A mis tíos y primos, los que están acá y los de allá.

Por regar este camino con amor y alegría. Por acompañarme en este proyecto que llamamos vida del que esta tesis fue una parte y que seguiremos construyendo juntos. Gracias por tanto Xime.

# Introducción

Uno de los objetivos del campo de la topología y la geometría cuantitativa es cuantificar resultados cualitativos en topología algebraica a través del análisis de ciertas medidas (a menudo continuas) del tamaño y la complejidad de los espacios y las aplicaciones involucradas. Ilustramos este proceso con algunos ejemplos concretos.

- Según un resultado básico en topología algebraica, un lazo homotópicamente trivial  $\gamma : S^1 \rightarrow X$  es llenado por un “disco”  $\bar{\gamma} : D \rightarrow X$ . El espacio  $X$  frecuentemente viene equipado de forma natural con una geometría intrínseca, como una distancia o una métrica riemanniana, lo que permite medir cuán difícil es realizar la trivialización del lazo analizando el “tamaño” de los discos  $D$ , por ejemplo, la medida de Hausdorff o el área parametrizada. Esto lleva a la conocida noción de función de *filling* de variedades riemannianas. Es un resultado fundacional en la teoría geométrica de grupos (ver [45, 22]) que la función de filling de una variedad riemanniana  $M$  exhibe el mismo comportamiento asintótico que la función de filling de Dehn de su grupo fundamental  $\pi_1(M)$ .
- Uno de los invariantes más elementales de un grupo  $G$  (digamos, finitamente generado) es su cardinal. Si se fija un conjunto de generadores (simétrico)  $\mathcal{A}$  de  $G$ , es posible refinar el estudio del tamaño de  $G$  calculando para cada natural  $n$  la cantidad de elementos distintos de  $G$  que se pueden expresar como palabras de longitud a lo sumo  $n$  en el alfabeto  $\mathcal{A}$ . Esto define la función de crecimiento del grupo  $G$  con respecto al conjunto de generadores  $\mathcal{A}$ , que es un objeto central de estudio en la teoría geométrica de grupos. Notablemente, la función de crecimiento de un grupo contiene información de naturaleza algebraica sobre el grupo, como muestra la caracterización de Gromov de los grupos finitamente generados de crecimiento polinomial como aquellos que poseen subgrupos nilpotentes de índice finito [41].

El tema unificador de esta Tesis es el estudio de invariantes cuantitativos que capturan en diferentes sentidos la complejidad de la topología o del tipo homotópico de un espacio, así como los modelos topológicos en los que se alcanzan los valores óptimos para estos invariantes. A diferencia del enfoque clásico en topología algebraica, concentrado en el desarrollo de herramientas e invariantes algebraicos para analizar un espacio tales como los grupos de homología y homotopía, aquí el objetivo es obtener un único número no negativo que dé cuenta de la complejidad intrínseca del espacio o al menos, algún aspecto de ella. Una manera natural de lograr esto es identificando los espacios más “simples” posibles (tales como, según el contexto, discos, bolas, conjuntos contráctiles, etc.) para después declarar la complejidad de un espacio  $X$  como el mínimo número de piezas simples requerido para formar  $X$ . La clásica categoría de

---

Lusternik-Schnirelmann (L-S) de un espacio, introducida en [67], es un invariante prototípico diseñado según este patrón. Puesto que los conjuntos contráctiles son los más sencillos desde el punto de vista de la teoría de homotopía, para un espacio  $X$  el rol de piezas simples es desempeñado por los subconjuntos abiertos que se contraen en  $X$ . La categoría L-S de  $X$  se define entonces como la mínima cantidad de subconjunto abiertos contráctiles en  $X$  que cubren el espacio. La categoría L-S resulta ser un invariante homotópico de un espacio cuyas aplicaciones van desde la estimación del número de puntos críticos de una función de Morse sobre una variedad hasta ciertos aspectos de la nilpotencia en tipos homotópicos (ver [29] para más detalles). En los últimos años se manifestó un interés renovado en el área de la categoría L-S e invariantes relacionados. Además de la introducción de nuevos invariantes del tipo categoría L-S (entre ellos, la *complejidad topológica* de Farber [31] es probablemente el que más interés despertó), varios trabajos se enfocaron en formular los análogos “correctos” de la categoría L-S y otros invariantes relacionados en contextos discretos, tales como complejos simpliciales, poliedros o espacios topológicos finitos (ver por ejemplo [1, 34, 33]). El principio común en que se basan estos trabajos es la sustitución de los conjuntos contráctiles como las piezas constitutivas de espacios por otras nociones alternativas que exploten la naturaleza más rígida de la categoría involucrada (tales como los conjuntos colapsables en la clásica teoría de homotopía simple de Whitehead en [1] o los conjuntos fuertemente colapsables en el contexto relativamente nuevo de los tipos homotópicos fuertes de Barmak y Minian [9] en [34, 33]). Otra manera de medir la complejidad en el marco de espacios triangulables, tal vez incluso más directa, es a través de las triangulaciones mínimas. El problema de determinar triangulaciones eficientes de variedades PL fue tratado por varios investigadores (ver por ejemplo [20, 21, 68, 69, 58, 75] y las referencias allí) habiendo sido explícitamente relacionado con la complejidad de la topología de las variedades de dimensión 3 por Matveev [70] (más precisamente, su noción de *complejidad combinatoria* emplea pseudo-triangulaciones mínimas en lugar de triangulaciones). Recientemente, el punto de vista de las triangulaciones mínimas fue ligado a invariantes del tipo L-S categoría por Karoubi y Weibel a través de la introducción del *covering type* de un espacio [61]. Recordemos que llamamos a un cubrimiento de un espacio un *buen cubrimiento* si toda intersección no vacía de sus elementos es contráctil. El *covering type* de un espacio  $X$  se define como el mínimo tamaño de un buen cubrimiento de un espacio  $Y$  del tipo homotópico de  $X$ . Como muestra el siguiente argumento, este invariante está fuertemente relacionado a triangulaciones mínimas de tipos homotópicos. Por el Teorema del Nervio, un espacio topológico  $X$  que admite un buen cubrimiento  $\mathcal{U}$  de cardinal  $n$  es homotópicamente equivalente al nervio de  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  del cubrimiento, que es un complejo simplicial en  $n$  vértices. Luego, para los espacios  $X$  del tipo homotópico de un complejo simplicial finito (esto incluye a todos los CW-complejos compactos), el *covering type* coincide con el mínimo número de vértices en un complejo simplicial  $K$  homotópicamente equivalente a  $X$ . En el artículo citado [61], Karoubi y Weibel calcularon el *covering type* de los complejos simpliciales de dimensión 1 y plantearon el problema de hallar el valor exacto del *covering type* para las superficies cerradas. Aplicando la reformulación obtenida a través del Teorema del Nervio, este problema resulta equivalente a la siguiente pregunta natural:

*Cuál es el mínimo número de vértices en un complejo simplicial homotópicamente equivalente a una superficie cerrada dada?*

Logramos dar una solución completa a este problema al probar que el resultado esperado es *casi* cierto.



---

**Teorema 2.4.5.** *Sea  $S$  una superficie cerrada, ya sea orientable o no orientable. Entonces, el covering type de  $S$  coincide con el mínimo número de vértices en una triangulación de  $S$ , con la única excepción del toro con dos manijas, en cuyo caso estas cantidades difieren en 1.*

Destacamos aquí que una fórmula explícita para el mínimo número de vértices en una triangulación de cualquier superficie cerrada es ampliamente conocida. Fue obtenida por Ringel [75] en el caso no orientable y por Jungerman y Ringel [58] en el caso orientable.

Una pregunta similar, al menos a primera vista, fue planteada recientemente por Babenko, Balacheff y Bulteau ([4]):

*Cuál es el mínimo número de 2-símplices en un complejo simplicial cuyo grupo fundamental es isomorfo al de una superficie cerrada dada?*

Este segundo problema está vinculado a un invariante combinatorio de grupos introducido por los autores en [4], conocido como *complejidad simplicial*. Dado un grupo  $G$  (finitamente presentable), diremos que un complejo simplicial conexo  $K$  es una *triangulación* de  $G$  o que  $K$  *triangula*  $G$  si  $\pi_1(K) = G$ . La complejidad simplicial de un grupo  $G$  se define como el mínimo número de 2-símplices en una triangulación de  $G$ . A diferencia de lo que sucede para el covering type, mostramos que no hay casos excepcionales para la complejidad simplicial de grupos fundamentales de superficies. En lo que sigue, como es usual, hablaremos de *grupos de superficie* para referirnos a estos grupos.

**Teorema 4.4.7.** *La complejidad simplicial  $\kappa(\pi_1(S))$  del grupo fundamental de una superficie cerrada no simplemente conexa  $S$  coincide con el mínimo número de 2-símplices en una triangulación óptima de  $S$ . Además, la complejidad simplicial de los grupos de superficie es estable por tomar producto libre con grupos libres, esto es, vale  $\kappa(\pi_1(S) * \mathbb{Z}) = \kappa(\pi_1(S))$ .*

Previamente, el valor exacto de la complejidad simplicial era conocido solo para unos pocos grupos ( $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  y el grupo fundamental de la botella de Klein), y había sido obtenido esencialmente a través de un análisis exhaustivo en [25]. Con respecto a la segunda afirmación del enunciado, fue conjeturado por los autores en [4] que la complejidad simplicial es estable por tomar producto libre con grupos libres, i.e. que  $\kappa(G) = \kappa(G * \mathbb{Z})$  para todo grupo finitamente presentado  $G$ . Lo que motiva la conjetura es que, dada una triangulación de un grupo  $G$ , siempre es posible triangular  $G * \mathbb{Z}$  sin utilizar 2-símplices adicionales formando un wedge con (una triangulación de)  $S^1$ . Más allá de las formalidades, el verdadero interrogante es determinar si esta construcción natural es la forma óptima de triangular grupos de la forma  $G * \mathbb{Z}$ . La verificación de la conjetura en el caso de grupos de superficie constituye la primera (reconocidamente, parcial) evidencia a favor de una respuesta afirmativa a esta cuestión.

Los Teoremas 2.4.5 y 4.4.7 indican que las superficies cerradas son, de una forma cuantificable, los modelos topológicos más efectivos dentro de su tipo homotópico. Para demostrarlos empleamos el mismo núcleo de técnicas, que describimos a continuación. El primer punto crucial es la identificación de una propiedad relevante del anillo de cohomología de espacios y grupos, que llamamos *propiedad (A)*.

**Definición 2.3.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico o un grupo. Decimos que su anillo de cohomología  $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$  satisface la propiedad (A) si para cada clase no trivial  $\alpha \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$  existe  $\beta \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$  tal que  $\alpha \cup \beta$  es no nula en  $H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ .*

Notemos que si  $X$  es una superficie (tanto orientable como no orientable), su anillo de cohomología satisface la propiedad (A) por la Dualidad de Poincaré. Intuitivamente, si el anillo de

---

cohomología de un complejo simplicial  $K$  satisface la propiedad (A), el 2-esqueleto de  $K$  debería ser denso, en el sentido que debería contener varios 2-símplices (por ejemplo,  $K$  no puede ser homotópicamente equivalente a un wedge de la forma  $X \vee S^1$ ). Para complejos de dimensión 2, la propiedad (A) provee una cota inferior explícita para el número de vértices y 2-símplices a través de una manipulación algebraica simple de la fórmula de la característica de Euler. Más aun, excepto por unos pocos casos excepcionales, esta estimación es óptima si el complejo de dimensión 2 involucrado tiene (co)homología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  isomorfa a la de una superficie cerrada  $S$ . Esto significa que coincide con el número de vértices y 2-símplices en una triangulación mínima de  $S$ .

El segundo paso clave consiste en un método homológico de simplificación controlado por la propiedad (A). Para describir con más precisión el significado preciso de tal proceso, analizamos la estimación del covering type de superficies. Supongamos dado un complejo simplicial  $K$  del tipo homotópico de una superficie cerrada  $S$ . Si la dimensión de  $K$  es mayor a 2, su 2-esqueleto  $K^{(2)}$  tiene la misma (co)homología que  $S$  hasta grado 1 pero en general la aplicación inducida  $H_2(K^{(2)}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(S, \mathbb{Z}_2)$  es solamente suryectiva. El método homológico de simplificación está diseñado para encontrar un subcomplejo  $Z \leq K^{(2)}$  con (co)homología isomorfa a la (co)homología de  $S$  y por lo tanto, que satisface la propiedad (A). Llegados a este punto, la estimación buscada para el número de vértices y 2-símplices se deduce de la manipulación algebraica de la fórmula de la característica de Euler que ya mencionamos.

Hemos omitido hasta aquí discutir la motivación detrás de la definición de la complejidad simplicial, lo que nos lleva a otro de los temas principales de esta Tesis. Concretamente, Babenko, Balacheff y Bulteau introdujeron la complejidad simplicial de un grupo  $G$  con el objetivo de aproximar un invariante llamado *área sistólica* de  $G$ . Precisamos introducir algunos de los conceptos y resultados fundamentales de la geometría sistólica para explicar el significado de este invariante.

El *sístole*  $\text{sis}(X)$  de un espacio métrico  $X$  es la mínima longitud de un lazo que no se contrae en el espacio. Cuando este número es positivo, constituye una medida geométrica de la no trivialidad de la topología de  $X$ . El primer resultado históricamente hablando que involucra dicho invariante data del año 1949 (aunque el término “sístole” fue acuñado recién en 1980), cuando Loewner probó la siguiente suerte de desigualdad isoperimétrica inversa para 2-toros riemannianos.

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $(\mathbb{T}^2, g)$  un 2-toro riemanniano. Entonces,  $\text{sis}(\mathbb{T}^2, g)^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Area}(\mathbb{T}^2, g)$ . Además, la constante  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  es óptima y se alcanza en una métrica plana.*

Esta desigualdad fue generalizada más adelante en forma independiente por Accola [2] y Blatter [14], quienes mostraron la existencia de una constante (no óptima)  $C = C(\gamma)$  tal que para cualquier superficie riemanniana orientable  $(S, g)$  de género  $\gamma$  se verifica la desigualdad

$$\text{sis}(S, g)^2 \leq C(\gamma) \text{Area}(S, g).$$

El tema fue popularizado por Berger en los setenta (ver [13, 12]), pero recién con la aparición del artículo de Gromov *Filling Riemannian manifolds* [44] adquirió su verdadera profundidad. Uno de los principales resultados en dicho artículo es la siguiente notable generalización de las desigualdades de Loewner, Accola y Blatter.

**Teorema 3.1.2.** *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana esférica de dimensión  $n$ . Entonces, existe*

---

una constante universal  $C = C_n$ , que depende solo de la dimensión  $n$ , de manera tal que

$$\text{sis}(M, g)^n \leq C_n \text{Vol}(M, g).$$

La manera de comprender más claramente el significado de esta desigualdad es ubicándola en el contexto de las desigualdades isoperimétricas. Para probar esta desigualdad sistólica, Gromov ideó un nuevo invariante métrico para variedades riemannianas, llamado *Filling Radius*, el cual en términos informales mide cuán “redonda” es la variedad y logró relacionarlo tanto al sístole como al volumen. Más precisamente, para una subvariedad  $M$  de un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^N$ , el Filling Radius puede ser visto como el mínimo radio de un entorno alrededor de  $M$  en el cual  $M$  es un borde (esto es, tal que existe una  $(n+1)$ -cadena  $F$  con  $\partial F = M$ ). De esta forma, el vínculo entre el Filing Radius y el volumen está dado por la desigualdad isoperimétrica de Federer-Fleming [32]. En este nuevo lenguaje, la desigualdad de Federer-Fleming puede ser reinterpretada como una cota superior para el Filling Radius de una variedad embebida en un espacio euclídeo en términos puramente de una constante dimensional y su volumen. Para extender esta cota a un variedad riemanniana  $M$ , Gromov utilizó el embedding isométrico de Kuratowski para considerar  $M$  como una subvariedad del espacio de Banach  $L^\infty(M)$ . El paso técnico clave en la demostración de Gromov del Teorema 3.1.2 es una generalización (que es a la vez un refinamiento) de la desigualdad isoperimétrica de Federer-Fleming a subvariedades de espacios de Banach. De ahí se deduce una cota superior para el Filling Radius de una variedad riemanniana cerrada general únicamente en términos de una constante dimensional y el volumen. En cuanto a la desigualdad que vincula el sístole y el Filling Radius, no es difícil probar que el sístole de una variedad riemanniana está dominado módulo una constante universal por su Filing Radius.

Otra perspectiva sobre la desigualdad sistólica, más alineada con el punto de vista de la complejidad topológica, es ofrecida en el ámbito de las variedades hiperbólicas. El volumen de una variedad hiperbólica cerrada  $(M, h)$  es considerado desde hace un tiempo como una buena medida de la complejidad de la topología de  $M$ , especialmente en el contexto de 3-variedades (ver por ejemplo [81, Chapter 6]). La estimación de Thurston-Milnor para triangulaciones de variedades hiperbólicas [71] es una manifestación concreta de este principio.

**Teorema.** (*Thurston-Milnor*) Sea  $(M, h)$  una variedad hiperbólica cerrada de dimensión  $n$ . Entonces, se requieren al menos  $c_n \text{Vol}(M, h)$   $n$ -símplices para triangular  $M$ , donde  $c_n$  es una constante que depende solo de la dimensión.

Para comprender la conexión con la desigualdad sistólica de Gromov, es necesario observar que la no trivialidad de la topología de  $M$  es detectable solo a una escala mayor a  $\text{sis}(M, h)$ . Más precisamente, dado que  $M$  es esférica, las bolas de radios menores a la mitad del sístole resultan contráctiles en  $M$ . Por lo tanto, intuitivamente, cubrir una variedad hiperbólica  $M$  con topología compleja debería requerir muchas bolas de radio pequeño (las bolas juegan el rol de los  $n$ -símplices en esta analogía), de forma que es esperable que  $M$  no pueda tener un volumen arbitrariamente pequeño (consultar también el ensayo de Guth [49] para más detalles).

Con esto en mente, el volumen de un espacio normalizado por su sístole puede ser considerado como una medida de la complejidad de la topología subyacente. Esta idea es formalizada gracias a la definición de un invariante numérico llamado *volumen sistólico*, introducido por Gromov, el cual aplica a la categoría de *poliedros riemannianos a trozos*, más general y flexible que la de variedades riemannianas. Un poliedro riemanniano a trozos es simplemente un poliedro en el que cada

---

símplex (considerado como una variedad con borde) está equipado con una métrica riemanniana suave de manera compatible. El volumen sistólico  $\sigma(X)$  de un poliedro  $X$  de dimensión  $n$  (o también *área sistólica*, en el caso que la dimensión sea  $n = 2$ ) se define por

$$\sigma(X) := \inf_g \frac{\text{Vol}(X, g)}{\text{sis}(X, g)^n},$$

donde el ínfimo es tomado sobre las métricas riemannianas a trozos  $g$  en  $X$ . El estudio de este invariante constituye uno de los problemas centrales de la geometría sistólica. En particular, es relevante detectar bajo qué condiciones topológicas sobre  $X$  el volumen sistólico es estrictamente positivo y, resuelta esa cuestión, calcular el valor exacto de  $\sigma$  para cada espacio topológico, o al menos buenas estimaciones.

Respecto al primer punto, la demostración de Gromov de la desigualdad sistólica es bastante robusta y aplica a la clase de poliedros *esenciales*, si bien con peores constantes. Recordemos que un poliedro de dimensión  $n$  es esencial si existe un poliedro esférico  $K$  junto con una función continua  $X \rightarrow K$  que no se contrae al  $(n - 1)$ -esqueleto de  $K$ . En particular, todas las variedades esféricas son esenciales, como podemos ver tomando esta función como la identidad. En este nuevo lenguaje, la desigualdad sistólica de Gromov toma la siguiente forma.

**Teorema 3.2.6.** (*Gromov*) *Sea  $X$  un poliedro esencial de dimensión  $n$ . Entonces, existe una constante positiva  $C_n$  tal que  $\sigma(X) \geq C_n$ .*

El segundo problema, como es esperable, es extremadamente difícil. Hasta donde sabemos, las únicas variedades cerradas para las cuales se conoce el valor del volumen sistólico son el toro (debido a Loewner), el plano proyectivo [73] y la botella de Klein [11]. Además, se piensa que en general las métricas en las que se alcanza el volumen sistólico contienen singularidades (esto sucede por ejemplo en el caso de la botella de Klein), por lo que podría ser complicado incluso conjeturar cómo son las métricas óptimas. Sin embargo, para el caso específico de las superficies hay varias buenas estimaciones disponibles. Entre ellas, se destaca que el comportamiento asintótico exacto del área sistólica de las superficies con respecto al género fue determinado por Gromov [44] (cota inferior) y Buser y Sarnak [27] (cota superior).

**Teorema 3.2.5.** *Existen constantes positivas  $C, C'$  tales que dada una superficie  $S$  de género  $g$ ,*

$$C \frac{g}{\log(g)^2} \leq \sigma(S) \leq C' \frac{g}{\log(g)^2}.$$

Otro aspecto que se conoce es el valor mínimo que puede tomar el área sistólica de las superficies, gracias una vez más a una desigualdad probada por Gromov [44, §5.2.B]. Específicamente, se puede deducir que  $\sigma(S) \geq \frac{2}{\pi}$  para cualquier superficie no simplemente conexa  $S$ , ya sea orientable o no. La igualdad se alcanza únicamente en el caso del plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  con su métrica redonda standard.

Aparte de las superficies, nos abocamos principalmente al estudio del volumen sistólico en dimensión 2 debido a su conexión con los grupos finitamente presentables. Siguiendo a Gromov [46], es posible asociar a cada grupo finitamente presentable un invariante de índole geométrica conocido como *área sistólica*. El área sistólica  $\sigma(G)$  de un grupo finitamente presentable  $G$  se define como

$$\sigma(G) := \inf_{\pi_1(X)=G} \sigma(X),$$

---

donde el ínfimo se toma sobre aquellos poliedros riemannianos a trozos  $X$  cuyo grupo fundamental es isomorfo a  $G$ . Una pregunta natural, debido a la considerable cantidad de información disponible sobre el área systólica de superficies cerradas, es cómo se compara el área systólica de una superficie cerrada  $S$  con el área systólica de su grupo fundamental más allá de la desigualdad obvia  $\sigma(\pi_1(S)) \leq \sigma(S)$ . Los autores proveen una respuesta bastante satisfactoria en [5], al mostrar que el área systólica de grupos fundamentales de superficies crece asintóticamente con el género  $g$  como  $\frac{g}{\log(g)^2}$ , con lo cual exhibe el mismo comportamiento asintótico que el área systólica de las superficies. Además, nuestro Teorema 4.4.7 puede ser leído como una indicación de que el modelo geométrico-topológico más eficiente para un grupo de superficie es la propia superficie. Por lo tanto, la conjetura más optimista posible sería que vale la igualdad  $\sigma(\pi_1(S)) = \sigma(S)$ . Lamentablemente, este problema parece demasiado difícil y de hecho, el valor exacto para el área systólica no fue determinado para ningún grupo no libre. Como una manera alternativa de comparar estas cantidades, nos enfocamos en mejorar la cota inferior común para el área systólica de grupos de superficie. En contraste con el caso del área systólica de superficies, para las cuales se sabe, como vimos, que  $\frac{2}{\pi}$  es la cota inferior común óptima, no había resultados en la literatura formulados para el caso específico de los grupos de superficie. Más bien, la mejor cota inferior universal conocida es válida para todos los grupos no libres: por los trabajos de Katz, Rudyak y Sabourau [64], Rudyak y Sabourau [76], y Katz, Katz, Sabourau, Shnider y Weinberger [63], se sabe que  $\sigma(G) \geq \frac{1}{4}$  siempre que  $G$  sea un grupo no libre. Esta cota es una mejora considerable respecto de la cota inferior  $\frac{1}{10^4}$ , que es la que se puede extraer a partir de las técnicas originales de Gromov para estos grupos [44, Theorem 6.7.A]. Por analogía con el caso de las superficies, la constante  $\frac{2}{\pi}$  es candidata a ser óptima también para el área systólica de grupos de superficie (o incluso para grupos no libres, cf. [76, Question 1.5]). En esta dirección, refinamos la cota inferior común para el área systólica de una gran clase de grupos que incluye los grupos de superficie, acercándola más a  $\frac{2}{\pi}$ . Esta clase de grupos, que bautizamos *de tipo superficie*, está definida en términos de una condición cohomológica.

**Definición 3.3.9.** *Sea  $G$  un grupo. Decimos que  $G$  es de tipo superficie si existen clases  $\alpha, \beta$  en  $H^1(G, \mathbb{Z}_2)$  tales que  $\alpha \cup \beta \neq 0$  en  $H^2(G, \mathbb{Z}_2)$ .*

Tal como sugiere el nombre, los grupos de superficie resultan ser de tipo superficie por la Dualidad de Poincaré.

**Teorema 3.3.10.** *Sea  $K$  un complejo de dimensión 2 tal que existen clases  $\alpha, \beta \in H^1(K, \mathbb{Z}_2)$  con  $\alpha \cup \beta \neq 0$ . Entonces,  $\sigma(K) \geq \frac{1}{2}$ . En particular, si  $G$  es un grupo de tipo superficie,  $\sigma(G) \geq \frac{1}{2}$ .*

Destacamos que el uso de un argumento de teoría de revestimientos tomado de [63] (aunque ciertamente también conocido por Gromov) permite extender la desigualdad a grupos que contienen un subgrupo de tipo superficie. Esta clase incluye entre otros a los grupos abelianos libres, la mayoría de los grupos fundamentales de 3-variedades irreducibles, los grupos de Artin no libres y los grupos de Coxeter o, más generalmente, grupos que contienen un elemento de orden 2.

La desigualdad del Teorema 3.3.10 puede ser considerada como una extensión de una desigualdad de Guth [50] en dimensión 2 a complejos de  $\mathbb{Z}_2$  cup-length maximal, así como también una generalización de la desigualdad de Burago y Hebda para superficies cerradas esenciales [26, 53]. La demostración, vagamente inspirada en los métodos (co)homológicos previamente descritos, involucra realizar una cierta clase de homología (con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$ ) del 2-complejo  $K$  por

---

una aplicación simplicial  $f : S \rightarrow K$  de una manera controlada (donde  $S$  es una superficie triangulada). La imagen de esta aplicación es una “superficie” (en un sentido estricto, en general no es una superficie pues su 1-esqueleto puede ser singular) contenida en  $K$  que resulta tener área relativamente grande debido a una desigualdad de Nakamura [72] que refina la desigualdad de Guth.

La Tesis está organizada en cuatro capítulos. El primer capítulo es inaugurado por una digresión sobre la categoría de Lusternik-Schnirelmann y algunos de los invariantes relacionados, con foco en las versiones discretas recientes. El tema principal es la definición y el análisis de un nuevo invariante de tipo L-S para poliedros compactos llamado *categoría geométrica PL*, diseñado para explotar la estructura combinatoria de espacios que admiten triangulaciones y a la vez capturar parte de su topología y geometría inherente. En el Capítulo 2, analizamos el covering type de espacios y presentamos la solución al problema planteado por Karoubi y Weibel [61] que citamos sobre las triangulaciones mínimas del tipo homotópico de superficies. El tercer capítulo se dedica a la geometría sistólica, con foco en el estudio del área sistólica de grupos. Aquí brindamos la demostración de nuestra extensión de la desigualdad sistólica de Guth. Asimismo, describimos una construcción para complejos que admiten aplicaciones a un wedge de espacios basada en la demostración de Stallings del teorema de Grushko. Pensamos que esta construcción puede contribuir al estudio de modelos geométrico-topológicos óptimos para productos libres de grupos. En el capítulo final, discutimos sobre la complejidad simplicial de grupos, algunas de sus propiedades y la relación con el área sistólica de grupos. Finalmente, presentamos la respuesta al problema planteado por Babenko, Balacheff y Bulteau [4] acerca de las triangulaciones óptimas de grupos de superficie.

Varios de los resultados originales de la Tesis aparecen en los trabajos [16, 17, 18] y en el preprint [15]. Otros resultados formarán parte de un trabajo en preparación.

# Introduction

One of the objectives in the field of quantitative topology and geometry is to turn qualitative and existence results in algebraic topology into quantitative ones by studying some measures (often continuous) of the size and complexity of the maps and spaces involved. This process is perhaps best illustrated by some concrete examples.

- It is a basic fact from algebraic topology that a null-homotopic loop  $\gamma : S^1 \rightarrow X$  is filled by a “disk”  $\bar{\gamma} : D \rightarrow X$ . The space  $X$  often comes with some natural inherent geometry (like a distance function or a riemannian metric) which allows to measure how difficult is to realize the trivialization of the loop by looking at the “size” of the filling disks  $D$ , for instance, the Hausdorff measure or parameterized area. This leads to the well-known notion of filling function of riemannian manifolds. That the filling function of a riemannian manifold  $M$  presents the same qualitative behavior as the Dehn filling of its fundamental group  $\pi_1(M)$  is a foundational result in geometric group theory (see [45, 22]).
- One of the most basic invariants of a group  $G$  (say, finitely generated) is its cardinality. By fixing a finite (symmetric) generating set  $\mathcal{A}$  of  $G$ , it is possible to refine the study of the cardinality of  $G$  by counting for each natural  $n$  the number of different elements of  $G$  expressible as words of length at most  $n$  in the alphabet  $\mathcal{A}$ . This is the growth function of the group  $G$  with respect to the generating set  $\mathcal{A}$ , which is a central object of study in geometric group theory. Remarkably, the growth function of a group contains algebraic information about the group, as it is shown by Gromov’s characterization of the finitely generated groups with polynomial growth function as the groups having nilpotent subgroups of finite index [41].

The unifying theme of this Thesis is the study of quantitative invariants that measure in different senses the complexity of the topology or the homotopy type of a space, as well as the topological models at which the optimal values for these invariants are attained. As opposed to the classical approach of algebraic topology, which focuses on developing algebraic tools and invariants to study a space, such as homology and homotopy groups, the objective here is to obtain a single non-negative number that accounts for the inherent complexity of a space, or at least, some aspect of it. A natural way to accomplish this task is by first identifying the *simplest* possible spaces (for instance, disks, balls, contractible sets, etc.) and then setting the complexity of a space  $X$  to be the minimum number of simple pieces required to assemble  $X$ . The classical Lusternik-Schnirelmann (L-S) category of a space, introduced in [67], is a prototypical invariant tailored according to this pattern. Since from the point of view of homotopy theory the simplest sets are the contractible ones, here for a space  $X$  the rôle of simple pieces is played

---

by the open sets contractible to a point in  $X$ . The L-S category of  $X$  is then defined as the minimum number of open sets contractible in the space that cover  $X$ . This turns out to be a homotopy invariant of a space which has been applied in a wide range of fields, from estimating the number of critical points of a smooth real function on a manifold to nilpotency aspects of homotopy types (see [29] for more details). Over the last years, there has been a renewed interest in the area of L-S category and related invariants. Besides the introduction of new L-S category type invariants (among them, Farber's *topological complexity* [31] is probably the one that has attracted the most attention), several works have concentrated on giving the *right* analogues of L-S category and related invariants in the context of discrete objects, such as simplicial complexes, polyhedra or finite topological spaces (see for example [1, 34, 33]). The common principle underlying these works is the replacement of contractible sets as the simple building pieces of spaces by other notions of homotopically simple sets that exploit the more rigid nature of the category under study (for example, collapsible sets in the classical Whitehead's simple homotopy theory in [1] or strong collapsible sets in the relatively new strong homotopy types of Barmak and Minian [9] in [34, 33]). Another, perhaps rougher way to measure complexity when one deals with spaces admitting a triangulation is through minimal triangulations. The problem of determining small triangulations of PL manifolds was investigated by a number of authors (see for example [20, 21, 68, 69, 58, 75] and references therein) and it was related explicitly to the complexity of the topology of 3-manifolds by Matveev [70] (more precisely, his notion of *combinatorial complexity* uses minimal pseudotriangulations instead of triangulations).

Interestingly, the point of view of minimal triangulations is related to L-S category type invariants by Karoubi and Weibel through the introduction of the *covering type* of a space [61]. Recall that an open cover of a space is a *good cover* if every nonempty intersection of its members is contractible. The covering type of a space  $X$  is defined as the minimum size of a good cover of a space  $Y$  of the homotopy type of  $X$ . This invariant is closely related to minimal triangulations of homotopy types by the following argument. By the Nerve Theorem, a topological space  $X$  admitting a good cover  $\mathcal{U}$  of cardinality  $n$  is homotopy equivalent to the nerve of  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$  of the cover, which is a simplicial complex on  $n$  vertices. Hence, for those spaces  $X$  of the homotopy type of a finite simplicial complex (for example, all compact CW-complexes fall in this class) the covering type is the minimum number of vertices in a simplicial complex  $K$  homotopy equivalent to  $X$ . In the cited work [61], Karoubi and Weibel computed the covering type of 1-dimensional simplicial complexes and posed the problem of finding the exact value of the covering type of closed surfaces. Using the reformulation via the Nerve Theorem, this is equivalent to the following natural question:

*What is the minimum number of vertices in a simplicial complex homotopy equivalent to a given closed surface?*

We provide a complete solution to this problem by proving that the expected result *almost* holds.

**Teorema 2.4.5.** *Let  $S$  be a closed surface, either orientable or non-orientable. Then, the covering type of  $S$  coincides with the minimum number of vertices in an optimal triangulation of  $S$ , with the only exception of the torus with two handles in which case both numbers differ by 1.*

We remark that an explicit formula for the minimum number of vertices in a triangulation of any closed surface is well known. It was obtained by Ringel [75] in the non-orientable case and Jungerman and Ringel [58] in the orientable case.

A similar (at least, at first sight) question was recently raised by Babenko, Balacheff and



---

Bulteau ([4]):

*What is the minimum number of 2-simplices in a simplicial complex with the fundamental group of a given closed surface  $S$ ?*

This second problem is related to a combinatorial invariant of groups introduced by the authors in [4] called *simplicial complexity*. Given a (finitely presentable) group  $G$ , let us say that a connected simplicial complex  $K$  is a *triangulation* of  $G$  or that  $K$  *triangulates*  $G$  if  $\pi_1(K) = G$ . The simplicial complexity of the group  $G$  is defined as the minimum number of 2-simplices in a triangulation of  $G$ . As opposed to what happens for the covering type, we show that there are no exceptional cases for the simplicial complexity of fundamental groups of surfaces. In what follows, we will refer by *surface groups* to this class of groups, as usual.

**Teorema 4.4.7.** *The simplicial complexity  $\kappa(\pi_1(S))$  of the fundamental group of a non-simply connected closed surface  $S$  coincides with the minimum number of 2-simplices in an optimal triangulation of  $S$ . Furthermore, the simplicial complexity of surface groups is stable under free product with free groups, that is,  $\kappa(\pi_1(S) * \mathbb{Z}) = \kappa(\pi_1(S))$ .*

Previously, the exact value of the simplicial complexity was known only for a few specific groups ( $\mathbb{Z}_2$ ,  $\mathbb{Z}_3$ ,  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  and the fundamental group of the Klein bottle), obtained mainly by a case-by-case analysis in [25]. With regard to the second statement, it was conjectured by the authors in [4] that the simplicial complexity is stable under free product of groups, i.e. that  $\kappa(G) = \kappa(G * \mathbb{Z})$  for finitely presented groups  $G$ . The conjecture is motivated by the fact that, from a triangulation of a group  $G$ , it is always possible to obtain a triangulation of  $G * \mathbb{Z}$  with no additional 2-simplices by forming a wedge sum with (a triangulation of)  $S^1$ . Beyond the notation, the question is whether this natural construction is the optimal way to triangulate a group of the form  $G * \mathbb{Z}$ . The verification of the conjecture in the case of surface groups constitutes the first (even if partial) evidence in favor of an affirmative answer to this question.

Both Theorems 2.4.5 and 4.4.7 indicate that in a quantifiable way the closed surfaces are the most effective topological models within their homotopy type. To prove these results, we employed the same core techniques, which we proceed to describe. The first crucial step is the identification of a relevant property in the cohomology ring of spaces and groups, which we call *property (A)*.

**Definición 2.3.2.** *Let  $X$  be a topological space or a group. We say that the cohomology ring  $H^*(X; \mathbb{Z}_2)$  satisfies property (A) if for every non-trivial  $\alpha \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$  there exists  $\beta \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$  such that  $\alpha \cup \beta$  is non-trivial in  $H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ .*

Notice that if  $X$  is a surface (either orientable or non-orientable), its cohomology ring satisfies property (A) by Poincaré Duality. Intuitively, if the cohomology ring of a simplicial complex  $K$  satisfies property (A), the 2-skeleton of  $K$  should be dense, in the sense that it should contain several 2-simplices (for instance,  $K$  cannot be homotopy equivalent to a wedge sum of the form  $X \vee S^1$ ). For complexes of dimension 2, property (A) implies an explicit quantitative lower bound for the number of vertices and 2-simplices through a straightforward Euler characteristic computation. In addition, except for a few exceptional cases this estimate is optimal if the involved 2-dimensional complex has  $\mathbb{Z}_2$ -(co)homology isomorphic to that of a closed surface  $S$ , which means that it coincides with the number of vertices or 2-simplices in a minimal triangulation of  $S$ .

---

The second key step is a homological simplification method controlled by the property (A). The precise meaning of such a process is best illustrated while estimating the covering type of surfaces. Suppose given a simplicial complex  $K$  of the homotopy type of a closed surface  $S$ . If the dimension of  $K$  is greater than 2, its 2-skeleton  $K^{(2)}$  has the same (co)homology as  $S$  up to degree 1 but in general the induced map  $H_2(K^{(2)}, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(S, \mathbb{Z}_2)$  is only surjective. The homological simplification method allows to find a subcomplex  $Z \leq K^{(2)}$  with  $\mathbb{Z}_2$ -(co)homology isomorphic to that of  $S$  and hence, satisfying property (A). Now the desired estimate for the number of vertices and 2-simplices follows from the mentioned Euler characteristic computation.

We have omitted so far to discuss the motivation behind the definition of the simplicial complexity, which brings us to another of the central subjects of this Thesis. Namely, Babenko, Balacheff and Bulteau introduced the simplicial complexity of a group  $G$  to approximate an invariant called the *systolic area* of  $G$ . To give a meaningful account of this notion, we need to briefly introduce some fundamental concepts and results in systolic geometry and topology.

The systole  $\text{sys}(X)$  of a metric space  $X$  is the length of a shortest non-contractible loop in the space. If positive, it is a metric measure of the non-triviality of the topology of  $X$ . Historically, the first result involving this invariant dates from 1949 (although not under that name, which was coined in 1980), when Loewner proved the following kind of inverse isoperimetric inequality for riemannian 2-tori.

**Teorema 3.1.1.** *Let  $(\mathbb{T}^2, g)$  be a riemannian 2-torus. Then,  $\text{sys}(\mathbb{T}^2, g)^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Area}(\mathbb{T}^2, g)$ . Moreover, the constant  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  is optimal and it is realized by a flat metric.*

This was later generalized by Accola [2] and Blatter [14], who proved independently the existence of a non-optimal constant  $C = C(\gamma)$  such that for any orientable riemannian surface  $(S, g)$  of genus  $\gamma$  the inequality

$$\text{sys}(S, g)^2 \leq C(\gamma) \text{Area}(S, g)$$

holds. The subject was popularized by Berger in the seventies (see [13, 12]), but it was not until Gromov's *Filling Riemannian manifolds* [44] that it reached full maturity. One of the main results in that article is a far-reaching generalization of the inequalities by Loewner, Accola and Blatter.

**Teorema 3.1.2.** *Let  $(M, g)$  be an aspherical riemannian manifold of dimension  $n$ . Then, there exists a universal constant  $C = C_n$  depending only on the dimension  $n$  such that*

$$\text{sys}(M, g)^n \leq C_n \text{Vol}(M, g).$$

The best way of understanding the significance of this estimate is seeing it as a part of the constellation of isoperimetric inequalities. To prove this systolic inequality, Gromov introduced a new metric invariant of riemannian manifolds, called *filling radius*, which informally speaking measures the “roundness” of the manifold and related it to both the systole and the volume. More precisely, for a submanifold  $M$  of an euclidean space  $\mathbb{R}^N$ , the filling radius can be viewed as the minimum radius of a neighbourhood around  $M$  in which  $M$  bounds (that is, such that there exists an  $(n+1)$ -chain  $F$  with  $\partial F = M$ ). Thus the link between the filling radius and the volume is given by the Federer-Fleming isoperimetric inequality [32], which may be interpreted in this new language to provide an upper estimate for the filling radius of a manifold sitting in

---

an Euclidean space in terms only of a dimensional constant and its volume. In order to extend this for a general closed riemannian manifold  $M$ , Gromov employed the Kuratowski isometric embedding to view  $M$  as a submanifold of the Banach space  $L^\infty(M)$ . The crucial technical step in Gromov's proof of Theorem 3.1.2 is an extension of the Federer-Fleming isoperimetric inequality [32] to submanifolds of Banach spaces, obtaining in this way an upper bound for the filling radius of a manifold only in terms of its volume and a dimensional constant. As for the estimate involving the systole and the filling radius, it is not difficult to prove that the systole of a riemannian manifold is dominated up to a universal constant by its Filling Radius.

Another perspective on the systolic inequality, more in line with the topological complexity viewpoint, is offered in the field of hyperbolic manifolds. The volume of a hyperbolic manifold  $(M, h)$  was long regarded as a good measure of the complexity of the topology of  $M$ , especially in the context of 3-manifolds (see for example [81, Chapter 6]). The Thurston-Milnor triangulation estimate [71] is a concrete manifestation of this principle.

**Teorema** (Thurston-Milnor). *Let  $(M, h)$  be a closed hyperbolic  $n$ -manifold. Then, any triangulation of  $M$  requires at least  $c_n \text{Vol}(M, h)$   $n$ -simplices, where  $c_n$  is a constant that depends only on the dimension.*

To see the connection with Gromov's systolic inequality, notice that since a hyperbolic manifold  $M$  is aspherical, the non-trivial topology of  $M$  occurs at a scale larger than  $\text{sys}(M, h)$ . More precisely, balls of radii less than half the systole are contractible in  $M$ . Thus, intuitively it should take many balls of small radius (which play the rôle of the  $n$ -simplices in this analogy) to cover a hyperbolic manifold  $M$  with complex topology, which therefore cannot have arbitrarily small volume (see also Guth's survey [49] for more details).

With this in mind, the volume of a space normalized by its systole may be considered as a measure of the complexity of the underlying topology. This idea is formalized by the definition of a numerical invariant called *systolic volume*, introduced by Gromov, which is meaningful for the category of *piecewise riemannian polyhedra*, more general and flexible than that of riemannian manifolds. A piecewise riemannian polyhedron is a polyhedron in which every simplex is endowed with a smooth riemannian metric (as a manifold with boundary) in a compatible way. The systolic volume  $\sigma(X)$  of a polyhedron  $X$  of dimension  $n$  (or also *systolic area*, in case that the dimension  $n = 2$ ) is defined as

$$\sigma(X) := \inf_g \frac{\text{Vol}(X, g)}{\text{sys}(X, g)^n},$$

where the infimum is taken over the piecewise riemannian metrics  $g$  on  $X$ . The study of this invariant is one of the central problems in systolic geometry. In particular, one would like to know under which topological conditions on  $X$  this invariant is strictly positive, and once that is established, what is the precise value of  $\sigma$  within each topological type (or at least good estimates for it).

As for the first question, Gromov's proof of the systolic inequality is robust enough to apply to the class of *essential* polyhedra, although with worse constants. Recall that an  $n$ -dimensional polyhedron is called essential if there exists an aspherical polyhedron  $K$  together with a continuous map  $X \rightarrow K$  that does not contract to the  $(n - 1)$ -skeleton of  $K$ . In particular, by taking this map to be the identity, we see that all aspherical manifolds are essential. Using this new language, Gromov's systolic inequality takes the following form.

---

**Teorema 3.2.6.** (Gromov) *Let  $X$  be an essential polyhedron of dimension  $n$ . Then there exists a positive constant  $C_n$  such that  $\sigma(X) \geq C_n$ .*

With respect to the second problem, as it may be expected, it is an extremely difficult one. To the best of our knowledge, the only closed manifolds for which the systolic volume is known are the torus (due to Loewner), the projective plane [73] and the Klein bottle [11]. Moreover, it is expected that, in general, the metrics realizing the systolic volume of manifolds contain singularities (this happens for example in the case of the Klein bottle), so it could be very difficult to even guess how the optimal metrics look like. However, for the specific case of surfaces several good estimates are available. Most relevantly, the precise asymptotic behavior of the systolic area of surfaces with respect to the genus was determined by Gromov [44] (lower bound) and Buser and Sarnak [27] (upper bound).

**Teorema 3.2.5.** *There exist positive constants  $C, C'$  such that given a surface  $S$  of genus  $g$ ,*

$$C \frac{g}{\log(g)^2} \leq \sigma(S) \leq C' \frac{g}{\log(g)^2}.$$

The minimum value that the systolic area of a surfaces can take is also known, due to yet another Gromov's inequality [44, §5.2.B]. Specifically, it can be deduced that  $\sigma(S) \geq \frac{2}{\pi}$  for any closed (either orientable or non-orientable) non-simply connected surface  $S$ , with equality attained only at the real projective plane endowed with its standard round metric.

Besides surfaces, we are mainly concerned with the study of the systolic volume of polyhedra of dimension 2 for its connection with finitely presentable groups. Following Gromov [46], it is possible to attach a geometrically defined invariant to each finitely presentable group known as *systolic area*. The systolic area  $\sigma(G)$  of a finitely presentable group  $G$  is defined as

$$\sigma(G) := \inf_{\pi_1(X)=G} \sigma(X),$$

where the infimum is over the compact piecewise riemannian polyhedra  $X$  with fundamental group isomorphic to  $G$ . Since plenty is known about the systolic area of closed surfaces, a natural question would be to understand how the systolic area of a closed surface  $S$  compares to the systolic area of its fundamental group, beyond the obvious inequality  $\sigma(\pi_1(S)) \leq \sigma(S)$ . A quite satisfactory answer was provided in [5], where the authors showed that the systolic area of fundamental groups of surfaces grows asymptotically with the genus  $g$  as  $\frac{g}{\log(g)^2}$  and thus exhibits the same asymptotic behavior as the systolic area of surfaces. Moreover, our Theorem 4.4.7 could be read as an indication that the most efficient geometric-topological model of a surface group is the surface itself. Hence, the most optimistic conjecture would be that  $\sigma(\pi_1(S)) = \sigma(S)$ . Unfortunately, this problem seems very hard and in fact, the precise value of the systolic area is not known for any non-free group. As an alternative way to compare these quantities, we focus on improving the universal lower bound for the systolic area of surface groups. In contrast to the case of the systolic area of surfaces, for which it is known that  $\frac{2}{\pi}$  is the optimum universal lower bound, there were no results in the literature addressing this issue for surface groups. Rather, the best lower bound available is valid for all non-free groups: by the combined works of Katz, Rudyak and Sabourau [64], Rudyak and Sabourau [76], and Katz, Katz, Sabourau, Shnider and Weinberger [63], it is known that  $\sigma(G) \geq \frac{1}{4}$  whenever  $G$  is a non-free group. This constitutes a considerable improvement over the lower bound  $\frac{1}{10^4}$ , which is the estimate that can be extracted

---

from the original techniques of Gromov for these groups [44, Theorem 6.7.A]. By analogy to the case of surfaces, the constant  $\frac{2}{\pi}$  is a candidate to be optimal also for the systolic area of surface groups (or even for non-free groups, cf. [76, Question 1.5]). In this direction, we refine the universal lower bound for the systolic area of a large class of groups which includes the surface groups, bringing it closer to  $\frac{2}{\pi}$ . This class of groups, which we call *surface-like* groups is defined in terms of a cohomological condition.

**Definición 3.3.9.** *Let  $G$  be a group. We say that  $G$  is surface-like if there exist classes  $\alpha, \beta$  in  $H^1(G, \mathbb{Z}_2)$  such that  $\alpha \cup \beta \neq 0$  in  $H^2(G, \mathbb{Z}_2)$ .*

Notice that as the name suggests, surface groups are surface-like as follows from Poincaré Duality.

**Teorema 3.3.10.** *Let  $K$  be a 2-dimensional complex such that there exist classes  $\alpha, \beta \in H^1(K, \mathbb{Z}_2)$  with  $\alpha \cup \beta \neq 0$ . Then,  $\sigma(K) \geq \frac{1}{2}$ . In particular, if  $G$  is a surface-like group,  $\sigma(G) \geq \frac{1}{2}$ .*

We remark here that the use of a covering theory argument borrowed from [63] (certainly also known to Gromov) allows to extend the inequality to groups containing a surface-like subgroup, a class that includes among others, free abelian groups, most of irreducible 3-manifold groups, non-free Artin groups and Coxeter groups or, more generally, groups containing an element of order 2.

The inequality from Theorem 3.3.10 can be regarded both as an extension of a systolic inequality due to Guth [50] in dimension 2 to complexes of maximal  $\mathbb{Z}_2$  cup-length, and as a generalization of Burago and Hebda's inequality for closed essential surfaces [26, 53]. The proof, vaguely inspired in the (co)homological methods previously described, involves realizing a certain  $\mathbb{Z}_2$ -homology class of the 2-complex  $K$  by a simplicial map  $f : S \rightarrow K$  from a (triangulated) closed surface  $S$  in a controlled way. The image of this map is a *surface* embedded in  $K$  (strictly speaking it is in general not a surface since its 1-skeleton may contain singularities), which turns out to have relatively large area by a systolic inequality of Nakamura [72] which refines Guth's inequality.

The Thesis is divided in four chapters. The first chapter is opened by a discussion about the Lusternik-Schnirelmann category and some related invariants, with emphasis in the recent discrete versions. The main subject is the definition and analysis of a new invariant of type L-S for compact polyhedra called the *PL geometric category*, designed to exploit the combinatorial structure of spaces admitting triangulations while at the same time capturing some of its inherent topology and geometry. In Chapter 2, we analyze the covering type of spaces and present the resolution of the quoted problem raised by Karoubi and Weibel [61] about minimal triangulations of the homotopy type of surfaces. The third chapter is devoted to systolic geometry, with a focus in the study of the systolic area of groups. Here we give the proof of our extension of Guth's systolic inequality. Also, we describe a construction for complexes mapping to a wedge sum based in Stallings's proof of Grushko theorem [79]. We think that this construction may shed new light in the study of optimal geometrical-topological models for free products of groups. In the final chapter we discuss the simplicial complexity of groups, some of its properties and its relation to the systolic area of groups, to finally present the answer to the question posed by Babenko, Balacheff and Bulteau [4] about optimal triangulations of surface groups.

Some of the original results in this Thesis appear in our works [17, 18, 16] and in the preprint [15]. Other results will be part of a work in preparation.



# Índice general

<b>1. Categoría de Lusternik-Schnirelmann e invariantes relacionados</b>	<b>19</b>
1.1. Categoría de Lusternik-Schnirelmann . . . . .	20
1.2. Versiones discretas de invariantes de tipo L-S . . . . .	24
1.3. Cubrimientos de poliedros por subpoliedros PL colapsables . . . . .	27
1.4. Categoría geométrica PL en dimensión 2 . . . . .	30
1.4.1. La geometría de presentaciones one-relator . . . . .	34
1.4.2. Poliedros interiormente conexos . . . . .	37
<b>2. Triangulaciones mínimas del tipo homotópico de superficies</b>	<b>39</b>
2.1. Triangulaciones mínimas de superficies . . . . .	40
2.2. El covering type de espacios . . . . .	41
2.3. El covering type de superficies . . . . .	43
2.4. El covering type de superficies: los casos excepcionales . . . . .	47
<b>3. Geometría sistólica</b>	<b>51</b>
3.1. Un panorama general en geometría sistólica . . . . .	53
3.2. Área sistólica . . . . .	58
3.3. Una extensión de la desigualdad sistólica de Guth . . . . .	64
3.3.1. Área sistólica de grupos . . . . .	70
3.4. Área sistólica de un producto libre de grupos . . . . .	71
<b>4. Una aproximación discreta para el área sistólica</b>	<b>79</b>
4.1. La complejidad simplicial de grupos . . . . .	79
4.2. Un método de simplificación homológica . . . . .	82
4.3. Una cota inferior para la complejidad simplicial . . . . .	85
4.4. La complejidad simplicial de grupos de superficie . . . . .	86
4.5. La complejidad simplicial de un producto libre de grupos . . . . .	89
<b>Bibliografía</b>	<b>93</b>





# Capítulo 1

## Categoría de Lusternik-Schnirelmann e invariantes relacionados

La categoría de Lusternik-Schnirelmann (L-S) es un invariante numérico asociado a espacios topológicos, introducido originalmente en [67] para variedades suaves en el contexto de problemas variacionales. Uno de los principales objetivos de Lusternik y Schnirelmann era relacionar el número de puntos críticos de una función suave a valores reales definida sobre una variedad con la topología de la variedad. La también clásica Teoría de Morse, desarrollada poco tiempo después con las mismas motivaciones, provee una profunda conexión entre la estructura del conjunto de puntos críticos de una función suave y el tipo homotópico de la variedad. Si bien las conclusiones de la teoría de Lusternik-Schnirelmann son más débiles, complementa la teoría de Morse en el sentido que aplica a variedades de dimensión infinita y a funciones con puntos críticos degenerados.

Unos años más tarde, Fox reformuló en [36] la definición de categoría L-S, extendiéndola a espacios topológicos arbitrarios. En el trabajo citado, entre otras cosas Fox analizó la interacción entre la categoría L-S de un espacio e invariantes topológicos clásicos, tales como los grupos de homología y homotopía. De esta manera, la categoría L-S quedó instalada como un tema de estudio en el campo de la topología algebraica. En este nuevo marco, la categoría L-S puede leerse como una medida de la complejidad de la topología (o más precisamente, del tipo homotópico) de un espacio. Concretamente, se define para un espacio topológico  $X$  la categoría L-S como el mínimo número de conjuntos abiertos contráctiles en el espacio que cubren a  $X$ . Teniendo en cuenta que los conjuntos contráctiles son los más simples posibles desde el punto de vista de la teoría de homotopía, la categoría L-S mide cuán difícil es descomponer un espacio en bloques *simples*, lo que da una idea de la complejidad intrínseca del espacio.

En la primera sección de este capítulo presentamos brevemente algunas de las propiedades y resultados fundamentales sobre la categoría L-S. No se pretende que esta introducción sea exhaustiva. Más bien, nos interesa subrayar ciertos aspectos estructurales, tales como la relación de la categoría L-S con la cohomología y la dimensión de un espacio, que reaparecerán más adelante en nuestro propio trabajo. A continuación, exhibimos algunas de las discretizaciones de la categoría L-S e invariantes relacionados para complejos simpliciales. Más allá de la introducción de nuevos invariantes de tipo L-S, en los últimos años aparecieron una cantidad considerable de trabajos dedicados a obtener versiones discretas de la categoría L-S, así como de resultados relacionados.

Nuevamente, no buscamos abarcar completamente el área en la exposición. Nos limitamos simplemente a describir dos de estos invariantes, introducidos con motivaciones bastante diversas, que inspiraron en parte nuestra propia contribución al área de invariantes discretos de tipo L-S. Específicamente, para la *categoría discreta* de [1], los autores recuperan una versión del teorema de Lusternik-Schnirelmann, que consiste en una estimación para el número de puntos críticos de una función suave en una variedad. Por otra parte, con la introducción de la *categoría L-S simplicial* [34], los autores buscan dar la definición “correcta” de la categoría L-S en la categoría de complejos simpliciales. Para lograrlo, los autores trabajan en el marco de la teoría de tipos homotópicos fuertes de Barmak y Minian [9] en reemplazo de la teoría de homotopía clásica, lo que los lleva a obtener una noción que depende fuertemente de la estructura combinatoria de los complejos simpliciales. En la última sección abordamos un nuevo invariante de tipo L-S, llamado *categoría geométrica PL*, que utiliza la noción de *PL colapsable*, de naturaleza geométrica, en reemplazo de los conjuntos contráctiles como los bloques constitutivos de los espacios.

## 1.1. Categoría de Lusternik-Schnirelmann

El propósito de esta sección es dar una breve introducción a la teoría de Lusternik-Schnirelmann. Subrayamos desde el principio que consideraremos a la categoría de Lusternik-Schnirelmann como uno de los invariantes numéricos que miden la complejidad de la topología de un espacio a través de minimizar el cardinal de ciertos cubrimientos del espacio. Desde este punto de vista, la estimación de la categoría L-S en términos de otros invariantes, tanto clásicos como nuevos, es especialmente relevante. Esto nos lleva a privilegiar en la exposición aspectos como la invarianza homotópica de la categoría L-S, así como la relación del invariante con el anillo de cohomología y la dimensión de un espacio. El lector puede encontrar una exposición más cabal de la teoría que rodea a la categoría L-S en el libro [29].

Como ya mencionamos más arriba, la categoría de Lusternik-Schnirelmann (L-S) de un espacio topológico  $X$ , denotada  $\text{cat}(X)$ , es la mínima cantidad de conjuntos abiertos que cubren  $X$ , donde cada abierto es contráctil en el espacio. Aquí, un conjunto  $U \subseteq X$  se dice contráctil en  $X$  (o también, *categorico*) si la inclusión  $U \hookrightarrow X$  es null-homotópica. A primera vista, este último requerimiento puede parecer menos natural que exigir que los elementos del cubrimiento sean contráctiles (en sí mismos), pero es el punto clave que hace de la categoría L-S un invariante homotópico. Destacamos llegados a este punto que varios autores definen la categoría L-S de un espacio utilizando una normalización diferente, de manera que difiere en uno de la definición dada aquí (por ejemplo, esto sucede en el citado [29]). En particular, la categoría L-S de un espacio contráctil es igual a 1 según nuestra definición, mientras que es 0 para otros autores.

**Proposición 1.1.1.** *La categoría de Lusternik-Schnirelmann  $\text{cat}(X)$  de un espacio topológico  $X$  es un invariante homotópico.*

*Demostración.* Sean  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow X$  equivalencias homotópicas mutuamente inversas. Por simetría, es suficiente mostrar que  $\text{cat}(Y) \leq \text{cat}(X)$ . Sea  $U_1, \dots, U_n$  un cubrimiento de  $X$  por abiertos categoricos. Consideremos para cada índice  $j$ , el subconjunto abierto  $V_j \subseteq Y$  definido por  $V_j := g^{-1}(U_j)$ . Veamos que la inclusión  $i_{V_j} : V_j \rightarrow Y$  es null-homotópica. En efecto, dado que  $f \circ g$  es homotópica a la función identidad  $Y \rightarrow Y$ , la composición  $f \circ g \circ i_{V_j} : V_j \rightarrow Y$  resulta homotópica a la inclusión  $i_{V_j}$ . Por otro lado, una verificación sencilla muestra que  $f \circ g \circ i_{V_j} =$

$f \circ i_{U_j} \circ g|_{V_j}$ , donde  $g|_{V_j}$  denota la restricción de  $g$  a  $V_j$  y  $i_{U_j}$  es la inclusión  $U_j \hookrightarrow X$ . Como esta última inclusión es una función null-homotópica,  $f \circ i_{U_j} \circ g|_{V_j}$  es homotópica a una constante y por lo tanto, la inclusión  $i_{V_j}$  resulta también null-homotópica. Recopilando, hemos probado que el cubrimiento abierto de  $X$  por conjuntos categóricos  $\{U_1, \dots, U_n\}$  da origen, a través de tomar preimagen por  $g$ , a un cubrimiento abierto de  $Y$  por conjuntos categóricos. Como el cubrimiento era arbitrario, la conclusión se sigue.  $\square$

En vista de la invarianza homotópica de la categoría L-S, resulta natural intentar compararla con los invariantes homotópicos y homológicos clásicos de un espacio. Una de las estimaciones elementales de la categoría L-S más útiles proviene de la estructura de anillo del anillo de cohomología de un espacio.

**Definición 1.1.2.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A$  un anillo de coeficientes fijo. La *cup-length*  $\text{cup}_A(X)$  de  $X$  (con coeficientes en  $A$ ) es el mínimo número  $k$  tal que cualesquiera sean las  $k + 1$  clases de cohomología  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ , el producto  $\text{cup } \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{k+1}$  es trivial en el anillo de cohomología (reducido)  $H^*(X, A)$ .

Puesto en otras palabras, la cup-length de un espacio  $X$  con coeficientes en un anillo  $A$  es el índice de nilpotencia del anillo  $H^*(X, A)$ . Aunque en general puede ser infinito, para nuestro caso de interés que es la clase de CW-complejos compactos, el índice de nilpotencia siempre es finito y más aun, acotado superiormente por la dimensión del espacio. El resultado siguiente relaciona la cup-length de un espacio con su categoría L-S. Constituye una de las muchas conexiones de la categoría L-S con diferentes nociones de nilpotencia (ver por ejemplo [84]).

**Lema 1.1.3.** Sean  $X$  un espacio topológico y  $A$  a un anillo. Entonces,  $\text{cup}_R(X) < \text{cat}(X)$ .

*Demostración.* Supongamos que el valor de la categoría L-S de  $X$  es un natural finito  $n$  (en otro caso, no hay nada que probar) y tomemos un cubrimiento abierto por conjuntos categóricos  $\{U_1, \dots, U_n\}$ . Para cada  $i$ , como la inclusión  $U_i \hookrightarrow X$  es null-homotópica, el morfismo inducido en cohomología  $H^*(X, A) \rightarrow H^*(U_i, A)$  es trivial. De la exactitud de la sucesión

$$\dots \rightarrow H^k(X, U_i; A) \rightarrow H^k(X, A) \rightarrow H^k(U_i, A) \rightarrow \dots,$$

se desprende que las funciones  $H^k(X, U_i; A) \rightarrow H^k(X, A)$  son sobreyectivas. Por lo tanto, si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son clases de cohomología en  $H^*(X, A)$ , podemos ver a cada  $\alpha_i$  en el grupo  $H^*(X, U_i; A)$  tomando preimagen. Pero entonces, a través de las flechas canónicas  $H^*(X, \bigcup U_i; A) \rightarrow H^*(X, U_i; A)$  resulta que el producto  $\text{cup } \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n \in H^*(X, A)$  es la imagen de un producto cup correspondiente en  $H^*(X, \bigcup U_i; A)$ . Como  $\bigcup U_i = X$ , este anillo es trivial y luego,  $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n = 0$ , como queríamos probar.  $\square$

La cota superior más clásica está dada por la *dimensión de Lebesgue* de un espacio. La dimensión de Lebesgue de un espacio (Hausdorff, paracompacto) se define, de manera similar a la categoría L-S, en términos de optimizar una cierta cantidad relacionada a cubrimientos abiertos del espacio. Dado que la dimensión de Lebesgue de un CW-complejo coincide con la noción usual de dimensión, optamos por probar el resultado solo para este caso. De hecho, para CW-complejos hay una cota más fuerte que en el caso general que relaciona la categoría L-S y la dimensión. Aprovechamos la oportunidad para introducir la noción de *categoría geométrica* de un espacio, que fue definida por Fox en [36] para aproximar la categoría L-S. La categoría

geométrica  $\text{gcat}(X)$  de un espacio topológico  $X$  es simplemente el mínimo número de conjuntos abiertos y contráctiles que cubren a  $X$ . La condición de trabajar con conjuntos contráctiles en lugar de contráctiles en el espacio como en la definición de la categoría L-S es más natural pero trae aparejado el costo de que la categoría geométrica no es un invariante homotópico, como muestra el siguiente ejemplo debido a Fox [36, §39] (ver también [29, Proposition 3.11]).

**Lema 1.1.4.** *La categoría geométrica no es un invariante homotópico.*

*Demostración.* Consideremos el espacio topológico  $X$  que proviene de agregar dos aristas a la esfera  $S^2$  que unen al punto  $p_1$  con dos puntos diferentes  $p_2$  y  $p_3$ . Identificando en un punto dos caminos simples que conectan  $p_1$  a  $p_2$  y  $p_3$ , vemos que  $X$  es homotópicamente equivalente a una unión en un punto (wedge)  $S^2 \vee S^1 \vee S^1$  (puesto que la unión de los dos caminos es contráctil). Por otro lado, el espacio cociente  $Y$  de  $X$  proveniente de identificar en un punto las dos aristas extra es homeomorfo a la esfera  $S^2$  con los tres puntos  $p_1$ ,  $p_2$  y  $p_3$  identificados. Luego,  $Y$  es homotópicamente equivalente al espacio wedge  $S^2 \vee S^1 \vee S^1$ .

Veamos que la categoría geométrica de estos dos espacios difiere. por un lado, no es difícil chequear que  $\text{gcat}(S^2 \vee S^1 \vee S^1) = 2$ . En efecto, este espacio admite un cubrimiento por dos conjuntos abiertos y contráctiles, cada uno formado eligiendo un hemisferio (ligeramente inflado) de cada esfera. Por el otro, no es posible cubrir  $Y$  por dos conjuntos abiertos y contráctiles. Supongamos por contradicción que  $Y = U_1 \cup U_2$  para ciertos conjuntos abiertos y contráctiles  $U_1$  y  $U_2$ . Notemos que las componentes conexas de la preimagen de  $U_1$  y  $U_2$  por la aplicación cociente  $q : S^2 \rightarrow Y$  son contráctiles. Además, si ponemos  $V_i := q^{-1}(U_i)$  para  $i = 1, 2$ , por la dualidad de Alexander la observación anterior implica que  $S^2 \setminus V_i$  es conexo. Dividimos la prueba en dos casos, según el punto  $x = q(p_1)$  está en la intersección de  $U_1$  y  $U_2$  o no. En el segundo caso, sin pérdida de generalidad es  $x \in U_1 \setminus U_2$ . Como el complemento  $S^2 \setminus V_2$  es conexo, este conjunto está completamente contenido en una de las componentes conexas de  $V_1$ . Entonces, las otras componentes conexas de  $V_1$  están contenidas en  $V_2$ . Como no puede suceder que dos de los puntos  $p_j$  pertenezcan a la misma componente conexa de  $V_1$  (si no fuera el caso,  $U_1$  no sería acíclico), esto implica que al menos uno de los  $p_j$  está en  $U_2$ , lo que constituye una contradicción. En el otro caso, si suponemos que  $x$  está en la intersección de los conjuntos  $U_1$  y  $U_2$ , cada  $V_i$  debería tener tres componentes conexas distintas  $V_i^j$  que contienen cada uno de los puntos  $p_j$ . Como  $S^2 \setminus V_1$  es conexo, está contenido en una de las componentes conexas de  $V_2$ , digamos  $V_2^1$ . Luego, las componentes  $V_2^2, V_2^3$  están contenidas en las componentes correspondientes  $V_1^2$  y  $V_1^3$  de  $V_1$ . Aplicando el mismo argumento para el complemento  $S^2 \setminus V_2$ , vemos que al menos una de las componentes  $V_1^2, V_1^3$  está contenida en la componente correspondiente  $V_2^2, V_2^3$ . Pero en ese caso, una de las componentes conexas de  $V_1$  coincide con una de las componentes de  $V_2$ , lo que implica que  $V_1 \cup V_2$  es una unión de conjuntos abiertos disjuntos dos a dos. Esto es una contradicción, pues  $V_1$  y  $V_2$  cubren a  $S^2$ .  $\square$

Aunque no es un invariante homotópico, es claro que la categoría geométrica constituye una cota superior para la categoría L-S y es a menudo más sencillo de estimar que la categoría L-S. Es a través de este invariante que deducimos, para CW-complejos compactos como una desigualdad que relaciona la categoría L-S con la dimensión.

**Lema 1.1.5.** *Sea  $X$  un CW-complejo compacto y conexo. Entonces  $\text{gcat}(X) \leq \dim(X) + 1$ . En particular,  $\text{cat}(X) \leq \dim(X) + 1$ .*

*Demostración.* Sea  $U_i$  la unión del interior de todas las  $i$ -celdas de  $X$ . Como  $X$  es conexo, luego arco-conexo, y cada componente conexa de  $U_i$  es contráctil, estos conjuntos pueden ser extendidos a conjuntos contráctiles abiertos conectando las componentes convenientemente por caminos levemente inflados. Es necesaria una aclaración sobre el caso 1-dimensional. En este caso, el conjunto contráctil que puede ser formado a partir de las 0-celdas es un árbol generador del complejo  $X$ , mientras que el otro conjunto contráctil consiste de un árbol generador de  $X$  unido al interior de todas las 1-celdas que no pertenecen al árbol generador.  $\square$

Usando estas estimaciones elementales, es posible calcular la categoría L-S de algunos espacios relevantes (cf. [29, Example 1.8]). Por ejemplo, podemos verificar que la categoría L-S tanto del toro  $n$ -dimensional  $\mathbb{T}^n$  como del espacio proyectivo  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}P^n$  es exactamente  $n+1$ . En efecto, las desigualdades  $\text{cat}(\mathbb{T}^n) \leq n+1$  y  $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) \leq n+1$  siguen del Lema 1.1. Para mostrar la cota inferior, calculamos la cup-length de los dos espacios y aplicamos el Lema 1.1.3. El anillo de cohomología del toro  $\mathbb{T}^n$  con coeficientes en  $\mathbb{Q}$  es isomorfo un álgebra exterior en  $n$  generadores y luego  $\text{cup}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}^n) = n$ . En cuanto al espacio proyectivo  $\mathbb{R}P^n$ , el anillo de cohomología con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}[\omega]/\langle \omega^{n+1} \rangle$ , donde  $\omega$  tiene grado 1, y por lo tanto la cup-length de  $\mathbb{R}P^n$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  es igual a  $n$ . Por Lema 1.1.3,  $\text{cat}(\mathbb{T}^n) \geq n+1$ ,  $\text{cat}(\mathbb{R}P^n) \geq n+1$  lo que completa el cálculo.

Concluimos esta sección introductoria presentando la motivación original de la teoría de Lusternik-Schnirelmann. Lusternik y Schnirelmann estaban interesados en encontrar puntos críticos de funcionales definidos sobre variedades (en general de dimensión infinita) en el contexto de problemas variacionales. Más precisamente, les interesaban los puntos críticos del funcional energía sobre el espacio de lazos libres de una variedad riemanniana cerrada. Recordemos que el espacio de lazos libres  $\mathcal{LM}$  de una variedad riemanniana  $M$  por los lazos suaves  $S^1 \rightarrow M$  el funcional energía  $E : \mathcal{LM} \rightarrow \mathbb{R}$  envía un lazo  $\gamma$  a su energía  $\frac{1}{2} \int_{S^1} \|\dot{\gamma}(t)\|^2$ . El análisis de los puntos críticos de  $E$  está motivado por el hecho de que estos contienen, como es claro, a las geodésicas cerradas de  $M$ . En esta dirección, el teorema de Lusternik-Schnirelmann asegura que el número de puntos críticos de una función suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  definida sobre una variedad suave (no necesariamente de dimensión finita) que satisface una cierta condición de compacidad está acotado inferiormente por  $\text{cat}(M)$  (ver en [29, Chapter 1] el enunciado preciso del resultado y su demostración). Es probable que este resultado traiga al lector el recuerdo de la Teoría de Morse clásica, la cual establece una estrecha conexión entre la topología de una variedad  $M$  y los puntos críticos de una aplicación suave a valores reales  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , siempre y cuando  $f$  sea de Morse, es decir, que dichos puntos críticos sean no degenerados. El punto relevante es que mientras la teoría de Morse tiene implicaciones más fuertes que la teoría de Lusternik-Schnirelmann cuando ambas aplican, esta última permite cierto control en el caso degenerado. En el ejemplo bajo consideración la teoría tradicional de Morse no aplica, dado que entre otras cosas los lazos constantes son puntos críticos degenerados del funcional de energía  $E$ . (Destacamos sin embargo que, para métricas riemannianas genéricas en  $M$ , la extensión de la teoría de Morse debida a Bott [19] permite obtener las conclusiones clásicas para este funcional).

Lusternik y Schnirelmann emplearon su cota sobre el número de puntos críticos en la demostración del teorema de las tres geodésicas cerradas, posiblemente la aplicación más celebrada de la teoría de Lusternik-Schnirelmann.

**Teorema 1.1.6.** *Sea  $(S, g)$  una superficie riemanniana cerrada de género 0 (esto es,  $S$  es topológicamente una esfera). Entonces, existen al menos tres geodésicas cerradas embebidas en  $S$ .*

Para la demostración, ver por ejemplo [6, 39], donde se corrige un error en la prueba original de Lusternik y Schnirelmann.

## 1.2. Versiones discretas de invariantes de tipo L-S

En los últimos años varios trabajos estuvieron dirigidos a introducir lo que laxamente llamamos versiones discretas de la categoría L-S (e invariantes relacionados). Dichas versiones aplican usualmente a espacios topológicos con una estructura combinatoria rígida, tales como complejos simpliciales o espacios topológicos finitos. Además, los bloques simples están definidos en términos de una teoría de homotopía que explota esta estructura rígida, como por ejemplo la teoría de homotopía simple de Whitehead. En esta sección nos concentramos en dos de estas nociones, que en parte motivaron la introducción por nuestra parte de otro invariante discreto natural del tipo categoría L-S.

Comenzamos con la descripción de la *categoría discreta (geométrica)* de [1], que está inspirada en la categoría geométrica pero que en lugar de cubrimientos por conjuntos contráctiles emplea conjuntos *colapsables* como bloques constitutivos. Antes de dar la definición formal, necesitamos recordar los conceptos básicos de la teoría de la homotopía simple de Whitehead. Un simplex  $\sigma$  de  $K$  es una *cara libre* de un complejo simplicial finito  $K$  si hay un único simplex  $\tau \in K$  que contiene a  $\sigma$ . En ese caso, decimos que hay un *colapso elemental* de  $K$  a  $L = K \setminus \{\sigma, \tau\}$ , denotado por  $K \text{ ce} L$ . Observamos que la inclusión  $L \hookrightarrow K$  es un retracts por deformación fuerte y, por lo tanto,  $K$  y  $L$  son homotópicamente equivalentes. Más generalmente,  $K$  *colapsa* a  $L$ , denotado por  $K \searrow L$ , si hay una sucesión  $K_1 = K, K_2, \dots, K_r = L$  tal que  $K_i \text{ ce} K_{i+1}$  por cada  $i$ ; en particular,  $K$  y  $L$  son homotópicamente equivalentes en tal situación. Decimos también que  $L$  se expande a  $K$  y denotamos  $L \nearrow K$ . El complejo  $K$  se dice *colapsable* si colapsa a un complejo con un solo vértice. Dado que los colapsos son, en particular, equivalencias homotópicas, los complejos colapsables pueden considerarse como versiones de los conjuntos contráctiles en este contexto.

Damos ahora la definición de categoría geométrica discreta, advirtiendo al lector que empleamos una normalización diferente a aquella de la definición original, de modo que ambas difieren en 1.

**Definición 1.2.1.** (cf. [1, Definition 8]) Sean  $K$  un complejo simplicial y  $L \leq K$  un subcomplejo. La *pre-categoría geométrica discreta* de  $L$  en  $K$  es el mínimo número (el mínimo menos 1 en la definición original) de subcomplejos colapsables de  $K$  que cubren  $L$ . La *categoría geométrica discreta*  $\text{dgc}at(K)$  de  $K$  es el mínimo tomado sobre las pre-categorías geométricas discretas de aquellos subcomplejos  $L$  a los que  $K$  colapsa.

El uso de subcomplejos en la definición en lugar de subconjuntos abiertos está justificado por la conocida (suerte de) correspondencia entre ellos para un complejo simplicial. Concretamente, todo subcomplejo  $L$  de un complejo simplicial  $K$  puede extenderse a un abierto levemente más grande que se retrae por deformación a  $L$ . En la otra dirección, un subconjunto abierto de  $K$  se retrae por deformación a un subcomplejo de una subdivisión apropiada de  $K$ . Así, ignorando por un momento la pre-categoría intermedia, la categoría geométrica discreta puede ser vista como una versión de la categoría geométrica usual en el contexto de complejos simpliciales y teoría de homotopía simple. Como los autores observan en [1, Remark 9], la definición garantiza que

un colapso elemental no disminuye la categoría geométrica de un complejo sin la necesidad de subdividir. En cierto sentido, exploramos en la próxima sección las propiedades del invariante que resulta al tomar el camino opuesto, es decir, permitiendo subdivisiones.

A pesar de esto, la categoría geométrica discreta no es un invariante del tipo homotópico simple, de la misma manera que la categoría geométrica no es un invariante homotópico. Recordemos que un par de complejos simpliciales  $K$  y  $L$  tienen el mismo *tipo homotópico simple* si existe una sucesión de complejos  $K_1 = K, K_2, \dots, K_r = L$  tal que para cada  $i$  o bien  $K_i \xrightarrow{e} K_{i+1}$  o  $K_i \xrightarrow{c} K_{i+1}$ . Para mostrar que  $\text{dgc}at$  no es un invariante del tipo homotópico simple, demostramos que, en dimensión 2, este invariante generaliza la noción de complejo colapsable. Antes de eso, enunciamos un lema simple.

**Lema 1.2.2.** *Sea  $K$  un complejo simplicial colapsable de dimensión 2 y sea  $L$  un subcomplejo de  $K$ . Si  $\dim L = 2$ ,  $L$  colapsa a un grafo, i.e. un complejo de dimensión 1.*

*Demostración.* Fijemos un orden  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$  de los 2-símplices de  $K$  que induce una sucesión válida de colapsos. Resulta claro que entonces, el primer 2-símplice de  $L$  que aparece en esa lista debe tener una cara libre en  $L$  y luego,  $L$  colapsa a un subcomplejo con un 2-símplice menos. Por inducción en el número de 2-símplices de  $L$ , se concluye que  $L$  colapsa a un grafo.  $\square$

**Proposición 1.2.3.** *Sea  $K$  un complejo simplicial conexo y finito de dimensión 2. Entonces,  $\text{dgc}at(K) = 0$  si y solo si  $K$  es colapsable.*

*Demostración.* Una dirección es obvia. Para la otra, supongamos que  $\text{dgc}at(K) = 0$ , de manera que existe un subcomplejo  $L$  al cual  $K$  colapsa y además está contenido en un subcomplejo colapsable  $M \leq K$ . Por Lema 1.2.2,  $L$  colapsa a un complejo de dimensión 1. Por lo tanto,  $K$  colapsa a un subcomplejo de dimensión 1, así que alcanza con verificar que  $K$  es acíclico para concluir que es colapsable. Como la inclusión  $L \hookrightarrow K$  es una equivalencia homotópica, induce un isomorfismo  $H_*(L) \rightarrow H_*(K)$  (con coeficientes enteros). Por otra parte, el isomorfismo factoriza por  $H_*(M)$  que es trivial porque  $M$  es colapsable, lo que concluye la demostración.  $\square$

Como consecuencia, vemos que  $\text{dgc}at$  no es un invariante del tipo homotópico simple considerando una triangulación fija del *dunce hat*  $D$ . Como es bien sabido, el *dunce hat* no es colapsable (luego  $\text{dgc}at(D) > 0$ ) pero tiene el tipo homotópico simple de un punto.

Otra característica saliente de la categoría geométrica discreta es que depende fuertemente de la estructura simplicial y no solo de la topología del espacio. Para ilustrar este punto, consideremos el grafo completo  $K_n$  en  $n$  vértices, que tiene  $\binom{n}{2}$  aristas. Dado que los árboles (es decir, grafos conexos acíclicos) son los únicos grafos colapsables y un subárbol de  $K_n$  tiene a lo sumo  $n - 1$  aristas, se requieren por lo menos  $\frac{1}{n-1} \binom{n}{2} \geq \frac{n}{2}$  subcomplejos colapsables para cubrir  $K_n$ , de donde se deduce que  $\text{dgc}at(K_n) \geq \frac{n}{2}$ . Por otra parte, no es difícil chequear que una subdivisión de  $K_n$  puede escribirse como la unión de dos subcomplejos colapsables (ver Proposición 1.3.5 más abajo).

Sin embargo, hay un punto que la categoría geométrica discreta comparte con la categoría L-S continua, y es que provee una cota inferior para el número de puntos críticos de ciertas funciones, llamadas *funciones de Morse discretas*, definidas sobre complejos simpliciales. Es este resultado el que motivó la introducción de la categoría geométrica discreta como un análogo de la categoría L-S para complejos simpliciales.

**Teorema 1.2.4.** ([1, Theorem 26]) Sea  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  una función de Morse discreta con  $m$  puntos críticos. Entonces,  $\text{dgc}at(K) \leq m$ .

La teoría de Morse discreta fue introducida por Forman en [35]. Nos conformamos con referir al lector a ese trabajo para las definiciones básicas de la teoría de Morse discreta y a [1] para la prueba del último teorema.

Por su lado, con la introducción de la *categoría simplicial L-S* en [34], los autores buscaron desarrollar la teoría de Lusternik-Schnirelmann para complejos simpliciales usando la noción de *contigüidad* como una versión discreta de homotopía. Recordamos a continuación la definición de clases de contigüidad de aplicaciones simpliciales, a la par de la descripción de esta teoría de homotopía en términos de ciertos movimientos combinatorios simples por Barmak y Minian [9]. Sean  $\phi, \psi : K \rightarrow L$  dos aplicaciones simpliciales. Decimos que  $\phi$  y  $\psi$  son *contiguas*, y denotamos  $\phi \sim_c \psi$ , si para cada simplex  $\sigma \in K$ ,  $\phi(\sigma) \cup \psi(\sigma)$  es un simplex en  $L$ . Notemos que dos aplicaciones contiguas son homotópicas a través de la homotopía lineal (en cada simplex). Dos aplicaciones simpliciales están en la misma *clase de contigüidad*, y notamos  $\phi \sim \psi$ , siempre que exista una sucesión finita de aplicaciones simpliciales contiguas  $\phi = \phi_0 \sim_c \dots \sim_c \phi_n = \psi$  que las una. Por analogía con la noción de equivalencia homotópica, una aplicación simplicial  $\phi : K \rightarrow L$  es llamada una *equivalencia fuerte* si existe otra aplicación simplicial  $\psi : L \rightarrow K$  con  $\phi \circ \psi \sim \text{id}_L$  y  $\psi \circ \phi \sim \text{id}_K$ . En este último caso, notamos  $K \sim L$ . Esta relación de equivalencia entre complejos simpliciales fue reescrita en términos de *tipos homotópicos fuertes* en [9].

**Definición 1.2.5.** [9] Sea  $K$  un complejo simplicial y  $v \in K$  un vértice. Decimos que  $v$  está dominado por un vértice  $v' \neq v$  si todo simplex maximal que contiene a  $v$ , también contiene a  $v'$ . Si  $v$  está dominado por un vértice  $v'$ , decimos que hay un *colapso fuerte elemental* de  $K$  a  $K \setminus v$  y denotamos  $K \searrow_{\text{f}} K \setminus v$ . En tal situación también decimos que hay una *expansión fuerte elemental* de  $L = K \setminus v$  a  $K$  y lo denotamos por  $L \nearrow_{\text{f}} K$ . Si hay una sucesión de colapsos fuertes elementales que comienza en  $K$  y termina en  $L$ , decimos que hay un *colapso fuerte* de  $K$  a  $L$  y notamos  $K \searrow_{\text{f}} L$ . La operación inversa a un colapso fuerte es llamada *expansión fuerte* y denotada  $L \nearrow_{\text{f}} K$ . Finalmente,  $K$  y  $L$  tienen el mismo *tipo homotópico fuerte* si hay una sucesión de colapsos y expansiones fuertes que transforma  $K$  en  $L$ .

**Observación 1.2.6.** [9, Remark 2.4]  $K \searrow_{\text{f}} L$  implica que  $K \searrow L$ .

Como muestran Barmak y Minian, los colapsos y expansiones fuertes determinan completamente la teoría de homotopía discreta basada en contigüidad.

**Teorema 1.2.7.** [9, Corollary 2.12] Los complejos simpliciales  $K$  y  $L$  tienen el mismo tipo homotópico fuerte si y solo si  $K \sim L$ .

La noción de *categoría simplicial L-S* se obtiene casi palabra por palabra de la definición de categoría L-S, reemplazando “null-homotópica” por “contigua a una aplicación constante”. Concretamente, la *categoría simplicial L-S*  $\text{scat}(K)$  de un complejo simplicial  $K$  es el mínimo número de subcomplejos que cubren  $K$  de manera que la inclusión de cada uno en  $K$  es contigua a una aplicación constante (abusando ligeramente de la notación, llamaremos también *categoricos* a tales subcomplejos). Este invariante depende aun más fuertemente que  $\text{dgc}at$  de la estructura simplicial subyacente. Por ejemplo, en [34, Example 3.3], los autores exhiben una cierta subdivisión  $K$  del 2-simplex que no es fuertemente colapsable, es decir, que no admite un colapso



fuerte a un punto y muestran que  $\text{scat}(K) = 1$  (este complejo apareció originalmente en [9]). Aunque este ejemplo muestra que  $\text{scat}$  está lejos de ser un invariante homotópico, sí resulta ser un invariante homotópico fuerte, rasgo que lo acerca a la categoría L-S clásica en este aspecto.

**Proposición 1.2.8.** ([34, Proposition 3.7] *La categoría simplicial L-S es un invariante homotópico fuerte.*

*Demostración.* Sean  $f : K \rightarrow L$ ,  $g : L \rightarrow K$  equivalencias fuertes mutuamente inversas. La demostración es completamente análoga a la de la Proposición 1.1.1. Tomemos un cubrimiento  $M_1, \dots, M_n$  de  $K$  por subcomplejos categóricos. Verificamos que el subcomplejo  $N_j := g^{-1}(M_j) \leq L$  es categórico en  $L$  para cada  $j$ . En efecto, alcanza con observar que la aplicación simplicial  $f \circ g \circ i_{N_j}$  es contigua a  $i_{N_j}$  por un lado y coincide con  $f \circ i_{M_j} \circ g|_{N_j}$  por el otro, que es contigua a una aplicación constante pues  $i_{M_j}$  lo es por hipótesis.  $\square$

### 1.3. Cubrimientos de poliedros por subpoliedros PL colapsables

En esta sección definimos y exploramos una variante natural de la categoría geométrica en el contexto de poliedros compactos y conexos, la cual llamamos *categoría geométrica PL* (aquí *PL* significa *lineal a trozos*, la sigla proviene de la expresión en inglés *piecewise linear*). Aunque formalmente este nuevo invariante es una versión discreta de la categoría geométrica e incluso recuperamos algunos de los resultados conocidos para el contexto clásico, nuestra motivación es más inocente: ¿cuáles son las consecuencias topológicas, tanto locales como globales, que pueden obtenerse para un poliedro que admite cubrimientos pequeños por subpoliedros colapsables?

Precisemos en primer lugar qué es lo que entendemos por los términos *poliedro* y *(PL) colapsable*. Un *poliedro* es un espacio topológico que admite triangulaciones, esto es, el espacio subyacente a algún complejo simplicial. En términos más simples, uno puede considerar a un poliedro como un complejo simplicial pero en el que no hay una estructura simplicial distinguida. Así, un subespacio  $Q$  de un poliedro  $P$  es llamado un *subpoliedro* si es el espacio subyacente a un subcomplejo para alguna triangulación de  $P$ . Los conceptos básicos de la teoría de homotopía simple por poliedros se definen de forma análoga. Decimos que un poliedro  $P$  *colapsa PL* a un subpoliedro  $Q$  (y seguimos notando  $P \searrow Q$ ) si existen triangulaciones coherentes  $K$  y  $L$  de  $P$  y  $Q$  respectivamente, tales que  $K \searrow L$  (ver [55, Ch.2]). Un poliedro  $P$  se dice *colapsable PL* si colapsa PL a un punto, es decir, algún complejo simplicial que triangula a  $P$  colapsa a un vértice.

**Definición 1.3.1.** Sea  $P$  un poliedro. La *categoría geométrica PL*  $\text{plgcat}(P)$  de  $P$  es el mínimo número de subpoliedros colapsables PL que cubren a  $P$ .

Como los subpoliedros y los abiertos en un poliedro son, homotópicamente hablando, equivalentes, la categoría geométrica de un poliedro coincide con el mínimo número de subpoliedros contráctiles que lo cubren. Esta formulación pone de manifiesto que la categoría geométrica PL puede ser considerada como una versión de la categoría geométrica clásica.

Un rasgo compartido por la mayoría de los invariantes de tipo categoría L-S (en el contexto continuo) es que están acotados por la dimensión del espacio. La categoría geométrica no es una excepción: como mostramos más arriba, la categoría geométrica de un poliedro compacto y conexo  $P$  de dimensión  $n$  es a lo sumo  $n + 1$  (ver Lema 1.1). Nuestro primer resultado sobre la categoría geométrica PL muestra que también verifica esta propiedad estructural deseable, a

saber, que un poliedro de dimensión  $n$  admite un cubrimiento por a lo sumo  $n + 1$  subpoliedros colapsables. Para probarlo, seguimos esencialmente la misma estrategia que en la demostración de la versión del resultado para la categoría geométrica: primero, cubrimos inductivamente el  $(n - 1)$ -esqueleto de una triangulación adecuada del poliedro por  $n$  subpoliedros colapsables PL, inflamamos ligeramente este cubrimiento y finalmente formamos el último subpoliedro colapsable a partir de las triangulaciones de los interiores de cada  $n$ -símplex. Sin embargo, puesto que la condición de ser colapsable PL es más rígida que la de ser contráctil, nos vemos forzados a tomar un camino un tanto más técnico para adaptar esta estrategia a nuestro contexto. Más específicamente, llevamos a cabo parte del argumento recurriendo a los tipos homotópicos fuertes de [9], que fueron introducidos brevemente en Definición 1.2.5.

En primer lugar, nos encargamos de la parte del argumento que involucra extender un cubrimiento por subpoliedros colapsables a un poliedro levemente más grande. Antes de empezar, necesitamos recordar las nociones de *star* y *link* de un vértice  $v$  en un complejo simplicial, los análogos simpliciales de bola y esfera alrededor del vértice, respectivamente. El *star* de un vértice  $v$  en un complejo simplicial  $K$  es el subcomplejo  $\text{st}_K(v) \subseteq K$  formado por la unión de los símplexes  $\sigma \in K$  tales que  $\sigma \cup v \in K$ . El *link* de  $v$  es el subcomplejo  $\text{lk}_K(v) \subseteq \text{st}_K(v)$  formado por aquellos símplexes que no contienen a  $v$ . Para un símplex  $\sigma$  dado, su *borde*  $\partial\sigma$  es el subcomplejo formado por los símplexes  $\tau$  estrictamente contenidos en  $\sigma$ . Agregamos llegados a este punto una descripción alternativa del concepto de dominación de vértices en términos de estos conceptos.

**Observación 1.3.2.** Un vértice  $v$  en un complejo simplicial  $K$  es dominado por  $v'$  si y solo si el *link* (ver abajo)  $\text{lk}_K(v)$  es un cono simplicial con vértices  $v'$ , es decir,  $\text{lk}_K(v) = v'M$  para cierto subcomplejo  $M$ .

Los próximos dos lemas permiten extender el cubrimiento localmente, esto es, símplex por símplex. En el primero, probamos el hecho intuitivamente claro de que al remover la parte central de una subdivisión suficientemente fina de un símplex, el subcomplejo resultante colapsa al borde.

**Lema 1.3.3.** *Sea  $\sigma_n$  el  $n$ -símplex standard. Consideremos el subcomplejo de la segunda subdivisión baricéntrica de  $\sigma_n$  definido como  $K_n := \sigma_n'' \setminus \text{st}_{\sigma_n''}(\{v\})$ , donde  $v$  es el baricentro de  $\sigma_n$ . Entonces  $K_n$  colapsa fuerte a  $(\partial\sigma_n)''$ .*

*Demostración.* Por cuestiones formales, resultará conveniente adoptar la definición conjuntística de complejo simplicial durante la demostración. Así, consideramos a los símplexes de la segunda subdivisión de  $\sigma_n$  como cadenas de símplexes de  $\sigma_n'$  ordenadas por inclusión. Esto significa que un vértice de  $\sigma_n''$  está dado por una 0-cadena  $\{\tau\}$  donde  $\tau$  es un símplex de  $\sigma_n'$ , una arista de  $\sigma_n''$  es una 1-cadena  $\{\tau \subseteq \eta\}$  para ciertos símplexes  $\tau, \eta$  de  $\sigma_n'$  y así continuando.

Sea  $w \in \text{lk}_{\sigma_n''}(\{v\})$  un vértice. De la definición de *link* se deduce que existe un 1-símplex en  $\sigma_n''$  con vértices  $\{v\}$  y  $w$ , de modo que existe una cadena de inclusión de símplexes de  $\sigma_n'$   $\{\{v\} \subseteq w\}$ . Supongamos que  $w = \{e\}$ , donde  $e = \{v, a\}$  es un 1-símplex de  $\sigma_n'$ . Entonces, todo símplex maximal de  $\sigma_n''$  que contiene a  $w$  o bien contiene a  $\{v\}$  o a  $\{a\}$ . Como  $\{v\} \notin K_n$ , esto muestra que  $w$  está dominado por  $\{a\}$  en  $K_n$ .

Consideremos ahora al complejo  $\tilde{K}_n$  obtenido a partir de  $K_n$  removiendo todos los vértices de la forma  $\{e\}$  para los 1-símplexes  $e$  de  $\sigma_n'$  que contienen a  $v$ . Tomemos un vértice  $u \in \text{lk}_{\sigma_n''}(\{v\}) \cap \tilde{K}_n$ . Supongamos que  $u = \{\tau\}$  para cierto 2-símplex  $\tau = \{v, a, b\}$  de  $\sigma_n'$ . Como  $\tilde{K}_n$  no contiene vértices de la forma  $\{\{v, x\}\}$ , y tampoco al vértice  $\{v\}$ , todo símplex maximal de  $\tilde{K}_n$  que contiene

a  $u$  también contiene a  $\{a, b\}$ . Luego,  $u$  está dominado por  $\{a, b\}$  en  $\tilde{K}_n$ . Eliminado los vértices de  $\text{lk}_{\sigma_n''}(\{v\})$  en orden no decreciente de la dimensión del simplex de  $\sigma_n'$  que representan, vemos que  $K_n \searrow (\partial\sigma_n)''$ .  $\square$

**Lema 1.3.4.** *Sean  $K, L$  complejos simpliciales tales que  $L \nearrow K$ . Si  $L$  se cubre por  $n$  subcomplejos fuertemente colapsables, también lo hace  $K$ .*

*Demostración.* Sea  $\{L_1, \dots, L_n\}$  un cubrimiento de  $L$  por  $n$  subcomplejos fuertemente colapsables y asumamos que existe una expansión elemental fuerte de  $L$  a  $K$ , digamos  $L = K \setminus v$  para cierto  $v \in K$ . Sea  $v' \in K$  un vértice que domina a  $v$ , de modo que  $\text{lk}_K(v) = v'M$  para algún subcomplejo  $M$  de  $L$ . Para cada  $1 \leq i \leq n$ , definamos el subcomplejo  $K_i$  de  $K$  como

$$K_i = \begin{cases} L_i \cup v(v'M \cap L_i) & \text{si } v'M \cap L_i \neq \emptyset, \\ L_i & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si  $v'M \cap L_i$  es no vacío, entonces  $v \in K_i$  y está claramente dominado por  $v'$  puesto que  $\text{lk}_{K_i}(v) = v'(M \cap L_i)$ . En cualquier caso,  $K_i$  colapsa fuerte a  $L_i$  y es por lo tanto, fuertemente colapsable. Esto muestra que  $K$  se cubre por  $n$  subcomplejos fuertemente colapsables. La conclusión se deduce por inducción en el número de expansiones elementales fuertes de  $L$  a  $K$ .  $\square$

Podemos probar ahora que la categoría geométrica PL de un poliedro de dimensión  $n$  está acotada superiormente por  $n + 1$ . Demostraremos el resultado siguiente, que es ligeramente más fuerte.

**Proposición 1.3.5.** *Sea  $K$  un complejo de dimensión  $n$ . Entonces, la segunda subdivisión baricéntrica  $K''$  de  $K$  puede cubrirse con a lo sumo  $n + 1$  subcomplejos fuertemente colapsables.*

*Demostración.* Procedemos por inducción en  $n$ , la dimensión de  $K$ . Si  $n = 1$ ,  $K$  es un grafo simplicial. Mostramos primero que en este caso  $K'$  admite un cubrimiento por dos subcomplejos fuertemente colapsables. Para producir el cubrimiento fuertemente colapsable, sea  $T$  un árbol generador del grafo  $K$  y notemos que cada arista  $e \in K \setminus T$  da lugar a la unión de dos aristas en  $K'$ , digamos  $e = e_1 \cup e_2$ . Consideremos los siguientes subcomplejos de  $K'$ :

$$K_1 = T' \cup \bigcup_{e \in K \setminus T} e_1, \quad K_2 = T' \cup \bigcup_{e \in K \setminus T} e_2.$$

Como  $K_1, K_2$  colapsan fuerte a  $T'$ , ambos son fuertemente colapsables y claramente cubren  $K'$ . Dado que sus subdivisiones baricéntricas son también fuertemente colapsables, el caso base queda completo.

Sea ahora  $K$  un complejo simplicial de dimensión  $n \geq 1$ . Por la hipótesis inductiva, la segunda subdivisión baricéntrica del  $(n-1)$ -esqueleto  $(K^{(n-1)})''$  de  $K$  puede cubrirse con  $n$  subcomplejos fuertemente colapsables  $K_1, \dots, K_n$ . Sean  $v_1, \dots, v_r$  los baricentros de los símlices de dimensión  $n$  de  $K$ . Por el Lema 1.3.3, vemos que  $(K^{(n-1)})'' \nearrow K'' \setminus \bigcup_{i=1}^r \text{st}_{K''}(\{v_i\})$  y luego el Lema 1.3.4 implica que este último complejo admite un cubrimiento por  $n$  subcomplejos fuertemente colapsables. Puesto que  $K''$  es conexo y cada  $\text{st}_{K''}(\{v_i\})$  es fuertemente colapsable, podemos incluir su unión en un subcomplejo fuertemente colapsable de  $K''$ .  $\square$

En dimensión 1, esto implica que la categoría geométrica PL solo distingue los árboles (grafos acíclicos) del resto de los grafos, lo mismo que la categoría geométrica. En cambio, la categoría geométrica PL de los poliedros de dimensión 2 tiene ciertas propiedades sutiles que exploramos en la próxima sección.

## 1.4. Categoría geométrica PL en dimensión 2

Sabemos por la Proposición 1.3.5 que la categoría geométrica  $P$  de un poliedro de dimensión 2 está acotado por 3. Como los poliedros colapsables PL son relativamente bien comprendidos, el interés en dimensión 2 se centra en distinguir los poliedros de categoría geométrica PL 2 de aquellos que tienen categoría geométrica PL igual a 3. Sin alcanzar una caracterización completa, en esta sección mostramos entre otras cosas que el tipo homotópico simple de un poliedro  $P$  con  $\text{plgcat}(P) = 2$  está severamente restringido y damos un criterio, que involucra condiciones tanto locales como globales, para decidir si un cierto poliedro admite o no cubrimientos por 2 subpoliedros colapsables PL.

fundamental libre

Analizamos en primer lugar el tipo homotópico simple de poliedros de  $\text{plgcat}$  2. Si consideramos la situación análoga para la categoría geométrica, encontramos que el tipo homotópico de los poliedros 2-dimensionales que son la unión de dos subpoliedros contráctiles está completamente determinado. En efecto, por el teorema de Seifert-van Kampen, el grupo fundamental de un tal poliedro es libre de rango el número de componentes conexas de la intersección de los conjuntos del cubrimiento contráctil menos 1. Entonces, por un resultado de C.T.C. Wall [82], un poliedro de dimensión 2 con grupo fundamental libre es homotópicamente equivalente a un wedge de esferas de dimensión 1 y 2. Así, resulta razonable esperar que haya una restricción incluso más fuerte para aquellos poliedros  $P$  con  $\text{plgcat}(P) = 2$ , lo cual efectivamente sucede. Recordemos que dados complejos simpliciales  $L$  y  $K$  decimos que  $K$  se  $n$ -deforma a  $L$ , o que existe una  $n$ -deformación de  $K$  a  $L$  si existe una sucesión finita de complejos  $K_1 = K, K_2, \dots, K_r = L$  tal que para cada  $i$  o bien  $K_i \xrightarrow{e} K_{i+1}$  o  $K_i \xrightarrow{e} K_{i+1}$  y la dimensión de cada  $K_i$  es a lo sumo  $n$ .

**Lema 1.4.1.** *Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión 2 cubierto por subcomplejos colapsables  $K_1, K_2$ . Entonces, hay una 3-deformación de  $K$  a la suspensión  $\Sigma(K_1 \cap K_2)$  de  $K_1 \cap K_2$ .*

*Demostración.* Armamos el cono en  $K_1$  y  $K_2$  con vértices  $v_1, v_2$ . Esto da origen a una expansión  $K \nearrow v_1 K_1 \cup v_2 K_2$ . Colapsamos cada nuevo simplex basado en un simplex contenido en  $K_1$  o  $K_2$  pero no en ambos. Por lo tanto,  $K \nearrow v_1 K_1 \cup v_2 K_2 \searrow v_1(K_1 \cap K_2) \cup v_2(K_1 \cap K_2)$ , que es la 3-deformación buscada.  $\square$

La combinación de este resultado con Lema 1.2.2, que provee un cierto control sobre la intersección de complejos colapsables en dimensión 2, arroja la siguiente restricción sobre el tipo homotópico simple de poliedros de  $\text{plgcat}$  2.

**Proposición 1.4.2.** *Sea  $P$  un poliedro de dimensión 2 con  $\text{plgcat}(P) = 2$ . Entonces  $P$  se 3-deforma a la suspensión de un grafo.*

*Demostración.* Tomemos una triangulación  $K$  de  $P$  que se cubre por subcomplejos colapsables  $K_1, K_2$ . Por Lema 1.4.1,  $K$  se 3-deforma a  $\Sigma(K_1 \cap K_2) = v_1(K_1 \cap K_2) \cup v_2(K_1 \cap K_2)$  y por Lema

1.2.2  $K_1 \cap K_2$  colapsa a un subcomplejo 1-dimensional  $G$ . Se deduce que  $v_i(K_1 \cap K_2) \searrow v_i G$  para  $i = 1, 2$ , y por lo tanto  $K$  se 3-deforma a la suspensión de  $G$ .  $\square$

**Observación 1.4.3** (*Sobre la conjetura de Andrews-Curtis*). La conjetura de Andrews-Curtis [3] afirma que los poliedros compactos y contráctiles de dimensión 2 se 3-deforman a un punto. Como consecuencia de la Proposición 1.4.2, la conjetura de Andrews-Curtis se cumple para poliedros contráctiles que admiten un cubrimiento por 2 subpoliedros colapsables PL. En efecto, sea  $P$  un poliedro contráctil cubierto por subpoliedros colapsables  $P_1, P_2$ . De la sucesión de Mayer Vietoris, la intersección  $P_1 \cap P_2$  tiene homología trivial y por Lema 1.2.2,  $P_1 \cap P_2$  colapsa a un árbol. Luego, por la Proposición 1.4.2,  $P$  se 3-deforma a un punto.

Si bien la Proposición 1.4.2 provee una información valiosa, está lejos de constituir una caracterización de aquellos poliedros que admiten un cubrimiento por dos subpoliedros colapsables. En efecto, como puede intuirse por analogía con la categoría geométrica, la categoría geométrica PL no es un invariante homotópico (simple) de un poliedro. Más aun, esto se puede deducir del mismo ejemplo de Fox que muestra que la categoría geométrica no es un invariante homotópico, descrito en el Lema 1.1.4. Sea  $X_1$  el wedge de  $S^2$  con dos círculos y sea  $X_2$  el espacio obtenido a partir de identificar tres puntos distintos en  $S^2$ . Notemos que  $X_1$  y  $X_2$  tienen el mismo tipo homotópico simple (de hecho, hay incluso una 3-deformación de  $X_1$  a  $X_2$ , que se obtiene del mismo argumento empleado en Lema 1.1.4 para mostrar que  $X_1$  y  $X_2$  son homotópicamente equivalentes). Partiendo cada esfera en  $X_1$  en dos, vemos que  $X_1$  admite un cubrimiento por dos subpoliedros colapsables PL y por lo tanto,  $\text{plgcat}(X_1) = 2$ . Por otra parte, como  $X_2$  no admite cubrimientos por dos subpoliedros contráctiles por la demostración del Lema 1.1.4, es  $\text{plgcat}(X_2) = 3$ .

Durante el resto de esta sección, trataremos de entender bajo qué condiciones es posible determinar la categoría geométrica PL de un poliedro una vez que sabemos que su tipo homotópico simple es el correcto (es decir, el de un wedge de esferas de dimensión 1 y 2). Si un poliedro dado  $P$  admite un cubrimiento por dos subpoliedros colapsables  $P_1$  y  $P_2$ , buena parte de la información relevante sobre la topología de  $P$  está concentrada en la forma en que la intersección  $P_1 \cap P_2$  se embebe en  $P$ . Una situación particularmente favorable sería que esta intersección fuese de dimensión 1 (un grafo). Con esta idea en mente, describimos una clase de poliedros que llamamos *interiormente conexos* para los cuales siempre se puede deformar la intersección para que sea 1-dimensional.

**Definición 1.4.4.** Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión 2. Decimos que una arista de  $K$  es *interior* si es la cara de exactamente dos 2-símplices de  $K$ .

Recordemos que un complejo simplicial  $K$  de dimensión  $n$  es *homogéneo* o *puro* de dimensión  $n$  si todos sus símplices maximales tienen dimensión  $n$ .

**Definición 1.4.5.** Sea  $K$  un complejo simplicial homogéneo de dimensión 2. Decimos que  $K$  es *interiormente conexo* si todo par de 2-símplices  $\sigma, \tau$  de  $K$  se conecta por una sucesión de 2-símplices  $\sigma = \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r = \tau$  de manera tal que  $\eta_i \cap \eta_{i+1}$  es una arista interior de  $K$  para cada  $1 \leq i < r$ . Llamamos a una tal sucesión *sucesión interior*. Decimos que un poliedro  $P$  es interiormente conexo si una (o equivalentemente, cualquiera) de sus triangulaciones es interiormente conexa.

**Ejemplo 1.4.6.** Las superficies o, más generalmente, las pseudosuperficies son interiormente conexas. El complejo de presentación asociado a una presentación finita *one-relator* en el que cada generador aparece al menos una vez en la relación es también interiormente conexo.

La intuición es que las aristas interiores de un poliedro determinan localmente, de una forma concreta, dos lados y que, para cubrir el poliedro por dos subpoliedros colapsables, debería bastar con elegir uno de los lados para cada miembro del cubrimiento alrededor de las aristas de la intersección. La condición global exigida en la definición de poliedros interiormente conexos garantiza que las elecciones pueden ser llevadas a cabo de forma coherente. Formalizamos esta idea en el siguiente resultado.

**Lema 1.4.7.** *Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión 2 interiormente conexo y no colapsable. Supongamos que  $K$  es la unión de subcomplejos colapsables  $K_1$  y  $K_2$ . Entonces, existen subcomplejos colapsables  $L_1$  y  $L_2$  tales que  $K = L_1 \cup L_2$  y  $L_1 \cap L_2$  es 1-dimensional.*

*Demostración.* Supongamos que  $K_1 \cap K_2$  tiene al menos un 2-símplex  $\eta$ . Como  $K_1 \cap K_2$  es un subcomplejo propio de  $K$ , podemos encontrar un 2-símplex que no esté en  $K_1 \cap K_2$  y una sucesión interior que lo conecta con  $\eta$ . Entonces, existen 2-símplices  $\sigma, \tau$  junto con una arista interior  $e = \sigma \cap \tau$  tal que  $\tau \in K_1 \cap K_2$  pero  $\sigma \notin K_1 \cap K_2$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\sigma \in K_1$ . Entonces,  $e$  es una cara libre del complejo  $K_2$ , lo que implica que podemos quitar  $\tau$  de  $K_2$ . Esto es, los complejos  $K_1$  y  $\tilde{K}_2 = K_2 \setminus \tau$  forman nuevamente un cubrimiento colapsable de  $K$  y  $K_1 \cap \tilde{K}_2$  que tiene un 2-símplex menos que  $K_1 \cap K_2$ . Por inducción, se sigue que es posible encontrar subcomplejos colapsables  $L_1$  y  $L_2$  que cubren  $K$  y se intersecan en un grafo.  $\square$

Ahora que sabemos que la intersección de un cubrimiento colapsable PL de tamaño 2 es de dimensión 1 para una clase considerable de poliedros, el siguiente objetivo de interés es la estructura de este grafo. Nos enfocamos en las hojas del grafo intersección, porque son los candidatos naturales para empezar a simplificar el grafo. Más específicamente, encontramos que a menudo la topología local de un poliedro alrededor de una hoja del grafo intersección exhibe una cierta rigidez. Introducimos una definición de [51] para hacer más precisa esta afirmación.

**Definición 1.4.8.** [51] Sea  $K$  un complejo simplicial. Un vértice  $v$  de  $K$  es un *punte* si  $K \setminus v$  tiene más componentes conexas que  $K$ . Decimos que  $v$  es *divisible* si el link  $\text{lk}_K(v)$  tiene puentes. Notemos que tiene sentido decir que un punto en un poliedro es divisible porque esta propiedad depende únicamente del tipo de homeomorfismo de un pequeño entorno cerrado alrededor de un punto y no de una triangulación específica del espacio.

Tanto el contenido como la prueba del lema siguiente están inspirados en resultados de [8, 51].

**Lema 1.4.9.** *Sea  $K$  un complejo simplicial homogéneo de dimensión 2 que admite un cubrimiento colapsable de tamaño dos. Supongamos adicionalmente que el link de todo vértice no divisible de  $K$  es conexo. Entonces, existen subcomplejos colapsables  $L_1, L_2$  que cubren  $K$  tales que cada hoja del 1-esqueleto  $(L_1 \cap L_2)^{(1)}$  de  $L_1 \cap L_2$  es un vértice divisible de  $K$ .*

*Demostración.* Sean  $K_1$  y  $K_2$  subcomplejos de  $K$  que forman un cubrimiento colapsable de  $K$ . Tomemos  $\eta = vw \in (K_1 \cap K_2)^{(1)}$  una arista tal que  $w$  es una hoja, i.e.  $\text{lk}_{(K_1 \cap K_2)^{(1)}}(w) = v$ , pero no un vértice divisible. Supongamos en primer lugar que  $\eta$  no es maximal en ninguno de los subcomplejos  $K_1, K_2$ , de manera que existen vértices  $v_i \in K_i$  con  $vv_i \in K_i$  para  $i = 1, 2$ .

Como  $w$  no es un vértice divisible, podemos encontrar un camino que une  $v_1$  a  $v_2$  en  $\text{lk}_K(w) \setminus v$ . Pero entonces tiene que existir al menos otra arista en  $\text{lk}_{K_1 \cap K_2}(w)$ , lo que contradice la hipótesis de que  $\eta$  es una hoja de  $(K_1 \cap K_2)^{(1)}$ . Supongamos ahora que  $\eta$  es maximal en  $K_1$  y tomemos  $\tau = v_2\eta$  un 2-símplex de  $K_2$  que contiene a  $\eta$  (existe uno por la homogeneidad de  $K$ ). Mostramos que en este caso  $K_1$  colapsa a  $K_1 \setminus w$ . Si no fuera el caso, debería existir una arista  $\eta' \in K_1$  que sale de  $w$ . Por la homogeneidad de  $K$ ,  $\eta'$  es cara de algún 2-símplex  $\sigma = v_1\eta'$  que necesariamente pertenece a  $K_1$  pero no a  $K_2$ . Como por hipótesis  $w$  no es divisible y su link es conexo, hay un camino en  $\text{lk}_K(w) \setminus v$  que une  $v_1$  a  $v_2$  y por lo tanto  $w$  no puede ser una hoja de  $(K_1 \cap K_2)^{(1)}$ , contradicción. Haciendo los colapsos que corresponden a aristas en el segundo caso, podemos asumir que las hojas de  $(K_1 \cap K_2)^{(1)}$  son vértices divisibles.  $\square$

Supongamos ahora que un poliedro  $P$  de dimensión 2 se cubre por dos subpoliedros colapsables PL  $P_1$  y  $P_2$ . En caso de que su intersección sea un grafo, disponemos ya de algo de información sobre su comportamiento local en las hojas. Con respecto a la topología global de  $P_1 \cap P_2$ , como por el Lema 1.2.2 este complejo colapsa a un grafo, su tipo homotópico queda completamente determinado por la homología. Una aplicación directa de la sucesión larga de Mayer-Vietoris revela que

$$\tilde{H}_0(P_1 \cap P_2) \equiv H_1(P), \quad H_1(P_1 \cap P_2) \equiv H_2(P),$$

donde los grupos de homología son tomados con coeficientes en  $\mathbb{Z}$ . Por la Proposición 1.4.2, sabemos que  $H_1(P)$  y  $H_2(P)$  son grupos abelianos libres finitamente generados. Ahora, si  $\text{rg } H_2(P) < \text{rg } H_1(P)$  al menos dos componentes conexas de  $P_1 \cap P_2$  son acíclicas. Dado que el poliedro  $P_1 \cap P_2$  colapsa a un grafo, esto implica que al menos dos componentes conexas de  $P_1 \cap P_2$  son colapsables. Si además tales componentes son grafos,  $P_1 \cap P_2$  debería tener al menos dos hojas, lo que a su vez implica por Lema 1.4.9 que  $P$  tiene al menos dos vértices que son divisibles o tienen links disconexos, siempre que  $P$  sea homogéneo. La conclusión alcanzada en este párrafo es a grandes trazos, que un poliedro interiormente conexo que es regular tanto local como globalmente, no admite cubrimientos colapsables PL de tamaño dos.

**Teorema 1.4.10.** *Sea  $P$  un poliedro de dimensión 2 interiormente conexo tal que  $H_2(P) = 0$  o  $\text{rg } H_2(P) < \text{rg } H_1(P)$ . Supongamos adicionalmente que  $P$  no es colapsable PL, tiene a lo sumo un vértice divisible y que el link de todo vértice no divisible es conexo. Entonces,  $\text{plgcat}(P) = 3$ .*

*Demostración.* El caso  $\text{rg } H_2(P) < \text{rg } H_1(P)$  fue tratado en el párrafo previo. Supongamos que  $H_2(P) = H_1(P) = 0$  y que  $P$  es la unión de subpoliedros colapsables PL  $P_1, P_2$  que se intersecan en un grafo. Entonces,  $P_1 \cap P_2$  es un árbol y como podemos asumir por el Lema 1.4.9 que sus hojas están ubicadas en vértices divisibles,  $P_1 \cap P_2$  debería ser un punto. Se deduce que  $P$  es la unión a un punto de poliedros colapsables PL, lo que contradice la hipótesis de que  $P$  es interiormente conexo.  $\square$

**Ejemplo 1.4.11.** El dunce hat  $D$  es un poliedro interiormente conexo con un único vértice divisible y tal que todo otro vértice tiene link conexo. Luego, por el Teorema 1.4.10 ninguna triangulación de  $D$  puede admitir un cubrimiento por dos subpoliedros colapsables. De hecho, podemos asegurar algo más. El dunce hat  $D$  puede ser visto como el complejo de presentación asociado a la presentación one-relator  $\langle a \mid aaa^{-1} \rangle$  (ver el primer párrafo de §1.4.1). Más generalmente, por el Teorema 1.4.10 ninguna de las presentaciones de la forma  $\langle a \mid a^n a^{-(n-1)} \rangle$  ( $n \geq 2$ ) admite un cubrimiento por dos subpoliedros colapsables PL.

Destacamos que este ejemplo generaliza un resultado de [40], donde los autores muestran que una triangulación específica del dunce hat no puede ser escrita como la unión de dos subcomplejos colapsables.

**Ejemplo 1.4.12.** La casa de Bing standard con dos habitaciones admite un cubrimiento colapsible PL de tamaño dos (para verlo, alcanza con dividir el complejo en dos mitades, de manera que cada una contenga las paredes que soportan el túnel vertical). Notemos que, a diferencia del dunce hat, la casa de Bing con dos habitaciones no es interiormente conexa. Además, como consecuencia de la demostración del Teorema 1.4.10 es imposible cubrir este poliedro por dos subpoliedros colapsables PL que se intersecan a un grafo.

### 1.4.1. La geometría de presentaciones one-relator

En esta breve sección calculamos completamente la categoría geométrica PL de los complejos de presentación one-relator, mostrando que este valor puede leerse directamente desde la presentación.

Mencionamos al pasar en el Ejemplo 1.4.6 que los complejos asociados a presentaciones one-relator son interiormente conexos. Recordemos la construcción de complejos asociados a presentaciones. Sea  $\mathcal{P} = \langle X | R \rangle$  una presentación finita. Asociamos un modelo topológico a  $\mathcal{P}$  de la siguiente manera. Formamos en primer lugar  $K = \vee_{x \in X} S_x^1$ , el wedge de 1-esferas indexados por  $X$ . Cada palabra  $r \in R$  determina un lazo combinatorio en el espacio  $K$  basado en el punto wedge (el punto de la unión). Este lazo es utilizado para adjuntar una 2-celda a  $K$ . El CW-complejo resultante se conoce como el *complejo de presentación* de  $\mathcal{P}$  y se nota  $K_{\mathcal{P}}$ . Como las funciones de adjunción son combinatorias, el complejo de presentación  $K_{\mathcal{P}}$  es un poliedro (ver [54, Chapter 2] para más detalles). Cuando el conjunto  $R$  consta de solo una palabra  $r$  la presentación  $\langle X | r \rangle$  se llama *presentación one-relator*.

Los complejos de presentación homogéneos asociados a una presentación one-relator son interiormente conexos: como tienen una única 2-celda, dos puntos cualesquiera se pueden conectar por un camino contenido en el interior de la 2-celda. Con el fin de evitar un análisis exhaustivo innecesario, trabajaremos exclusivamente con complejos de presentación one-relator homogéneos, lo que equivale a pedir que cada generador aparezca en la relación al menos una vez. Si no sucediera esto, tal complejo de presentación se descompondría como un wedge de un bouquet de 1-esferas  $K_1$  y un complejo homogéneo  $K_2$ , que resulta ser también un complejo de presentación (asociado a la presentación que resulta de remover los generadores que no aparecen en la relación). Como  $K_1$  siempre es la unión de dos subpoliedros colapsables PL (simplemente dividiendo en dos mitades cada esfera), la categoría geométrica PL de  $K$  coincide con  $\text{plgcat}(K_2)$ , a menos que  $K$  sea colapsable PL.

El cómputo de la categoría geométrica PL para complejos de presentación homogéneos one-relator se separa en dos casos, según la presentación admita un *colapso algebraico* o no. Aquí, decimos que una presentación one-relator  $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_k | r \rangle$  admite un colapso algebraico si uno de los generadores  $x_i$  ocurre una sola vez en  $r$ , con exponente  $\pm 1$ . El caso de las presentaciones que admiten colapsos algebraicos es el más simple de los dos.

**Lema 1.4.13.** *Sea  $K$  un complejo simplicial conexo y sean  $L_1, \dots, L_n$  subcomplejos colapsables y disjuntos de  $K$ . Entonces, existe un subcomplejo colapsable de  $K$  que contiene a la unión  $\bigcup_{i=1}^n L_i$ .*



*Demostración.* Como  $K$  es conexo y  $L_1$  es disjunto con  $\bigcup_{i=2}^n L_i$ , existe un camino simple  $p$  contenido en el 1-esqueleto de  $K$  que une un vértice de  $L_1$  con un vértice de algún  $L_i$  ( $i \neq 1$ ) que no tiene aristas en  $\bigcup_{i=1}^n L_i$ . Consideremos el subcomplejo  $M$  de  $K$  definido por  $M := L_1 \cup p \cup L_i$ . Como  $L_1$  y  $L_i$  son colapsables, colapsan a cualquiera de sus vértices y por lo tanto  $M$  colapsa a  $p$  que es a su vez colapsable. El resultado se deduce por inducción.  $\square$

**Proposición 1.4.14.** *Sea  $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_k | r \rangle$  una presentación finita one-relator y supongamos que  $r$  admite un colapso algebraico. Entonces  $K_{\mathcal{P}}$  admite un cubrimiento por dos subpoliedros colapsables PL, esto es,  $\text{plgcat}(K_{\mathcal{P}}) \leq 2$ .*

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad,  $x_1$  aparece una única vez en  $r$  y la relación es de la forma  $r = x_1^{\pm 1} a_1 \dots a_{m-1}$ , donde cada  $a_i$  es igual a algún  $x_j^{\pm 1}$ ,  $j \neq 1$ . Pensemos en el complejo  $K_{\mathcal{P}}$  como un disco con el borde subdividido en  $m$  aristas etiquetadas en el sentido contrario a las agujas del reloj según  $r$ . Subdividimos la arista con etiqueta  $x_1$  en  $2(m-1) + 1$  aristas y subdividimos el resto de las aristas en tres aristas. Unamos la  $2i$ -ésima arista de la subdivisión de  $x_1$  a la arista central de (la arista etiquetada como)  $a_i$  por una banda 2-dimensional contenida en el disco de modo tal que estas bandas son disjuntas dos a dos (ver Figura 1.1).

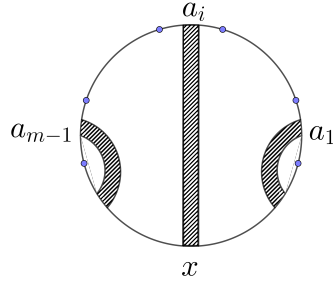


Figura 1.1: Las bandas (sombreadas) colapsan PL a un árbol a través de la arista que interseca la arista etiquetada  $x_1$ .

Tanto el subpoliedro  $P_1$  formado por la unión de estas bandas como su complemento  $P_2$  consisten de una unión disjunta de subpoliedros colapsables PL de  $K_{\mathcal{P}}$ . Luego, por Lema 1.4.13,  $P_1$  y  $P_2$  pueden ser incluidos en poliedros colapsables PL  $Q_1$  y  $Q_2$  que cubren  $K_{\mathcal{P}}$ .  $\square$

Con respecto al otro caso, notemos que en un complejo de presentación one-relator sin colapsos algebraicos todo punto tiene link conexo, con la posible excepción del punto wedge. Dado que los complejos de presentación one-relator homogéneos son interiormente conexos, como consecuencia del Teorema 1.4.10 la mayoría de ellos no admite un cubrimiento colapsable PL de tamaño 2..

**Proposición 1.4.15.** *Sea  $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_k | r \rangle$  una presentación finita one-relator tal que  $r$  no admite colapsos algebraicos. Entonces, si el número de generadores  $k$  es más grande que 1 o el grupo  $H_2(K_{\mathcal{P}})$  es trivial,  $\text{plgcat}(K_{\mathcal{P}}) = 3$ .*

*Demostración.* Por homología celular, el grupo  $H_2(K_{\mathcal{P}})$  es abeliano libre de rango a lo sumo 1. Además, como muestra un cálculo directo utilizando la característica de Euler, sabemos que

$$\text{rg } H_2(K_{\mathcal{P}}) - \text{rg } H_1(K_{\mathcal{P}}) = 1 - k.$$

Luego, si  $\mathcal{P}$  tiene  $k > 1$  generadores, tenemos que  $\text{rg } H_2(K_{\mathcal{P}}) < \text{rg } H_1(K_{\mathcal{P}})$  y la conclusión sigue del Teorema 1.4.10. El caso  $H_2(P) = 0$  también está cubierto por el Teorema 1.4.10.  $\square$

Para completar el panorama, falta tratar el subcaso de presentaciones one-relator con solo un generador y segundo grupo de homología no trivial, que son exactamente las presentaciones de la forma  $\langle x | r \rangle$ , donde  $r$  es una palabra en las letras  $x, x^{-1}$  con exponente total 0. El cómputo de la categoría geométrica PL para estos complejos requiere un cuidadoso análisis ad-hoc.

**Proposición 1.4.16.** *Sea  $\mathcal{P} = \langle x | r \rangle$  una presentación one-relator tal que  $H_2(K_{\mathcal{P}})$  es no trivial. Entonces,  $\text{plgcat}(K_{\mathcal{P}}) = 2$  si y solo si  $\mathcal{P}$  es de la forma  $\langle x | (xx^{-1})^{\pm 1} \rangle$ .*

*Demostración.* Supongamos que una triangulación de  $K_{\mathcal{P}}$  admite un cubrimiento por subcomplejos colapsables  $K_1, K_2$ , que podemos asumir que se intersecan en un grafo con a lo sumo una hoja por los Lemas 1.4.7 y 1.4.9. Como  $H_0(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}^2$  y  $H_1(K_1 \cap K_2) \cong \mathbb{Z}$ , una de las componentes conexas de  $K_1 \cap K_2$  es acíclica y por lo tanto consiste de un único punto. Para que esto sea posible, el link del punto wedge  $v$  debe contar con más de una componente conexa.

Recordemos que el grafo de Whitehead de  $r$  (ver [54, Ch.6]) permite determinar (el tipo de homeomorfismo de) el link del punto wedge en complejos de presentación directamente de las relaciones. Indiquemos brevemente cómo se construye el grafo de Whitehead en el caso bajo consideración. Aparte de  $v$ , marquemos dos puntos  $x_+$  y  $x_-$  en el lazo  $x$ , uno alejándose del punto base en el sentido de la orientación de  $x$  y el otro en el sentido contrario. Ahora, si por ejemplo  $xx$  es una subpalabra de la relación  $r$ , significa que hay material de dimensión 2 que conecta la parte final del primer ciclo  $x$  a la parte inicial del segundo, de manera que debería haber una arista que conecta a  $x_-$  con  $x_+$  en el link de  $v$ . El grafo de Whitehead tiene como vértices  $x_+$  y  $x_-$  y las aristas provienen de la palabra  $r$  (considerada cíclicamente) de la manera explicada en el ejemplo anterior. Luego, no es difícil ver que el link de  $v$  no es conexo únicamente para presentaciones de la forma  $\langle x | (xx^{-1})^{\pm n} \rangle$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , porque la presencia de subpalabras  $xx$  o  $x^{-1}x^{-1}$  conecta los puntos  $x_+$  y  $x_-$ .

Dada una de estas presentaciones, llamemos  $C$  a la componente conexa de  $K_1 \cap K_2$  que no es el punto wedge. Dado que es un grafo conexo con un único ciclo y sin hojas,  $C$  resulta homeomorfo a  $S^1$ . Además, perturbando levemente  $K_1$  y  $K_2$  cerca del lazo  $x$  de ser necesario, es válido asumir que la intersección de esta componente con  $x$  es transversal, es decir, un conjunto finito de puntos. Además, notemos que la intersección  $C \cap x$  no puede ser vacía. En efecto, si el lazo  $x$  estuviera íntegramente contenido en  $K_1$  (el argumento para  $K_2$  es simétrico), este complejo no tendría primer grupo de homología trivial porque la clase de homología determinada por  $x$  es un generador de  $H_1(K_{\mathcal{P}})$ , lo que conlleva una contradicción. Sea entonces  $w$  un punto en  $C \cap x$  y etiquetemos con  $a$  y  $b$  las aristas de la subdivisión de  $x$  (una en cada lado) que contienen a  $w$ . Como  $C$  interseca el lazo  $x$  solo en puntos, las aristas  $a$  y  $b$  están completamente contenidas en distintos miembros del cubrimiento colapsable, digamos  $a \in K_1 \setminus K_2$  y  $b \in K_2 \setminus K_1$ . Notemos que, en cualquier triangulación de  $K_{\mathcal{P}}$ , las aristas  $a, b$  son cara de  $2n$  2-símplices. Además, el star (abierto) de  $w$  es homeomorfo a una unión de  $2n$  semiplanos euclídeos con el eje  $x$  identificado. Se deuce que el vértice  $w$  tiene grado  $2n$  en el grafo  $C$ . Esto es imposible a menos que  $n = 1$ . Finalmente, observemos que el complejo asociado a la presentación de la forma  $\langle x | (xx^{-1})^{\pm 1} \rangle$  es homeomorfo a una 2-esfera con sus polos identificados y por lo tanto admite un cubrimiento por dos subpoliedros colapsables PL.  $\square$

La caracterización completa del comportamiento de la categoría geométrica PL para complejos de presentaciones one-relator se deduce como corolario de las Proposiciones 1.4.14, 1.4.15 y 1.4.16, y puede resumirse de la siguiente manera.

**Teorema 1.4.17.** *Sea  $\mathcal{P} = \langle x_1, \dots, x_k \mid r \rangle$  una presentación one-relator finita. Entonces,  $K_{\mathcal{P}}$  puede ser cubierto por dos subpoliedros colapsables PL si y solo si  $r$  admite un colapso algebraico o  $\mathcal{P}$  es de la forma  $\langle x \mid (xx^{-1})^{\pm 1} \rangle$ .*

### 1.4.2. Poliedros interiormente conexos

El propósito de esta sección es probar un resultado estructural sobre los poliedros interiormente conexos. Explícitamente, mostramos que los poliedros interiormente conexos pueden ser obtenidos como cocientes de un disco, de la misma forma en que las superficies cerradas pueden ser formadas a través de ciertas identificaciones en pares de aristas del borde de un determinado polígono. Seguimos aquí el tratamiento y la notación de [66, Ch.6].

**Definición 1.4.18.** Dado un alfabeto finito  $S$ , una *palabra* de longitud  $k$  en  $S$  es una lista ordenada de  $k$  símbolos de  $S \cup S^{-1}$ . Una *presentación poligonal*  $\mathfrak{P}$  consiste de un alfabeto finito  $S$  y un conjunto finito de palabras  $W_1, \dots, W_r$  en  $S$  de longitud al menos tres tal que cada elemento de  $S$  (o su inversa formal) aparece en alguna de las palabras. Denotamos a tal presentación por  $\mathfrak{P} = \langle S \mid W_1, \dots, W_r \rangle$ .

Una presentación poligonal  $\mathfrak{P}$  determina un espacio topológico (llamado la *realización geométrica* de  $\mathfrak{P}$ ) de la manera siguiente. Para cada palabra  $W_i$  en  $\mathfrak{P}$  de longitud  $k$  formamos el polígono regular convexo  $P_i$  de  $k$  lados y etiquetamos sus aristas en sentido contrario a las agujas del reloj según  $W_i$ , empezando desde un vértice arbitrario. Ahora, identifiquemos las aristas con la misma etiqueta en  $\coprod_i P_i$  mediante el homeomorfismo simplicial que empareja los vértices de las aristas, invirtiendo la orientación si es necesario.

Hay ciertos movimientos combinatorios en las presentaciones poligonales, llamados *transformaciones elementales*, que preservan el tipo de homeomorfismo (PL) de las realizaciones geométricas correspondientes. Describimos aquí solo aquellas transformaciones que utilizaremos, refiriendo a [66, Ch.6] para la lista completa.

- Reflexión:  $\langle S \mid a_1 \dots a_m, W_2, \dots, W_r \rangle \mapsto \langle S \mid a_m^{-1} \dots a_1^{-1}, W_2, \dots, W_r \rangle$ .
- Rotación:  $\langle S \mid a_1 a_2 \dots a_m, W_2, \dots, W_r \rangle \mapsto \langle S \mid a_2 \dots a_m a_1, W_2, \dots, W_r \rangle$ .
- Pegado:  $\langle S, e \mid W_1 e, e^{-1} W_2, \dots, W_r \rangle \mapsto \langle S \mid W_1 W_2, \dots, W_r \rangle$ . Notar que  $e$  no pertenece a  $S$ , así que ninguna de las palabras  $W_1, \dots, W_r$  puede contener a  $e$  para que esta transformación sea válida.

El resultado principal de esta sección afirma que todo poliedro interiormente conexo  $P$  tiene una presentación poligonal con una palabra. La estrategia de la demostración consiste en pegar iterativamente pares de 2-símplices de una triangulación de  $P$  que comparten una arista interior hasta que quede un único polígono. Sin embargo, los vértices de una arista interior pueden ser *singulares*, i.e. pueden tener un entorno que no es homeomorfo a un disco abierto. Pegando un par de 2-símplices que comparten una arista interior, podemos crear identificaciones en el interior del polígono que estamos construyendo. Mostramos en el siguiente lema que es posible evitar esta situación tomando una triangulación suficientemente fina de  $P$ .

**Lema 1.4.19.** *Sea  $K$  un complejo simplicial interiormente conexo de dimensión 2. Entonces, cada par de símplexes de la segunda subdivisión baricéntrica  $K''$  de  $K$  puede unirse a través de una sucesión interior de manera tal que los vértices de las aristas interiores de la sucesión sean no singulares.*

*Demostración.* Sean  $\sigma_1, \sigma_2$  un par de 2-símplexes de  $K''$  y sean  $\tau_1, \tau_2$  respectivamente los 2-símplexes de  $K$  que los contienen. Como  $K$  es interiormente conexo, existe una sucesión interior  $S$  en  $K$  que une  $\tau_1$  con  $\tau_2$ . No es complicado encontrar una sucesión interior en  $K''$  formada por 2-símplexes contenidos en 2-símplexes de  $S$  que evitan los vértices de  $K$  y conectan  $\sigma_1$  con  $\sigma_2$ .  $\square$

**Teorema 1.4.20.** *Sea  $P$  un poliedro interiormente conexo. Entonces  $P$  admite una presentación poligonal con una única palabra.*

*Demostración.* Fijemos un complejo simplicial  $K$  que triangula a  $P$ . Por Lema 1.4.19, podemos asumir que cada par de 2-símplexes de  $K$  se conecta por una sucesión interior cuyas aristas interiores no tienen vértices singulares. Elijamos una etiqueta distinta para cada arista de  $K$  y fijemos una orientación para sus símplexes. Consideremos la presentación poligonal  $\mathfrak{P}$  que tiene como alfabeto el conjunto de etiquetas de las aristas de  $K$  y una palabra por cada 2-símplex, determinada por las aristas de su borde en el orden definido por las orientaciones prefijadas. Como la realización geométrica de  $\mathfrak{P}$  es homeomorfa a  $P$ , alcanza con reducir  $\mathfrak{P}$  a una presentación con una única palabra aplicando transformaciones elementales. El 2-símplex que corresponde a  $W_i$  tiene al menos una arista interior  $a$  sin vértices singulares. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $W_2$  es la única otra palabra en la cual  $a$  o  $a^{-1}$  aparece. Aplicando rotaciones y reflexiones, podemos asumir que  $W_1 = \tilde{W}_1 a$ ,  $W_2 = a^{-1} \tilde{W}_2$  y las pegamos reduciendo el número de palabras en  $\mathfrak{P}$ . Inductivamente, supongamos que hay más de una palabra en la presentación. Afirmamos que existe una arista interior sin vértices singulares de  $K$  que aparece exactamente una vez en  $W_1$ . En efecto, si no fuera el caso, sería imposible conectar un 2-símplex de (el subcomplejo determinado por)  $W_1$  y un 2-símplex que no pertenece a  $W_1$  por una sucesión interior que no contenga vértices no singulares en sus aristas interiores. Como antes, reacomodamos las palabras rotando y reflejando de manera que sea posible pegar las palabras  $W_1$  y  $W_2$ .  $\square$

**Observación 1.4.21.** *Sea  $P$  un poliedro interiormente conexo y sea  $\mathfrak{P} = \langle S | W \rangle$  una presentación poligonal de  $P$  con una sola palabra obtenida como en el Teorema 1.4.20. Consideremos el subgrafo  $G$  de  $P$  formado por las aristas determinadas por  $S$ . La palabra  $W$  define una aplicación combinatoria sobreyectiva  $\varphi : S^1 \rightarrow G$  para una triangulación conveniente de  $S^1$ . Esto provee una descripción alternativa de los poliedros interiormente conexos. Concretamente, dados un grafo simplicial  $G$  y una aplicación sobreyectiva  $\varphi : S^1 \rightarrow G$  obtenemos un poliedro interiormente conexo como el espacio subyacente al CW-complejo que consiste de una única 2-celda adjuntada a  $G$  según  $\varphi$ . En caso de que  $G$  sea homeomorfo a un bouquet de esferas de dimensión 1, el espacio resultante es un complejo de presentación one-relator homogéneo.*

## Capítulo 2

# Triangulaciones mínimas del tipo homotópico de superficies

El resultado que asegura que las variedades cerradas suaves son triangulables tiene una larga tradición. Varios resultados clásicos apuntan a entender las restricciones que impone la topología de una variedad a sus triangulaciones, tales como las relaciones de Dehn-Sommerville y el Teorema de la Cota Inferior (ver [10, 60]). Un área particularmente activa dentro del campo es el estudio de triangulaciones mínimas o triangulaciones con pocos simplices de variedades. Aparte de su interés intrínseco, disponer de triangulaciones óptimas o casi óptimas permitiría calcular (con asistencia de un ordenador) algunos invariantes tales como la primera clase de Pontrjagin [38, 37].

Por otro lado, el uso de triangulaciones óptimas para medir la complejidad de la topología de las variedades también es clásico, especialmente en el contexto de 3-variedades (ver [70]) y variedades hiperbólicas (ver [71] y el Capítulo 3 para más información). En el artículo reciente [61] Karoubi y Weibel relacionaron la complejidad de la topología de un espacio a triangulaciones mínimas del tipo homotópico a través de la introducción del *covering type*. El *covering type* de un espacio es un invariante de tipo categoría L-S diseñado para medir la complejidad de un espacio a través de sus cubrimientos *buenos*. La conexión con triangulaciones mínimas viene del hecho que para un espacio  $X$  del tipo homotópico de complejos simpliciales compactos, el *covering type* puede reformularse como el número de vértices en una triangulación mínima de un complejo simplicial homotópicamente equivalente a  $X$ .

El objetivo principal de este capítulo es la exposición del cálculo completo del *covering type* de las superficies cerradas, lo que resuelve un problema formulado por Karoubi y Weibel. Este cálculo revela que las triangulaciones óptimas de las superficies cerradas resultan ser, con una única excepción, los modelos más económicos dentro de su tipo homotópico. Por esta razón, inauguramos el capítulo con una digresión sobre el teorema de Jungerman y Ringel [58, 75], que caracteriza completamente las triangulaciones óptimas de superficies cerradas, tanto orientables como no orientables. Continuamos con una breve introducción al *covering type* y algunas de sus propiedades básicas, siguiendo a Karoubi y a Weibel. Las restantes dos secciones tratan sobre el cómputo del *covering type* de superficies cerradas. Las herramientas involucradas son bastante clásicas y elementales: la estructura de anillo del anillo de cohomología de las superficies y la fórmula de la característica de Euler.

## 2.1. Triangulaciones mínimas de superficies

Decimos, como es usual, que un complejo simplicial  $K$  es una triangulación de un espacio topológico  $X$  si la realización geométrica de  $K$  es homeomorfa a  $X$ . Como es bien sabido, todas las variedades suaves admiten triangulaciones. El problema de encontrar triangulaciones mínimas o pequeñas de variedades suaves ha sido extensamente investigado (ver por ejemplo [20, 21, 68, 69, 58, 75]), mientras que el interés en triangulaciones mínimas de superficies cerradas se remonta por lo menos a 1950 [58]. La meta de esta sección es presentar la solución completa al problema de triangulaciones mínimas de las superficies cerradas obtenido por Ringel [75], en el caso no orientable y por Jungerman y Ringel [58] en el caso orientable.

**Teorema 2.1.1.** *Sea  $S$  una superficie cerrada distinta de la superficie orientable de género 2 ( $M_2$ ), la botella de Klein ( $N_2$ ) y la superficie no orientable de género 3 ( $N_3$ ). Existe una triangulación de  $S$  con  $n$  vértices si y solo si*

$$n \geq \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(S)}}{2}.$$

Para los casos excepcionales  $M_2$ ,  $N_2$  y  $N_3$  hay que reemplazar  $n$  por  $n - 1$  en la fórmula previa.

La demostración de este resultado consiste de dos partes distintas, y, como puede ser intuido, la parte difícil es producir triangulaciones de una superficie  $S$  con  $n$  vértices siempre que  $n$  sea más grande que el número en la fórmula. La prueba involucra un uso extensivo de la teoría de grafos corriente y una exposición completa nos desviaría de nuestros objetivos, así que remitimos al lector interesado a los trabajos originales [75, 58]. Nos conformamos con explicar el argumento para mostrar la cota inferior sobre el número de vértices, que resulta ser un cálculo relativamente sencillo con la fórmula de la característica de Euler y será relevante más adelante. Introducimos una notación conveniente antes de la demostración.

**Notación.** Sea  $k \leq 2$  un número entero. Denotamos por  $\rho(k)$  al número entero definido por

$$\rho(k) := \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24k}}{2} \right\rceil.$$

Por un abuso de notación, para un complejo simplicial  $K$  de dimensión 2 con  $\chi(K) \leq 2$ , escribiremos  $\rho(K)$  en lugar de  $\rho(\chi(K))$ . Asimismo,  $\alpha_i(K)$  denotará el número de  $i$ -símplices en el complejo  $K$ .

*Demostración del Teorema 2.1.1 (cota inferior).* Sea  $K$  una triangulación de una superficie cerrada  $S$ . Entonces, por la fórmula de la característica de Euler,

$$\chi(S) = \chi(K) = \alpha_0(K) - \alpha_1(K) + \alpha_2(K).$$

Como toda arista de  $K$  incide en exactamente dos 2-símplices, vemos que  $3\alpha_2(K) = 2\alpha_1(K)$  contando de dos maneras. Por otro lado, como  $K$  es un complejo simplicial, tiene a lo sumo  $\binom{\alpha_0(K)}{2}$  aristas. Entonces,

$$6\chi(S) \geq 6\alpha_0(K) - \alpha_0(K)(\alpha_0(K) - 1).$$

Si  $\chi(S) \leq 0$ , el mínimo entero positivo que satisface la desigualdad es precisamente  $\rho(S) = \rho(\chi(S))$  y por lo tanto,  $\alpha_0(S) \geq \rho(S)$ . Un análisis simple muestra que  $\alpha_0(S) \geq \rho(S)$  también cuando  $\chi(S) = 1, 2$ .  $\square$

Hemos hablado implícitamente hasta ahora sobre triangulaciones mínimas de superficies como triangulaciones que minimizan el número de vértices. Para variedades suaves generales, una triangulación mínima a menudo significa una que minimiza el número de símlices de dimensión máxima. En el caso de las superficies, hay una relación lineal entre el número de símlices en cada dimensión y por lo tanto los distintos posibles significados de triangulaciones mínimas coinciden en dimensión 2.

**Notación.** Sea  $S$  una superficie cerrada. Denotamos por  $\delta(S)$  al mínimo número de 2-símlices en una triangulación de  $S$  y por  $\lambda(S)$  al mínimo número de vértices (0-símlices).

De esta manera, el Teorema 2.1.1 provee una fórmula explícita tanto para  $\delta(S)$  como para  $\lambda(S)$ , siempre y cuando  $S$  es una superficie cerrada. Encapsulamos estas fórmulas en forma de un lema para referencia futura.

**Lema 2.1.2.** *Sea  $S$  una superficie cerrada. Entonces,*

$$\lambda(S) = \rho(S) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(S)}}{2} \right\rceil,$$

*excepto por  $S = M_2, N_2$ , y  $N_3$ , en cuyo caso es  $\lambda(S) = \rho(S) + 1$ . Por otra parte,*

$$\delta(S) = 2\lambda(S) - 2\chi(S).$$

*Demostración.* La fórmula para  $\lambda(S)$  es simplemente una reformulación del Teorema 2.1.1. En cuanto a la segunda parte, recordemos que si  $K$  triangula la superficie  $S$ ,  $3\alpha_2(K) = 2\alpha_1(K)$ , pues cada arista es cara de exactamente dos 2-símlices. Luego, de la fórmula de característica de Euler tenemos

$$2\chi(S) = 2\alpha_0(K) - 2\alpha_1(K) + 2\alpha_2(K) = 2\alpha_0(K) - \alpha_2(K),$$

y se deduce que  $\alpha_2(K) = 2\alpha_0(K) - 2\chi(S)$ . □

## 2.2. El covering type de espacios

El objetivo de esta sección es presentar un invariante conocido como *covering type*, introducido por Karoubi y Weibel en [61] como una forma de medir la complejidad de espacios topológicos. El covering type de un espacio  $X$  que admite una triangulación está estrechamente ligado a triangulaciones mínimas del tipo homotópico de  $X$  (en el sentido de minimizar vértices) y fue nuestra principal motivación para estudiar triangulaciones del tipo homotópico de superficies cerradas.

Antes de la definición del covering type de un espacio, necesitamos recordar la noción de *buen cubrimiento*. Un cubrimiento  $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  de un espacio topológico  $X$  se dice un buen cubrimiento si cada intersección no vacía  $U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n}$  es contráctil. Los cubrimientos buenos fueron utilizados por Weil para probar algunos de los teoremas de de Rham sobre la cohomología de variedades (ver [83, 61]). Estos cubrimientos también aparecen naturalmente en el contexto de variedades riemannianas: todo punto en una variedad riemanniana tiene un entorno geodésicamente convexo (que es, en particular, contráctil) y las intersecciones de tales entornos son nuevamente geodésicamente convexas. Un refinamiento de la noción clásica de la categoría L-S en términos de tales cubrimientos fue recientemente formulada por Karoubi y Weibel [61].

**Definición 2.2.1.** El *covering type estricto* de  $X$  se define como el mínimo número de elementos en un buen cubrimiento de  $X$ . El *covering type* de  $X$ , denotado por  $\text{ct}(X)$ , es el mínimo de los covering type estrictos tomado sobre los espacios  $Y$  del tipo homotópico de  $X$ .

Una de las características más destacadas de este invariante es la conexión con las triangulaciones mínimas (en el sentido de vértices) del tipo homotópico de espacios. En efecto, reinterpremando la Proposición 2.1 y el Teorema 2.5 de [61] (ver también [17, Lemma 2.1]), obtenemos la siguiente definición equivalente para el covering type de espacios del tipo homotópico de CW-complejos compactos.

**Lema 2.2.2.** *Sea  $X$  un espacio topológico homotópicamente equivalente a un CW-complejo compacto. Entonces,  $\text{ct}(X)$  coincide con el mínimo número posible de vértices en un complejo simplicial  $K$  homotópicamente equivalente a  $X$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $\text{ct}(X) = r$  y sea  $Y$  un espacio homotópicamente equivalente a  $X$  que admite un buen cubrimiento  $\mathcal{U}$  de tamaño  $r$ . Por el Teorema del Nervio,  $Y$  es homotópicamente equivalente al nervio  $\mathcal{N}(\mathcal{U})$ , que es un complejo simplicial con  $r$  vértices. Recíprocamente, si  $K$  es un complejo simplicial homotópicamente equivalente a  $X$ , los stars abiertos de sus vértices forman un buen cubrimiento de  $K$ .  $\square$

Para explorar el comportamiento del covering type de los espacios, uno puede empezar analizando los grafos conexos, es decir, complejos conexos de dimensión 1. El tipo homotópico de estos espacios está determinado completamente por un entero no negativo  $h$ , el rango del primer grupo de homología. Concretamente, un grafo conexo  $Y$  con  $\text{rg}(H_1(Y, \mathbb{Z})) = h$  es homotópicamente equivalente a un bouquet de  $h$  círculos. Karoubi y Weibel dieron una fórmula explícita para el covering type de esta familia de espacios.

**Proposición 2.2.3.** ([61, Proposition 4.1]) *Sea  $X_h$  un bouquet de  $h$  círculos. Entonces, el covering type de  $X_h$  es*

$$\text{ct}(X_h) = \left\lceil \frac{3 + \sqrt{1 + 8h}}{2} \right\rceil.$$

*Es decir,  $\text{ct}(X_h)$  es igual al único entero  $n$  que verifica*

$$\binom{n-2}{2} < h \leq \binom{n-1}{2}.$$

Para poner en contexto al resultado, recordemos que la categoría L-S de un grafo conexo es a lo sumo 2. Por lo tanto, esto indica que el covering type retiene más información sobre el tipo homotópico del espacio subyacente. Por otro lado, la fórmula se vuelve más transparente si uno piensa en la formulación alternativa para el covering type de un grafo proveniente del Lema 2.2.2. Según dicha reformulación, deberíamos intentar construir un complejo simplicial  $K$  homotópicamente equivalente a  $X_h$  con la mínima cantidad posible de vértices. Es claro que, entre los grafos simpliciales en  $r$  vértices, el grafo completo  $K_r$  tiene el rango máximo  $\binom{r-1}{2}$  en el grupo  $H_1$ . Así, es imposible formar un grafo simplicial con  $n$  vértices homotópicamente equivalente a  $X_h$  si  $\binom{n-1}{2} < h$ , mientras que removiendo algunas aristas (si es necesario) del grafo completo  $K_n$  podemos construir un tal grafo en el caso contrario.

Cerramos esta sección exhibiendo una relación del covering type de un espacio con los números de Betti, una manifestación más clásica de la presencia de topología no trivial. Recordemos que



para un espacio  $X$  con homología finitamente generada (digamos  $H_k(x) = 0$  para  $k > m$ ) el polinomio de Poincaré  $P_X(t)$  es definido como

$$P_X(t) = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + \beta_m t^m,$$

donde  $\beta_i$  es el rango del grupo de homología  $H_i(X)$  con coeficientes tomados en un cuerpo. Karoubi y Weibel mostraron el siguiente resultado.

**Teorema 2.2.4.** ([61, Theorem 3.3]) *Sea  $P_X(t)$  el polinomio de Poincaré de  $X$  y sea  $n$  su covering type. Si  $X$  es no vacío, entonces*

$$P_X(t) \leq \frac{(1+t)^{n-1} - 1}{t} + 1 = n + \binom{n-1}{2}t + \binom{n-1}{3}t^2 + \cdots + t^{(n-2)},$$

lo que significa que  $\beta_0 \leq n$ ,  $\beta_1 \leq \binom{n-1}{2}$ ,  $\dots$ ,  $\beta_{n-2} \leq 1$  y  $\beta_i = 0$  para  $i \geq n-1$ .

*Demostración.* La demostración es por inducción en  $n$ , siendo triviales los casos  $n = 1, 2$ , pues en esos casos el polinomio de Poincaré  $P_X(t)$  es 1 y 2 respectivamente.

Para el paso inductivo, si  $\text{ct}(X) = n$ , sin pérdida de generalidad  $X$  admite un buen cubrimiento de tamaño  $n$  y por lo tanto  $X = \cup_{i=1}^n U_i$  para ciertos subespacios abiertos y contráctiles  $U_i$ . Pongamos  $Y = \cup_{i \neq 1} U_i$ , el subespacio de  $X$  formado por la unión de los últimos  $n-1$  miembros del buen cubrimiento. Claramente, tanto  $\text{ct}(Y)$  como  $\text{ct}(U_1 \cap Y)$  están acotados por  $n-1$ . De la sucesión de Mayer-Vietoris aplicada a la escritura  $X = U_1 \cup Y$ , obtenemos para cada  $k$  sucesiones exactas

$$H_k(U_1) \oplus H_k(Y) \rightarrow H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(U_1 \cap Y).$$

Luego, por la hipótesis inductiva tenemos  $\beta_0(X) \leq n$  y para  $k > 0$ ,

$$\beta_k(X) \leq \beta_k(Y) + \beta_{k-1}(U_1 \cap Y) \leq \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-1}{k}.$$

□

### 2.3. El covering type de superficies

El tipo topológico de las superficies cerradas, como es bien sabido, está completamente determinado por un único número entero (el género), además de su orientabilidad. Luego, constituyen en este sentido la familia más simple de espacios 2-dimensionales y es natural preguntar sobre su covering type tras haber resuelto el caso de dimensión 1. Este problema, planteado por Karoubi y Weibel en [61] admite a través del Lema 2.2.2 la siguiente formulación equivalente.

**Problema.** Dada una superficie cerrada  $S$ , calcular el mínimo número de vértices en un complejo simplicial homotópicamente equivalente a  $S$ .

Aquí, por superficie cerrada entendemos como es usual una variedad compacta de dimensión 2 sin borde, no necesariamente orientable. El objetivo de esta sección es brindar una solución completa a este problema

Si bien es solamente *casí* cierto, puede ser útil para el lector tomar a lo largo de la sección como hipótesis inicial que las triangulaciones mínimas de las superficies cerradas son también

triangulaciones mínimas del correspondiente tipo homotópico. Si se acepta que la triangulación óptima del tipo homotópico de una superficie cerrada se realiza en un complejo de dimensión 2 (creemos que esto no es obvio pero parece razonable), la conjetura es plausible. En efecto, intuitivamente un complejo de dimensión 2 que es homotópicamente equivalente a una superficie pero no homeomorfo parece contener 2-símplices de más. Además, Karoubi y Weibel verificaron esta conjetura para el plano proyectivo y el toro aprovechando la no trivialidad del producto cup en los grupos de cohomología de dimensión 1 de dichos espacios. Así, en vista del Teorema 2.1.1, es suficiente probar (al menos para los casos no excepcionales) que un complejo  $K$  del tipo homotópico de una superficie cerrada dada  $S$  tiene al menos  $\rho(S) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(S)}}{2} \right\rceil$  vértices. El punto de partida para lograr esto es la observación de que la demostración de la cota inferior en el Teorema 2.1.1 es válida bajo hipótesis más débiles que las originales.

**Lema 2.3.1.** *Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión 2 tal que toda arista de  $K$  pertenece a al menos dos 2-símplices y tal que  $\chi(K) \leq 2$ . Entonces,  $K$  tiene al menos  $\rho(K)$  vértices.*

*Demostración.* Al igual que en la demostración de la cota inferior del Teorema 2.1.1, partimos de la fórmula de la característica de Euler para  $K$ ,

$$\chi(K) = \alpha_0(K) - \alpha_1(K) + \alpha_2(K).$$

Por hipótesis, el número de símplices en  $K$  satisface  $3\alpha_2(K) \geq 2\alpha_1(K)$ . Una verificación inmediata muestra que esto implica

$$6\chi(K) \geq 6\alpha_0(K) - \alpha_0(K)(\alpha_0(K) - 1).$$

Si  $\chi(K) \leq 0$ , el entero positivo mínimo que cumple esta desigualdad es precisamente  $\rho(K)$  y por lo tanto  $\alpha_0(K) \geq \rho(K)$ . Resta demostrar que  $\alpha_0(K) \geq \rho(K)$  con  $\chi(K) = 1$  o  $\chi(K) = 2$ . Si  $\chi(K) = 1$ , las soluciones positivas mínimas para la desigualdad de arriba son  $a = 1$  y  $a = 6 = \rho(K)$ , pero  $a \neq 1$  pues  $\dim(K) = 2$ . Se deduce que  $\alpha_0(K) \geq \rho(K)$ . Si  $\chi(K) = 2$ , la desigualdad se cumple para todo entero positivo. Sin embargo, dado que toda arista de  $K$  es cara de al menos dos 2-símplices,  $K$  no puede tener 3 o menos vértices. Luego,  $\alpha_0(K) \geq 4 = \rho(K)$ .  $\square$

A grandes trazos, el lema previo asegura que si  $K$  es un complejo de dimensión 2 homológicamente equivalente a una superficie  $S$  con una triangulación al menos igual de *densa* que una superficie, entonces  $\alpha_0(K) \geq \rho(K) = \rho(S)$ . Sistematizamos el uso del anillo de cohomología de superficies por Karoubi y Weibel para obtener cotas inferiores para el covering type (notar que el anillo de cohomología de un espacio también es explotado en el contexto de la categoría L-S, ver Lema 1.1.3). En concreto, identificamos un análogo puramente cohomológico a la propiedad combinatoria de un complejo simplicial de poseer una triangulación *densa*.

**Definición 2.3.2.** Sea  $X$  un espacio topológico. Decimos que el anillo de cohomología  $H^*(X, \mathbb{Z}_2)$  satisface la *propiedad (A)* si para toda clase  $\alpha$  no trivial en  $H^1(K, \mathbb{Z}_2)$ , existe  $\beta \in H^1(K, \mathbb{Z}_2)$  tal que  $\alpha \cup \beta$  no es trivial en  $H^2(K, \mathbb{Z}_2)$ .

En lo que sigue, trabajaremos con (co)homología reducida y el anillo de coeficientes para los grupos de (co)homología será  $\mathbb{Z}_2$ . La justificación de esta elección reside en que permite tratar a la vez los casos orientable y no orientable.

**Observación 2.3.3.** Notemos que, por la Dualidad de Poincaré, el anillo de cohomología  $H^*(S, \mathbb{Z}_2)$  de toda superficie cerrada  $S$  (ya sea orientable o no) satisface la propiedad (A).

En el siguiente resultado, explicitamos nuestra afirmación previa según la cual la propiedad (A) constituye un análogo cohomológico de la propiedad de ser densamente triangulado.

**Lema 2.3.4.** *Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión 2 y supongamos que  $H^*(K, \mathbb{Z}_2)$  satisface la propiedad (A) de la Definición 2.3.2. Si  $\chi(K) \leq 2$ , entonces  $K$  tiene al menos  $\rho(K)$  vértices.*

*Demostración.* Colapsemos todas las caras libres de  $K$  para obtener un subcomplejo  $L$  sin caras libres. Si cada arista de  $L$  incide en algún 2-símplex, el Lema 2.3.1 aplica y la demostración queda completa.

Tratamos entonces el caso en el que  $L$  tiene aristas maximales, es decir, existe al menos un 1-símplex que no es cara de ningún 2-símplex de  $L$ . Mostraremos que siempre es posible reemplazar  $L$  por un complejo simplicial homotópicamente equivalente con menos vértices y menos aristas maximales. Sea  $e = \{a, b\}$  una arista maximal. Supongamos que existe un camino simple  $P$  que conecta  $a$  con  $b$  en  $L \setminus e$  (el complejo simplicial que se obtiene de remover la arista  $e$  de  $L$ ). Consideremos el cociente  $L/P$ , que es homotópicamente equivalente a un wedge de la forma  $T \vee S^1$ , donde la esfera  $S^1$  es la imagen en el cociente de la arista  $e$ . Como por otro lado  $L/P$  es homotópicamente equivalente a  $L$ , tenemos que  $L \simeq T \vee S^1$ . El anillo de cohomología de  $T \vee S^1$  es isomorfo al producto  $H^*(T, \mathbb{Z}_2) \times H^*(S^1, \mathbb{Z}_2)$  (aquí el producto está tomado en la categoría de álgebras graduadas, con las operaciones definidas coordenada a coordenada), y por lo tanto no satisface la propiedad (A). Concretamente, para cada elemento no trivial  $\gamma \in H^1(S^1, \mathbb{Z}_2)$ , la clase  $\alpha = (0, \gamma) \in H^1(T \vee S^1, \mathbb{Z}_2)$  no satisface los requerimientos de la propiedad (A). Como el anillo de cohomología  $H^*(L, \mathbb{Z}_2)$  satisface la propiedad (A), esto es una contradicción y por lo tanto, no puede haber un camino entre  $a$  y  $b$  en  $L \setminus e$ .

Luego, el espacio cociente  $L/e$  tiene una estructura simplicial natural y es homotópicamente equivalente a  $L$ . Así, si reemplazamos  $L$  por  $L/e$  obtenemos un complejo simplicial homotópicamente equivalente a  $K$  con un vértice menos y menos aristas maximales que  $L$ . Iterando este procedimiento llegamos a un complejo simplicial  $\hat{K}$  de dimensión 2 homotópicamente equivalente a  $K$  que no tiene más vértices que  $K$  y tal que cada arista de  $\hat{K}$  pertenece a al menos dos 2-símplices. Por el Lema 2.3.1 aplicado a  $\hat{K}$ , deducimos que  $\hat{K}$ , y en consecuencia  $K$ , tiene al menos  $\rho(K)$  vértices.  $\square$

En particular, como corolario del Lema 2.3.4 vemos que las triangulaciones mínimas de las superficies cerradas no excepcionales  $S$  optimizan el número de vértices entre los complejos de dimensión 2 del tipo homotópico de  $S$  (o, más generalmente, entre aquellos cuya homología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  es isomorfa a la de  $S$ ). Precisaremos un argumento de naturaleza diferente para extender esta conclusión al caso general.

Supongamos que  $K$  es un complejo simplicial, no necesariamente de dimensión 2, del tipo homotópico de una superficie cerrada  $S$ . Nos proponemos comparar  $K$  con su 2-esqueleto  $K^{(2)}$  para reducir de alguna manera el problema general al caso de dimensión 2. Obviamente, la inclusión  $K^{(2)} \hookrightarrow K$  induce un isomorfismo para  $n < 2$  pero en general es solo un epimorfismo para  $n = 2$ . Luego, informalmente, para obtener un complejo con homología isomorfa a la homología de  $S$ , necesitamos destruir las clases de homología “extra” en  $K^{(2)}$ . Para lograrlo, desarrollaremos un método de simplificación homológica controlado por la propiedad (A) para hallar un subcomplejo

$Z \leq K^{(2)}$  con la (co)homología de  $S$ , que consiste en quitar ciertos 2-símplices de  $K^{(2)}$  cuidadosamente elegidos. Es importante remarcar en este punto que no alcanza con simplemente remover algunos de los 2-símplices de  $K^{(2)}$  para destruir clases de homología hasta que solo quede una. Es preciso también garantizar que la triangulación del subcomplejo resultante en cada paso sea suficientemente densa, es decir, que en cada etapa de la simplificación los subcomplejos satisfagan la propiedad (A). El próximo lema describe de qué manera la propiedad (A) desciende a subcomplejos y es la clave para controlar el proceso de simplificación homológica.

**Lema 2.3.5.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $L \leq K$  un subcomplejo tal que la inclusión  $i : L \hookrightarrow K$  induce isomorfismos  $i_* : H_n(L, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(K, \mathbb{Z}_2)$  para  $n < 2$  y un epimorfismo para  $n = 2$ . Si el anillo de cohomología  $H^*(K, \mathbb{Z}_2)$  cumple la propiedad (A), entonces el anillo de cohomología  $H^*(L, \mathbb{Z}_2)$  también cumple la propiedad (A).*

*Demostración.* Identificamos  $H^n(K, \mathbb{Z}_2)$  con  $\text{Hom}(H_n(K), \mathbb{Z}_2)$  por el teorema de coeficientes universales para cohomología. Por hipótesis,  $H^*(K, \mathbb{Z}_2)$  satisface la propiedad (A) y  $i^* : H^n(K, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^n(L, \mathbb{Z}_2)$  es un isomorfismo para  $n < 2$  y un monomorfismo para  $n = 2$ . La afirmación se concluye por la naturalidad del producto cup.  $\square$

Dado un complejo simplicial  $K$ , denotamos por  $(C_*(K, \mathbb{Z}_2), d_*)$  su complejo de cadenas simplicial con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$ . Si  $L \leq K$  es un subcomplejo, notamos por  $\dim H_2(L, \mathbb{Z}_2)$  a la dimensión de  $H_2(L, \mathbb{Z}_2)$  como un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Z}_2$ .

**Proposición 2.3.6.** *Sea  $K$  un complejo simplicial y sea  $L \leq K^{(2)}$  un subcomplejo. Supongamos que  $H^*(K, \mathbb{Z}_2)$  tiene la propiedad (A) y que la inclusión  $L \hookrightarrow K$  induce isomorfismos  $i_* : H_n(L, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(K, \mathbb{Z}_2)$  para  $n < 2$  y un epimorfismo para  $n = 2$ . Si  $\dim H_2(L, \mathbb{Z}_2) > \dim H_2(K, \mathbb{Z}_2)$ , hay un 2-símplex  $\sigma \in L$  tal que la inclusión  $j : L \setminus \sigma \hookrightarrow K$  también induce isomorfismos  $j_* : H_n(L \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(K, \mathbb{Z}_2)$  para  $n < 2$  y un epimorfismo para  $n = 2$ . Además,  $\dim H_2(L \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) = \dim H_2(L, \mathbb{Z}_2) - 1$ .*

*Demostración.* Como por hipótesis  $\dim H_2(L, \mathbb{Z}_2) > \dim H_2(K, \mathbb{Z}_2)$  existe una clase no trivial  $B$  en el núcleo de la aplicación inducida por la inclusión  $i_* : H_2(L, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(K, \mathbb{Z}_2)$ . Sea  $\sigma$  un 2-símplex de  $L$  en el soporte de  $B$ . El borde topológico  $\partial\sigma$  considerado como una cadena en  $C_1(L \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2)$  es el borde de la 2-cadena  $B - \sigma$ . Luego, la inclusión induce el morfismo trivial  $H_1(\partial\sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(L \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2)$ . Se sigue que la inclusión  $L \setminus \sigma \hookrightarrow L$  induce isomorfismos  $H_n(L \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(L, \mathbb{Z}_2)$  para  $n < 2$ . Resta verificar la sobreyectividad de la aplicación  $j_* : H_2(L \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(K, \mathbb{Z}_2)$ , donde  $j$  es la inclusión  $j : L \setminus \sigma \hookrightarrow K$ . Sea  $[Z]$  una clase en  $H_2(K, \mathbb{Z}_2)$ . Por hipótesis, existe una cierta clase  $C \in H_2(L, \mathbb{Z}_2)$  tal que  $i_*[C] = [Z]$ . Si  $\sigma$  no pertenece al soporte de  $C$ , considerándola como una clase en  $H_2(L \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2)$  tenemos que  $j_*[C] = [Z]$ . En el caso opuesto, consideremos la 2-cadena  $C + B$ . Dado que los coeficientes están tomados en  $\mathbb{Z}_2$ , esta cadena es una 2-ciclo bien definido en  $L \setminus \sigma$  y  $j_*[C + B] = i_*[C] + i_*[B] = i_*[C] = [Z]$ . Por lo tanto, en cualquier caso  $j_* : H_2(L \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(K, \mathbb{Z}_2)$  es un epimorfismo. El hecho de que  $\dim H_2(L \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) = \dim H_2(L, \mathbb{Z}_2) - 1$  se concluye inmediatamente de la fórmula de la característica de Euler, pues  $\chi(L \setminus \sigma) = \chi(L) - 1$ .  $\square$

Ahora, dado un complejo simplicial  $K$  homotópicamente equivalente a una superficie cerrada  $S$ , su 2-esqueleto  $K^{(2)}$  cumple la propiedad (A) por el Lema 2.3.5. Luego, aplicando iterativamente la Proposición 2.3.6 a  $L = K^{(2)}$ , llegamos a un subcomplejo  $T \leq K^{(2)}$  tal que la inclusión

$i : T \hookrightarrow K$  induce un isomorfismo en todos los grupos de homología (notar que aquí usamos implícitamente el hecho de que  $K$  es finito). De esta manera, queda completa la reducción del caso general a dimensión 2.

**Teorema 2.3.7.** *Sea  $K$  un complejo simplicial homotópicamente equivalente a una superficie  $S$ . Entonces,  $K$  tiene al menos  $\rho(S)$  vértices. En particular, si  $S \neq M_2, N_2, N_3$  entonces es  $\text{ct}(S) = \lambda(S)$ .*

*Demostración.* Por la Proposición 2.3.6 y el párrafo que le sigue, existe un subcomplejo  $T \leq K^{(2)}$  con  $\chi(T) = \chi(S)$  y tal que su anillo de cohomología cumple la propiedad (A). Dado que el número de vértices de  $T$  es menor o igual que el número de vértices en  $K$ , por el Lema 2.3.4  $K$  tiene al menos  $\rho(S)$  vértices.  $\square$

Llevaremos a cabo el cómputo del covering type de las superficies excepcionales en la próxima sección, puesto que requiere una gama diferente de herramientas.

## 2.4. El covering type de superficies: los casos excepcionales

En esta sección analizamos el covering type de las superficies excepcionales  $M_2, N_2$  y  $N_3$ . Por el Teorema 2.3.7, para  $S = M_2, N_2, N_3$  el valor del covering type de  $S$  está entre  $\lambda(S) - 1$  y  $\lambda(S)$ . Completamos el cómputo de sus covering types mostrando que  $\text{ct}(N_2) = \lambda(N_2)$ ,  $\text{ct}(N_3) = \lambda(N_3)$  y exhibiendo un complejo simplicial del tipo homotópico de  $M_2$  con  $\lambda(M_2) - 1$  vértices.

Para ganar una intuición de las dificultades que presentan estos casos, tomemos  $S$  como una de las tres superficies excepcionales y supongamos que  $K$  es un complejo simplicial homotópicamente equivalente a  $S$  que realiza el covering type, es decir, tal que  $K$  tiene  $\text{ct}(S)$  vértices. Aplicando el Teorema 2.3.7 y la Proposición 2.3.6, obtenemos un subcomplejo  $L$  de  $K$  de dimensión 2 con la (co)homología de  $S$  (y así, su anillo de cohomología satisface la propiedad (A)) con al menos  $\rho(S) = \lambda(S) - 1$  vértices. Nos gustaría descubrir si es posible que  $L$  tenga menos de  $\lambda(S)$  vértices. Para lograrlo, analizamos la interacción del número de vértices de  $L$  con su número de aristas y 2-símplices. En primer lugar, colapsando las caras libres de  $L$  y procediendo como en el Corolario 2.3.4 podemos asumir además que cada arista de  $L$  incide en al menos dos 2-símplices. Como antes, esto implica que  $3\alpha_2(L) \geq 2\alpha_1(L)$  y por la fórmula de la característica de Euler para  $L$  tenemos la desigualdad

$$3(\alpha_0(L) - \chi(S)) \leq \alpha_1(L).$$

Pongamos algunos números concretos en esta desigualdad. Por ejemplo, si  $S = N_2$  y  $L$  tiene  $7 = \lambda(S) - 1$  vértices, obtenemos la desigualdad  $\alpha_1(L) \geq 21$  usando que  $\chi(N_2) = 0$ . Como por otro lado  $\alpha_1(L) \leq \binom{\alpha_0(L)}{2} = 21$ , resulta que el número de aristas y 2-símplices está completamente determinado: se deduce que  $\alpha_1(L) = 21$  y  $\alpha_2(L) = 14$  respectivamente. Observemos que  $3\alpha_2(L) = 2\alpha_1(L)$  en este caso, lo que implica que cada arista de  $L$  es cara de *exactamente* dos 2-símplices. Repitiendo el experimento para  $S = N_3$ , concluimos que  $\alpha_1(L)$  está entre 27 y 28. Si procedemos a analizar el caso en que  $\alpha_1(L) = 27$ , encontramos de forma análoga al ejemplo anterior que  $3\alpha_2(L) = 2\alpha_1(L)$  y por lo tanto, que cada arista de  $L$  pertenece a exactamente dos 2-símplices. Intuitivamente, dado que esta es una de las principales condiciones que cumplen las triangulaciones de las superficies cerradas, estos complejos deberían estar cerca de ser superficies. Formalizamos esta intuición en el próximo resultado, que ayuda a tratar algunos de los casos que surgen en el análisis de los casos excepcionales.

Antes de enunciar el resultado, recordamos algunas definiciones. Un complejo simplicial  $K$  de dimensión 2 es *fuertemente conexo* si para cada par de 2-símplices  $\sigma, \tau \in K$  (con  $\sigma \neq \tau$ ) existe una sucesión finita de 2-símplices  $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r = \tau$  tal que para cada  $i$ ,  $\sigma_i$  y  $\sigma_{i+1}$  interseca en una arista. Decimos que  $K$  es una *pseudosuperficie* (sin borde) si  $K$  es fuertemente conexo y cada una de sus aristas es la cara de exactamente dos 2-símplices.

**Proposición 2.4.1.** *Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión 2 tal que cada arista de  $K$  es la cara de exactamente dos 2-símplices y sea  $S$  una superficie cerrada. Supongamos que existe una función continua  $K \rightarrow S$  que induce isomorfismo en todos los grupos de homología. Entonces  $K$  es homeomorfo a  $S$ .*

*Demostración.* Cada componente fuertemente conexa  $C$  de  $K$  es una pseudosuperficie sin borde, de manera que  $H^2(C, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ . Como dos componentes fuertemente conexas distintas pueden intersecar solo en vértices, la dimensión del espacio vectorial  $H^2(K, \mathbb{Z}_2)$  coincide con el número de componentes fuertemente conexas de  $K$ . Por lo tanto,  $K$  es fuertemente conexo y por lo tanto, una pseudosuperficie. Mostramos a continuación que  $K$  es de hecho una superficie. Como  $K$  es una pseudosuperficie, solo los vértices de  $K$  pueden ser puntos singulares (es decir, tener entornos en  $K$  que no son homeomorfos a un disco). Dado que cada arista de  $K$  es cara de exactamente dos 2-símplices, el link de todo vértice es un grafo 2-regular y por lo tanto, homeomorfo a una unión disjunta de cierta cantidad de copias de  $S^1$ .

Supongamos que hay un vértice  $v$  de  $K$  cuyo link tiene  $m > 1$  componentes conexas. Afirmamos que en este caso  $K$  es homotópicamente equivalente a un wedge de un cierto 2-complejo  $L$  con  $m - 1$  esferas de dimensión 1. Para ver esto, consideremos el star  $\text{st}_K(v)$  de  $v$ . Notemos que  $\text{st}_K(v)$  es un wedge basado en  $v$  de  $m$  subcomplejos  $K_0, \dots, K_{m-1} \leq \text{st}_K(v)$ . Tomemos un grafo con forma de estrella  $T$  con  $m - 1$  hojas, es decir, un complejo simplicial 1-dimensional simplicial formado por un vértice raíz  $w_0$  y  $m - 1$  vértices  $w_1, \dots, w_{m-1}$  con una arista que conecta  $w_0$  a cada  $w_i$ , para  $i \geq 1$ . Notemos que  $\text{st}_K(v)$  es homotópicamente equivalente a un complejo  $N$  que se obtiene a partir del grafo  $T$  adjuntando cada  $K_i$  a  $T$  por el vértice  $w_i$ , pues colapsando el árbol  $T$  a un punto obtenemos  $\text{st}_K(v)$ . Construimos un complejo  $K'$  reemplazando en  $K$  al subcomplejo  $\text{st}_K(v)$  por  $N$  de la forma natural. Ahora, dado que  $K$  es fuertemente conexo, hay un camino en  $K' \setminus T$  que conecta  $w_0$  a cada  $w_i$ . Se deduce que para cada arista entre  $w_0$  y  $w_i$  la función de adjunción  $\phi_i : S^0 \rightarrow K'$  de la arista (que toma los valores  $w_0$  y  $w_i$ ) es homotópico a la aplicación constante  $c_{w_0} : S^0 \rightarrow K'$ , y luego  $K' \simeq L \vee_{i=1}^{m-1} S^1$  donde  $L$  es el subcomplejo  $K' \setminus T$  de  $K'$ . Puesto que la función  $f : K \rightarrow S$  induce un isomorfismo en cohomología,  $H^*(K, \mathbb{Z}_2)$  satisface la propiedad (A). De manera similar a la demostración del Lema 2.3.4, el anillo de cohomología de  $H^*(L \vee_{i=1}^{m-1} S^1, \mathbb{Z}_2)$  es isomorfo al anillo producto  $H^*(L, \mathbb{Z}_2) \times \prod_{i=1}^{m-1} H^*(S^1, \mathbb{Z}_2)$  y por lo tanto no cumple la propiedad (A). Se sigue que el link de cada vértice de  $K$  es homeomorfo a solo una copia de  $S^1$ , lo que implica que  $K$  es una superficie. Por el teorema de clasificación de las superficies cerradas,  $K$  es homeomorfo a  $S$ .  $\square$

Estamos listos ahora para calcular el covering type de  $N_2$  y  $N_3$ .

**Proposición 2.4.2.** *Sea  $S = N_2$  o  $N_3$ . Entonces  $\text{ct}(S) = \lambda(S)$ .*

*Demostración.* Sea  $K$  un complejo simplicial en  $\text{ct}(S)$  vértices tal que hay una equivalencia homotópica  $f : K \rightarrow S$ . Como describimos en la digresión que abre esta sección, hay un subcomplejo  $L \leq K^{(2)}$  tal que la aplicación  $L \hookrightarrow K \xrightarrow{f} S$  induce un isomorfismo en homología y

tal que cada arista de  $L$  es cara de al menos dos 2-símplices. Recordemos que esto implica que  $3\alpha_2(L) \geq 2\alpha_1(L)$  y por la fórmula de la característica de Euler para  $L$  tenemos

$$3(\alpha_0(L) - \chi(S)) \leq \alpha_1(L) \leq \binom{\alpha_0(L)}{2}.$$

Para  $S = N_2$ , si fuera  $\alpha_0(L) = 7 = \lambda(N_2) - 1$ , como ya vimos implicaría  $\alpha_1(L) = 21$  y  $\alpha_2(L) = 14$ . Luego,  $3\alpha_2(L)$  coincidiría con  $2\alpha_1(L)$ , lo que significa que cada arista de  $L$  es cara de exactamente dos 2-símplices. Entonces, por Proposición 2.4.1  $L$  es homeomorfo a  $N_2$ , lo que contradice el Teorema 2.1.1. Luego,  $\text{ct}(N_2) = 8$ .

Consideremos ahora el caso  $S = N_3$ . Si  $L$  tiene  $\lambda(N_3) - 1 = 8$  vértices, usando que  $\chi(N_3) = -1$  combinado con la desigualdad arriba lleva a que  $\alpha_1(L) = 27$  o  $\alpha_1(L) = 28$ . Como antes, si  $\alpha_1(L) = 27$ ,  $L$  sería homeomorfo a  $N_3$  y esto es imposible por el Teorema 2.1.1. Si  $\alpha_1(L) = 28$ , dado que  $\chi(N_3) = -1$ , es  $\alpha_2(L) = 19$ . Como  $3\alpha_2(L) = 2\alpha_1(L) + 1$  en este caso, cada arista de  $L$  es cara de dos 2-símplices con la excepción de una arista que está contenida en tres 2-símplices. Sea  $v \in L$  un vértice de esta arista. El link de  $v$  es un grafo en el cual exactamente un vértice tiene grado 3 y todos los demás tienen grado 2. Como la suma de los grados de los vértices de un grafo no dirigido es par, esto es una contradicción. Luego,  $\text{ct}(N_3) = \lambda(N_3) = 9$  y la demostración queda completa.  $\square$

Al repetir este análisis para el toro doble  $S = M_2$  aparecen más subcasos. Manteniendo las notaciones de la Proposición 2.4.2, si  $\alpha_0(L) = \lambda(M_2) - 1 = 9$ , tendríamos que  $L$  tiene entre 33 y 36 aristas y, correspondientemente, entre 22 y 25 2-símplices. Algunos de estos casos pueden ser tratados en la misma manera que la demostración de la Proposición 2.4.2. Por ejemplo, si  $\alpha_1(L) = 33$ ,  $L$  tiene 22 2-símplices y luego toda arista de  $L$  está en exactamente dos 2-símplices lo que contradice el Teorema de Jungerman y Ringel 2.1.1 en vista de la Proposición 2.4.1, mientras que el subcaso  $\alpha_1(L) = 34$  se descarta por un argumento de paridad. Sin embargo, tras dedicar un esfuerzo considerable a tratar de probar que es imposible construir un complejo simplicial que satisfice las hipótesis en todo otro subcaso, empezamos a considerar la posibilidad de que  $M_2$  fuera excepcional también con respecto al covering type. Para nuestra sorpresa, no era muy difícil construir un complejo simplicial con  $\lambda(M_2) - 1 = 9$  vértices homotópicamente equivalente a  $M_2$ , partiendo de una triangulación mínima de  $M_2$  descrita en [58]. En lo que sigue, damos una construcción rigurosa de un tal ejemplo, que ilustramos en la Figura 2.1 y describimos en el siguiente resultado.

**Lema 2.4.3.** *Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión 2. Supongamos que existen dos vértices  $v, v' \in K$  que no están conectados por una arista y con links disjuntos. Supongamos además que hay vértices  $w \in \text{lk}_K(v)$ ,  $w' \in \text{lk}_K(v')$  conectados por una arista en  $K$ . Formemos el complejo cociente  $L$  identificando  $v$  y  $v'$  en un vértice  $[v]$ , y adjuntemos un 2-símplex  $\sigma = \{[v], w, w'\}$  a  $L$  obteniendo un complejo  $K'$ . Entonces  $K'$  es un complejo simplicial homotópicamente equivalente a  $K$ .*

*Demostración.* En primer lugar, notemos que el complejo cociente  $L = K/(v \sim v')$  hereda una estructura simplicial. Como  $v$  y  $v'$  no forman una arista en  $K$ , las aristas del 1-esqueleto de  $L$  conectan distintos vértices.

Además, como los links de  $v$  y  $v'$  son disjuntos en  $K$ , hay a lo sumo una arista entre dos vértices dados en el 1-esqueleto de  $L$ . Finalmente, como  $L$  se obtiene de  $K$  identificando un par

de vértices con links disjuntos, los 2-símplices de  $L$  pueden intersecar solo en un vértice o en una arista. Consideremos ahora el CW-complejo  $M$  obtenido a partir de  $K$  adjuntando una arista entre vértices  $v$  y  $v'$  y un cuadrado (2-celda) con vértices  $v, v', w$  y  $w'$ . Notemos que dado que  $K$  es un retracto por deformación de  $M$  y la inclusión  $M \hookrightarrow K'$  es un colapso de aristas,  $M$  es homotópicamente equivalente tanto a  $K$  como a  $K'$ . Esto muestra que  $K$  es homotópicamente equivalente a  $K'$ .  $\square$

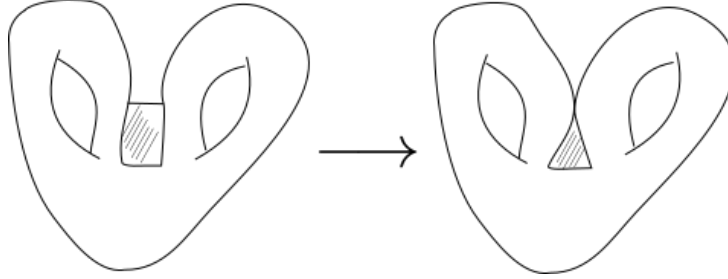


Figura 2.1: Ilustración de la construcción del Lema 2.4.3.

**Proposición 2.4.4.** *Existe un complejo simplicial de dimensión 2 con 9 vértices homotópicamente equivalente a  $M_2$ . En particular,  $\text{ct}(M_2) = \rho(M_2) = 9$ .*

*Demostración.* Consideremos el complejo simplicial  $K$  que realiza la triangulación mínima de  $M_2$  descrita en [58] (ver también [61]). El 1-esqueleto del complejo simplicial  $K$  es un grafo con 10 vértices tal que:

- Hay dos vértices  $v, v'$  de grado 4 que no forman una arista con links disjuntos.
- El subgrafo inducido por los restantes 8 vértices es el grafo completo  $K_8$ .

Elijamos vértices  $w \in \text{lk}_K(v)$ ,  $w' \in \text{lk}_K(v')$ . Por el Lema 2.4.3, el complejo simplicial  $K/(v \sim v') \cup \{[v], w, w'\}$  es homotópicamente equivalente a  $K$  y luego a  $M_2$ .  $\square$

Recolectamos los resultados obtenidos hasta ahora en el teorema siguiente.

**Teorema 2.4.5.** *El covering type de toda superficie cerrada  $S$  coincide con el número de vértices en una triangulación mínima de  $S$  con la excepción de  $M_2$ , en cuyo caso es uno menos que el número de vértices en una triangulación mínima.*

*Demostración.* Se deduce del Teorema 2.3.7 (para los casos  $S \neq M_2, N_2, N_3$ ), la Proposición 2.4.2 (en los casos  $S = N_2$  y  $S = N_3$ ) y la Proposición 2.4.4 (caso  $S = M_2$ ). Concretamente,  $\text{ct}(S) = \lambda(S)$  para los casos no excepcionales,  $\text{ct}(M_2) = 9$ ,  $\text{ct}(N_2) = 8$  y  $\text{ct}(N_3) = 9$ .  $\square$

Notemos que, de hecho,  $\text{ct}(S) = \rho(S)$  en todos los casos incluyendo  $M_2$  (donde tenemos  $\text{ct}(M_2) = \rho(M_2) = 9$  pero  $\lambda(M_2) = 10$ ), excepto  $N_2$  ( $\text{ct}(N_2) = \lambda(N_2) = 8$  pero  $\rho(N_2) = 7$ ) y  $N_3$  ( $\text{ct}(N_3) = \lambda(N_3) = 9$  pero  $\rho(N_3) = 8$ ).



## Capítulo 3

# Geometría sistólica

El *sístole* de un espacio métrico  $X$  es la mínima longitud de un lazo no contráctil en  $X$ . La geometría sistólica se dedica al estudio del sístole y sus múltiples y sorprendentes interacciones con la geometría y la topología global del espacio subyacente. Tales conexiones a menudo vienen en forma de desigualdades que vinculan el sístole con medidas geométricas del tamaño (notablemente, el volumen y el diámetro) o incluso invariantes puramente homológicos como los números de Betti. El trabajo en esta área puede ser visto como parte de un ciclo más amplio de resultados, conceptos e ideas que laxamente apuntan a relacionar la complejidad de la topología de un espacio con medidas gruesas de su tamaño provenientes de la geometría, tales como el volumen, el diámetro o el filling radius, incluyendo desigualdades independientes de la curvatura. Como un ejemplo paradigmático traemos a colación el teorema de finitud de Cheeger [28], que afirma que para números positivos reales dados  $v$ ,  $D$ ,  $\kappa$ , hay a lo sumo finitos tipos de difeomorfismo de variedades riemannianas cerradas de dimensión  $n$  con volumen acotado inferiormente por  $v$ , diámetro acotado superiormente por  $D$  y curvatura seccional entre  $-\kappa$  y  $\kappa$ . Así, el sístole de un espacio puede ser pensado como un invariante de naturaleza mixta, en el sentido que detecta de forma geométrica una manifestación de la topología no trivial subyacente.

El concepto de sístole hizo su primera aparición en la geometría riemanniana en un resultado inédito de Loewner del 1949. Loewner mostró que el cuadrado del sístole de un toro riemanniano (para *cualquier* métrica riemanniana suave) acota por abajo el área multiplicada por una constante óptima. Utilizando esencialmente las mismas técnicas, esta desigualdad fue extendida al plano proyectivo por su alumno Pu [73] y más tarde, a todas las superficies cerradas orientables y no simplemente conexas a principios de los sesenta en los trabajos independientes de Accola [2] y Blatter [14] (incluimos abajo una demostración detallada de la desigualdad de Pu en el Teorema 3.2.1). Estos resultados revelaron una profunda conexión entre el tamaño geométrico de una superficie (el área) y su sístole, que, como destacamos, depende tanto de la geometría como de la topología.

Durante muchos años, las desigualdades sistólicas permanecieron confinadas al reino de las superficies. Las demostraciones de todos los resultados mencionados dependen del teorema de uniformización, y por lo tanto no se pueden extender directamente a dimensiones más altas. En el artículo de 1983 *Filling Riemannian manifolds* Gromov superó estas dificultades y estableció una desigualdad sistólica para variedades cerradas de dimensión arbitraria que cumplen una cierta condición de índole puramente topológica. Las pruebas y los resultados de dicho artículo clarificaron significativamente el panorama de los fenómenos sistólicos. Uno de los puntos más

---

relevantes consistió en la identificación por parte de Gromov del sustrato topológico subyacente a las desigualdades sistólicas, así como haber relacionado estas desigualdades con generalizaciones de la desigualdad isoperimétrica clásica de Federer-Fleming. Aparte, en el curso de la demostración Gromov inventó nuevos e interesantes invariantes métricos para variedades riemannianas, los cuales utilizó como cantidades intermedias para comparar el sístole y el volumen de las variedades.

A partir del artículo de Gromov, el *volumen sistólico* de una variedad, o más generalmente, de un poliedro, se transformó en uno de los objetos centrales de estudio de la geometría sistólica. El volumen sistólico  $\sigma(X)$  de un poliedro  $X$  de dimensión  $n$  se define, siguiendo a Gromov como

$$\sigma(X) := \inf_g \frac{\text{Vol}(X, g)}{\text{sis}(X, g)^n},$$

donde el ínfimo es sobre las métricas riemannianas suaves a trozos sobre  $X$ . Este invariante topológico de un espacio  $X$  identifica métricas riemannianas óptimas sobre  $X$ , en el sentido que mide la cantidad de volumen necesaria para construir a  $X$ , normalizado por la condición de que el sístole sea igual a 1. El exponente en el sístole garantiza que el volumen sistólico sea invariante por reescalar la métrica. En este lenguaje, la forma más general de la desigualdad de Gromov se lee como la cota inferior

$$\sigma(X) \geq C_n$$

para un poliedro *esencial*  $X$  de dimensión  $n$ , donde  $C_n$  es una constante positiva que depende únicamente de la dimensión. De esta manera, el volumen sistólico es no trivial (o sea, estrictamente positivo) para una clase considerable de espacios. Para tales espacios, un problema natural consiste en encontrar el valor del volumen sistólico, junto con las métricas óptimas. Esto permitiría en cierto punto ordenar los espacios según una medida numérica de su complejidad, pero lo que es aun más importante, ayudaría a identificar modelos geométricos óptimos para ciertos espacios topológicos. Destacamos que, sin embargo, este problema es muy complejo, a tal punto que solo se conoce el valor exacto del volumen sistólico para tres variedades esenciales, y todas ellas son de dimensión 2. Una meta más alcanzable es estimar el volumen sistólico al menos para algunas clases de espacios. Avances en esta dirección también traen aparejadas consecuencias interesantes. Por ejemplo, retomando el caso de las superficies, el crecimiento asintótico del funcional  $\sigma$  con respecto al género de la superficie fue determinado por los trabajos de Gromov [44] y Buser y Sarnak [27]. Como consecuencia, ciertas superficies aritméticas (que son en particular hiperbólicas desde el punto de vista de la geometría riemanniana) construidas por Buser y Sarnak en el trabajo citado son gruesamente óptimas con respecto al volumen sistólico.

Otra clase de espacios que nos resulta de especial interés es la de poliedros de dimensión 2. La razón para este interés es la correspondencia clásica entre los tipos homotópicos de 2-poliedros (compactos) y presentaciones (finitas) de grupos. A través de esta correspondencia, dada por el funtor grupo fundamental en una dirección y el complejo de presentación en la otra (ver §1.4.1), es posible extender los invariantes sistólicos a grupos. Específicamente, para un grupo finitamente presentable  $G$ , el área sistólica  $\sigma(G)$  de  $G$ , introducida por Gromov en [46], se define como

$$\sigma(G) := \inf_{\pi_1(X)=G} \sigma(X),$$

donde el ínfimo es sobre las *triangulaciones*  $X$  de  $G$ , esto es, 2-poliedros cuyo grupo fundamental es isomorfo a  $G$ . Todo un nuevo abanico de problemas y preguntas se abre alrededor de este invariante. Principalmente, dichos problemas indagan sobre los modelos óptimos (triangulaciones)

de ciertos grupos. Por citar algunas que motivaron en parte nuestro trabajo: ¿Cuál es la relación exacta entre el área sistólica de grupos de superficie y el volumen sistólico de superficies (en otras palabras, son las superficies los modelos más eficientes de sus grupos fundamentales)? ¿Cuál es el comportamiento del área sistólica con respecto al producto libre de grupos? Esto es, ¿será el wedge canónico la manera óptima de construir un modelo topológico de un producto libre de grupos?

Abrimos este capítulo con un repaso histórico de algunos resultados fundamentales en geometría sistólica, el cual es concluido por una digresión sobre los argumentos involucrados en la demostración de la desigualdad sistólica de Gromov. La segunda sección está dedicada enteramente a la geometría sistólica en dimensión 2. Presentamos en ella algunas de las mejores cotas conocidas tanto para el área sistólica de superficies como de grupos. En la sección 3 mostramos una cota inferior universal para una amplia clase de grupos que incluye los grupos de superficie. Esta estimación surgió de nuestro esfuerzo por entender en mayor profundidad la relación entre el área sistólica de superficies y el área sistólica de sus grupos fundamentales. Obtenemos esta cota a través de la extensión de una desigualdad sistólica de Guth; también puede ser vista como una generalización de la desigualdad sistólica de Burago y Hebda para superficies a ciertos poliedros de dimensión 2.

En la última sección del capítulo estudiamos el área sistólica de un producto libre de grupos. Damos una construcción, basada en una similar debida a Stallings, que permite de alguna manera separar un poliedro cuyo grupo fundamental es isomorfo a un producto libre de dos grupos en dos subpoliedros, cada uno responsable, a grandes rasgos, por uno de los factores libres. Si bien no logramos establecer nuevas estimaciones para el área sistólica de un producto libre de grupos en términos del área sistólica de sus factores libres, debatimos una posible estrategia que utiliza esta construcción y pensamos que podría ser utilizada con ese fin.

### 3.1. Un panorama general en geometría sistólica

En esta sección nos proponemos hacer una introducción general a algunos de los conceptos y resultados fundamentales en geometría sistólica.

Como ya dijimos en la introducción del capítulo, el primer resultado en el área fue descubierto por Loewner, quien probó en 1949 el resultado siguiente.

**Teorema 3.1.1.** *Sea  $(\mathbb{T}^2, g)$  un 2-toro riemanniano. Entonces,*

$$\text{sis}(\mathbb{T}^2, g)^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Area}(\mathbb{T}^2, g).$$

*Además, la constante  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  es óptima y se alcanza en una métrica plana.*

La desigualdad de Loewner es interesante al menos por tres razones diferentes. En primer lugar, es válida para cualquier métrica riemanniana sobre el toro, lo que revela restricciones no triviales sobre las metrificaciones posibles del toro. En segundo lugar, es óptima, y por lo tanto identifica un punto crítico en el espacio de métricas riemannianas sobre el toro con respecto a cierto funcional. Por último, puede verse como una desigualdad isoperimétrica invertida, en el sentido de que muestra que una función del perímetro (longitud) del lazo no contráctil más corto acota por abajo el volumen del espacio.

A grandes rasgos, la demostración de la desigualdad de Loewner procede como sigue. Por el teorema de uniformización, un toro riemanniano dado  $(\mathbb{T}^2, g)$  es *conformemente* homeomorfo a un toro plano  $(\mathbb{T}^2, g_0)$ , esto es, existe una función positiva  $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $g = fg_0$ . El primer paso consiste en formar el promedio  $\bar{f}$  de  $f$  sobre el grupo de isometrías del toro plano  $(\mathbb{T}^2, g_0)$ , lo que produce una nueva métrica riemanniana  $\bar{f}g_0$ . La clave del argumento reside en que, como no es difícil de chequear, este proceso de promediar mejora (disminuye) la ratio

$$\frac{\text{Area}(\mathbb{T}^2, \bar{f}g_0)}{\text{sis}(\mathbb{T}^2, \bar{f}g_0)^2}$$

con respecto a la misma ratio pero calculada con la métrica riemanniana original  $g = fg_0$ . Por otro lado, como el grupo de isometrías de un toro plano es transitivo, el promedio  $\bar{f}$  es una función constante y por lo tanto la desigualdad de Loewner se reduce al caso plano, el cual puede ser resuelto a mano. Damos una prueba formal de la desigualdad sistólica óptima de Pu [73] para el plano proyectivo siguiendo estos lineamientos más abajo (ver Teorema 3.2.1).

Alrededor de una década más tarde, Accola [2] y Blatter [14], de forma independiente, generalizaron estas desigualdades a todas las superficies cerradas orientables (excepto la esfera), al mostrar la existencia de una constante no óptima  $C = C(\gamma) > 0$  tal que

$$\text{sis}(S, g)^2 \leq C(\gamma) \text{Area}(S, g),$$

para toda superficie  $S$  de género  $\gamma$ . Al principio de los setenta, Berger inició un estudio más sistemático del tema [13, 12], y formuló, entre otras cosas, dos problemas naturales sobre análogos de dimensión más grande de estas desigualdades, que involucraban tanto versiones de cualquier dimensión del concepto de sístole como la extensión de dichas desigualdades a variedades de dimensión arbitraria. En el artículo de 1983 *Filling Riemannian manifolds* [44] Gromov estableció una desigualdad sistólica para (ciertas) variedades de dimensión arbitraria a través de métodos nuevos y radicalmente distintos a las técnicas de geometría conforme que habían sido utilizadas en el área hasta el momento.

**Teorema 3.1.2.** (*Desigualdad sistólica de Gromov*) *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana esencial de dimensión  $n$ . Entonces, existe una constante universal  $C = C_n > 0$  que depende únicamente de la dimensión  $n$  tal que*

$$\text{sis}(M, g)^n \leq C_n \text{Vol}(M, g).$$

Discutimos en cierta profundidad la hipótesis de *esencialidad*. Uno de los descubrimientos claves de Gromov para demostrar su desigualdad sistólica fue notar el rol de esta condición puramente topológica en los fenómenos sistólicos. Una variedad cerrada  $M$  de dimensión  $n$  es *esencial* si la imagen de la clase fundamental  $[M]$  es no trivial por la aplicación canónica  $H_n(M) \rightarrow H_n(K(\pi_1(M), 1))$ , donde  $K(\pi_1(M), 1)$  es un espacio de Eilenberg-MacLane para  $\pi_1(M)$ . Entenderemos siempre que el anillo de coeficientes para los grupos de homología es  $\mathbb{Z}$  si la variedad es orientable y  $\mathbb{Z}_2$  en el caso opuesto. Las variedades esenciales pueden ser consideradas como una generalización de las variedades esféricas que incluye, entre otros, los espacios proyectivos reales  $\mathbb{R}P^n$  de cualquier dimensión y los espacios de lens. Desde algunos años antes de demostrar su desigualdad sistólica, Gromov era consciente de que para que una desigualdad así fuera válida para una variedad  $M$ , su topología de dimensión 1 debería detectar de alguna forma

la clase fundamental de  $M$ .<sup>1</sup> Explicaremos heurísticamente la aparición de la clase fundamental utilizando una analogía proveniente de la geometría hiperbólica.

El *volumen simplicial* (también llamada *norma de Gromov*) de una variedad cerrada, orientable  $M$  es un invariante homotópico introducido en [43] que mide cuán difícil es triangular la clase fundamental  $[M]$ . Concretamente, el volumen simplicial  $\|M\|$  de  $M$  es el ínfimo de

$$\|C\|_1 := \sum_i |a_i|,$$

tomado sobre todos los ciclos (singulares)  $C = \sum_i a_i \sigma_i$  en  $C_n(M, \mathbb{Z})$  que representan  $[M]$ . Gromov demostró que, para una variedad cerrada hiperbólica  $M$ , el volumen simplicial  $\|M\|$  es proporcional al volumen de las variedades (esto es un paso importante en la demostración de Gromov-Thurston del teorema de rigidez de Mostow). Para decirlo crudamente, el tamaño de la clase fundamental de una variedad riemanniana actúa como un avatar del volumen. A su vez, si la topología de dimensión 1 de una variedad  $M$  genera su clase fundamental, dado que a una escala menor que el sístole la topología 1-dimensional de  $M$  es trivial, uno puede especular que el sístole está controlado por el tamaño de  $[M]$ .

La demostración del Teorema 3.1.2 involucra un uso extensivo de técnicas provenientes de la Teoría Geométrica de la Medida, particularmente del área de desigualdades isoperimétricas. Más precisamente, Gromov creó un invariante métrico nuevo de las variedades riemannianas llamado *filling radius* que vincula la desigualdad sistólica con la generalización de la desigualdad isoperimétrica de Federer-Fleming. El filling radius es utilizado por Gromov como una cantidad intermedia entre el sístole y el volumen de una variedad. La demostración de la desigualdad sistólica de Gromov se obtiene como consecuencia de dos desigualdades, uno que involucra el sístole y el filling radius de una variedad riemanniana cerrada y esencial y una cota superior para el filling radius de una variedad en términos de su volumen.

Para motivar la definición del filling radius, consideremos una variedad cerrada de codimensión 1  $M$  de un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  (por ejemplo, podemos tomar  $M = S^{n-1}$ ). Entonces,  $M$  determina un *agujero interior*, esto es, la componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus M$ . Provisionalmente, definimos el filling radius como el radio más grande de una bola euclídea completamente contenida en el agujero interior de  $M$ . Por ejemplo, en el caso en que  $M$  es una esfera de radio  $R$ , este filling radius coincide con  $R$ . Para extender esta noción a una subvariedad  $M$  de codimensión general, se necesita una manera distinta de medir el radio del hoyo generado por  $M$ . Resulta que la herramienta técnicamente correcta para lograrlo es la homología. Concretamente, para una subvariedad  $M \subseteq \mathbb{R}^N$  de dimensión  $n < N$ , el filling radius (relativo)  $\text{FillRad}(M \subseteq \mathbb{R}^N)$  se define como el radio más pequeño  $r > 0$  para el cual la inclusión  $M$  es un *borde* en su  $r$ -entorno  $U_r(M)$ , es decir, tal que el morfismo inducido por la inclusión  $H_n(M) \rightarrow H_n(U_r(M))$  es trivial. Gromov transformó este invariante de una variedad riemanniana definido a priori extrínsecamente en uno intrínseco considerando el embedding isométrico (que preserva distancia) de Kuratowski en un espacio de Banach de dimensión infinita. Una variedad riemanniana cerrada  $M$  (o más generalmente, un espacio métrico compacto) admite un embedding isométrico canónico  $K$  en el espacio  $L^\infty(M)$  de funciones acotadas Borel  $M \rightarrow \mathbb{R}$  equipado con la norma supremo, que envía

---

<sup>1</sup>“... il faut, on le sent, que, comme dans le cas de  $T^2$ , ou  $\mathbb{R}P^2$ , l’homologie de dimension 1 de  $M$  engendre au sens anneau, toute la topologie de  $M$ , ou à tout le moins la classe fondamentale de  $M$ .” Extracto tomado de [42, p. 49].

un punto  $x \in M$  a la función distancia  $d_x : M \rightarrow \mathbb{R}$  de  $x$ . Ahora, el filling radius de una variedad cerrada riemanniana  $M$  es definida relativa al embedding, esto es,

$$\text{FillRad}(M) := \inf\{r > 0 : H_n(M) \rightarrow H_n(U_r(K(M))) \text{ es trivial}\},$$

Como antes, el anillo de coeficientes de los grupos de homología es tomado como  $\mathbb{Z}$  si la variedad es orientable y  $\mathbb{Z}_2$  en otro caso.

El resultado siguiente vincula el filling radius al sístole de una variedad esencial.

**Lema 3.1.3.** (*[44, Lemma 1.2.B]*) *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana cerrada de dimensión  $n$ . Entonces,  $\frac{1}{6} \text{sis}(M, g) \leq \text{FillRad}(M)$ .*

*Demostración.* Asumamos primero que  $M$  es esférica en lugar de solo esencial. Supongamos por contradicción que  $\text{FillRad}(M) < \frac{1}{6} \text{sis}(M, g)$ , así que hay una cadena  $C$  con soporte en  $U_R(K(M)) \subseteq L^\infty(M)$  cuyo borde es  $K(M)$  para algún  $R < \frac{1}{6} \text{sis}(M, g)$ . Triangulemos  $C$  de manera tal que  $K(M) = \partial C$  es un subpoliedro y cada simplex de la subdivisión tiene diámetro a lo sumo  $\delta$ , para algún  $\delta > 0$  pequeño a ser fijado más tarde. La estrategia de la demostración consiste en construir una aplicación  $f : C \rightarrow K(M)$  extendiendo la identidad  $K(M) \rightarrow K(M)$ , lo que lleva a una contradicción porque  $[M] \neq 0$  en  $H_n(M)$ . Puesto que  $M$  es esférica, necesitamos mostrar únicamente que la identidad se puede extender al 2-esqueleto de  $C$ . Procedemos, como es usual, esqueleto por esqueleto. Para un vértice  $v$  de  $C$  que no está en  $K(M)$ , definimos  $f(v)$  como cualquier punto  $x \in K(M)$  tal que  $d_\infty(v, x) < R$ . Si  $v$  y  $w$  forman una arista  $e$ , por el paso previo y la desigualdad triangular,  $d_\infty(f(v), f(w)) < 2R + \delta$ . Luego, existe un segmento geodésico en  $K(M)$  de longitud menor que  $2R + \delta$  que une  $f(v)$  a  $f(w)$ . Extendemos  $f$  a  $e$  enviando la arista de forma homeomorfa a este segmento. Ahora, si  $\sigma$  es un 2-simplex en  $C$ , el lazo  $f(\partial\sigma)$  tiene longitud menor a  $6R + 3\delta$  en  $K(M)$ . Como  $6R < \text{sis}(M, g)$ , podemos elegir un  $\delta > 0$  suficientemente pequeño para que valga  $6R + 3\delta < \text{sis}(M, g)$ . En ese caso, el lazo  $f(\partial\sigma)$  es null-homotópico en  $K(M)$  y luego podemos extender  $f$  a  $\sigma$  usando cualquier homotopía  $\sigma \rightarrow K(M)$  que contraiga  $f(\partial\sigma)$  a un punto. Las extensiones de  $f$  a los  $k$ -esqueletos de  $C$  para  $k > 2$  pueden ser llevadas a cabo de forma análoga, observando que dado que  $M$  es esférica, las restricciones de  $f$  al borde de un  $k$ -simplex son null-homotópicas.

Para el caso general, notemos que como  $M$  es una variedad esencial, la aplicación natural  $g$  de  $M$  a un espacio de Eilenberg-MacLane  $X = K(\pi_1(M), 1)$  induce una aplicación no trivial en homología  $H_n(M) \rightarrow H_n(X)$ . La estrategia de la demostración es completamente análoga al caso esférico, con la diferencia que en este caso tenemos que extender la aplicación  $K(M) \rightarrow X$  en lugar de la identidad  $K(M) \rightarrow K(M)$ . Más concretamente, si  $K(M) \subseteq L^\infty(M)$  es el borde de una  $n + 1$ -cadena  $C$  en un  $R$ -entorno para  $R < \frac{1}{6} \text{sis}(M, g)$ , es posible extender la aplicación  $g : K(M) \rightarrow X$  a  $f : C \rightarrow X$  esqueleto por esqueleto utilizando la técnica descrita más arriba. Esto contradice el hecho de que  $M$  es esencial, puesto que la aplicación no trivial  $H_n(M) \rightarrow H_n(X)$  factorizaría por la aplicación trivial  $H_n(M) \rightarrow H_n(C)$ .  $\square$

La segunda estimación necesaria es una cota superior para el filling radius de una variedad riemanniana por una función de su volumen. Interpretado en el lenguaje de Gromov, una desigualdad de estas características para subvariedades de espacios euclídeos es consecuencia de la desigualdad isoperimétrica clásica de Federer-Fleming [32].

**Teorema 3.1.4** (Federer y Fleming). *Sea  $M$  una subvariedad  $n$ -dimensional (o más generalmente, un  $n$ -ciclo) de un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^N$ . Entonces,  $\text{FillRad}(M \subseteq \mathbb{R}^N) \leq C_N \text{Vol}(M)^{\frac{1}{n}}$ , donde  $C_N > 0$  depende únicamente de la dimensión ambiente  $N$ .*

El primer obstáculo para extender esta estimación a variedades riemannianas cerradas arbitrarias consiste en que el enunciado vale solo para subvariedades de espacios euclídeos de dimensión finita. Esta dificultad puede ser superada aproximando el embedding isométrico de Kuratowski para una variedad  $M$  por embeddings de dimensión finita de  $M$  en  $\ell_N^\infty = (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ . Más concretamente, uno puede tomar una  $\delta$ -red finita  $x_1, \dots, x_N$  para algún  $\delta > 0$  en  $M$  y consideremos la aplicación  $F : M \rightarrow \ell_N^\infty$  que en cada coordenada está definida como la función distancia desde el punto correspondiente de la red. Como fue esbozado por Guth (ver [48, Lemma 2]) y demostrado por Katz y Katz (ver [62, Theorem 3.1]), provisto que  $\delta > 0$  sea tomado suficientemente pequeño  $F$  aproxima el embedding de Kuratowski con error arbitrario.

**Teorema 3.1.5.** *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana cerrada. Dado  $\varepsilon > 0$ , existe un embedding  $F : M \rightarrow \ell_N^\infty$  para un  $N$  suficientemente grande tal que*

$$(1 - \varepsilon)d(x, y) \leq \|F(x) - F(y)\|_\infty \leq d(x, y)$$

para todo  $x, y$  en  $M$ , donde  $d$  denota la distancia riemanniana en  $M$ .

Para poder trabajar con estos embeddings de dimensión finita en lugar del embedding de Kuratowski para una variedad, se necesitaría también extender las constantes bi-Lipschitz del Teorema 3.1.5 a las cadenas que llenan la variedad. Esto puede lograrse por la bien conocida propiedad de extensión de Lipschitz de espacios  $L^\infty$ .

**Lema 3.1.6.** *Sea  $X$  un espacio métrico,  $Y \subseteq X$  un subespacio y sea  $f : Y \rightarrow \ell^\infty(S)$  una función Lipschitz (aquí,  $S$  es un conjunto). Entonces, hay una extensión  $\tilde{f} : X \rightarrow \ell^\infty(S)$  de  $f$  con la misma constante de Lipschitz que  $f$ .*

Ver [48, Lemma 3] para una demostración.

Como consecuencia, dado un  $\varepsilon > 0$  arbitrario, para una variedad riemanniana cerrada  $M$  existe un embedding bi-Lipschitz  $F : M \rightarrow \ell_N^\infty$  para el cual el filling radius relativo  $\text{FillRad}(F(M) \subseteq \ell_N^\infty)$  está entre  $(1 - \varepsilon) \text{FillRad}(M)$  y  $\text{FillRad}(M)$ . Si bien la estimación de Federer-Fleming del Teorema 3.1.4 aplica en principio solo a subvariedades del espacio euclídeo, tras un ligero ajuste puede ser usada para acotar el filling radius de  $F(M) \subseteq \ell_N^\infty$ . En efecto, recordemos que una variedad riemanniana  $M$  de dimensión  $n$ , la medida de Hausdorff  $n$ -dimensional, que depende solo de la función de distancia riemanniana, coincide con  $\text{Vol}(M)$ . Luego, como la norma supremo  $\|\cdot\|_\infty$  es bi-Lipschitz equivalente a la norma euclídea usual  $\|\cdot\|_2$  en  $\mathbb{R}^N$ , módulo cambiar la constante dimensional  $C_N$  la desigualdad de Federer-Fleming implica que

$$\text{FillRad}(F(M) \subseteq \ell_N^\infty) \leq C_N \text{Vol}(F(M))^{\frac{1}{n}},$$

donde  $\text{Vol}(F(M))$  debe ser interpretado como la medida  $n$ -dimensional de Hausdorff de  $F(M)$ .

Sin embargo, hay aun un trecho considerable entre esta estimación y la desigualdad requerida

$$\text{FillRad}(M) \leq C_n \text{Vol}(M)^{\frac{1}{n}},$$

puesto que no controlamos cuán grande es necesario tomar el  $N$  y las constantes  $C_N$  convergen a infinito cuando  $N \rightarrow \infty$ . El resultado técnico principal en [44] es precisamente una generalización notable del Teorema de Federer-Fleming 3.1.4 a espacios de Banach, con una constante que depende solo de la dimensión de la variedad (o ciclo) involucrada.

**Teorema 3.1.7.** ([44, §4.3.B]) *Sea  $M$  una subvariedad  $n$ -dimensional (o más generalmente, un  $n$ -ciclo) de un espacio  $L^\infty L$ . Entonces,*

$$\text{FillRad}(M \subseteq L) \leq C_n \text{Vol}(M)^{\frac{1}{n}},$$

para cierta constante  $C_n < (n+1)n^n \sqrt{(n+1)!}$ .

La demostración, que explota tanto la desigualdad de Federer y Fleming como las técnicas utilizadas para su prueba, es considerada mayoritariamente como la parte más complicada del artículo [44]. Referimos al lector a las notas de Guth [48] y el trabajo original [44, §3.2 and §4.3] para la demostración.

## 3.2. Área sistólica

En esta sección nos centramos en el estudio del volumen sistólico (o mejor, *área sistólica*) de espacios de dimensión 2. Recordemos que para una variedad  $M$ , o más generalmente, un poliedro riemanniano a trozos de dimensión  $n$ , el volumen sistólico  $\sigma(M)$  es la mejor constante  $C = C(M)$  para la cual la desigualdad

$$C(M) \text{sis}(M, g)^n \leq \text{Vol}(M, g)$$

se cumple cualquiera sea la métrica riemanniana  $g$  en  $M$ . Como es fácil de chequear, todas las superficies cerradas distintas de la esfera (orientable o) son esenciales, de manera que la desigualdad sistólica de Gromov garantiza que el área sistólica de tales superficies es estrictamente positiva. Sin embargo, es posible obtener mejores cotas a través de argumentos diferentes a las técnicas de filling de Gromov.

Tal como mencionamos al inicio del capítulo, existen tres superficies para las que el valor exacto del área sistólica es conocido. Estas son el toro  $\mathbb{T}^2$ , el plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  y la botella de Klein  $K$ . El área sistólica del toro es  $\sigma(\mathbb{T}^2) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  por la desigualdad de Loewner, cuya demostración fue esbozada en la sección anterior. Mostramos abajo que  $\sigma(\mathbb{R}P^2) = \frac{2}{\pi}$ , resultado debido a [73]. El argumento puede adaptarse fácilmente para dar una demostración de la desigualdad de Loewner. Finalmente, Bavard demostró que  $\sigma(K) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$  en [8], y el óptimo se alcanza en una métrica riemanniana que no es suave.

**Teorema 3.2.1.** *Para cada métrica riemanniana  $g$  en  $\mathbb{R}P^2$ ,*

$$\text{sis}(\mathbb{R}P^2, g)^2 \leq \frac{\pi}{2} \text{Area}(\mathbb{R}P^2, g).$$

*Además, la desigualdad vale para métricas de curvatura constante 1.*

*Demostración.* Por el teorema de uniformización, hay una función positiva  $f : \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}$  (un factor conforme) tal que  $g = f g_0$ , donde  $g_0$  es la métrica de curvatura constante en  $\mathbb{R}P^2$  determinado por la métrica redonda standard  $d\theta^2 + \sin(\phi)d\phi^2$  en la esfera unitaria. Consideremos la



función  $\bar{f}$  obtenida a través de promediar el factor conforme sobre el grupo de isometrías  $G$  de  $(\mathbb{R}P^2, g_0)$ :

$$\bar{f}^{\frac{1}{2}}(x) = \int_G f(\xi x)^{\frac{1}{2}} d\xi,$$

donde  $d\xi$  es la medida de Haar normalizada de  $G$ , esto es, la única medida invariante a izquierda que integra 1.

Comparemos el sistole y el área de las métricas  $\bar{f}g_0$  y  $g$ . Para el sistole, tomamos un lazo no trivial  $\gamma$  y calculamos:

$$\begin{aligned} \text{long}(\gamma, \bar{f}g_0) &= \int_{\gamma} \int_G f(\xi\gamma(t))^{\frac{1}{2}} d\xi g_0(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt \\ &= \int_G \int_{\gamma} f(\xi\gamma(t))^{\frac{1}{2}} g_0(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) dt d\xi \\ &= \int_G \int_{\gamma} f(\xi\gamma(t))^{\frac{1}{2}} g_0(\xi\dot{\gamma}(t), \xi\dot{\gamma}(t)) dt d\xi \\ &= \int_G \text{long}(\xi\gamma, g) d\xi \\ &\geq \int_G \text{sis}(\mathbb{R}P^2, g) d\xi = \text{sis}(\mathbb{R}P^2, g), \end{aligned}$$

donde usamos el teorema de Fubini en el primer paso, que las  $\xi$  son isometrías en el segundo y que  $\gamma$  es no trivial en el último. Tomando  $\gamma$  como un lazo sistólico para la métrica  $\bar{f}g_0$ , vemos que  $\text{sis}(\mathbb{R}P^2, \bar{f}g_0) \geq \text{sis}(\mathbb{R}P^2, g)$ .

Con respecto al área, hacemos una cuenta similar, escribiendo  $\omega_0$  por la forma de área de  $g_0$ :

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathbb{R}P^2, \bar{f}g_0) &= \int_{\mathbb{R}P^2} \bar{f}^2 d\omega_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}P^2} \left( \int_G f(\xi x)^{\frac{1}{2}} d\xi \right)^2 d\omega_0 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}P^2} \left( \int_G f(\xi x) d\xi \right) d\omega_0 \\ &= \int_G \int_{\mathbb{R}P^2} f(\xi x) d\omega_0 d\xi \\ &= \int_G \text{Area}(\mathbb{R}P^2, g) d\xi = \text{Area}(\mathbb{R}P^2, g), \end{aligned}$$

donde la desigualdad en la tercera línea es consecuencia de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Así,

$$\frac{\text{Area}(\mathbb{R}P^2, g)}{\text{sis}(\mathbb{R}P^2, g)^2} \geq \frac{\text{Area}(\mathbb{R}P^2, \bar{f}g_0)}{\text{sis}(\mathbb{R}P^2, \bar{f}g_0)^2}.$$

Resta notar que, dado que el grupo de isometrías  $G$  es transitivo, la función  $\bar{f}$  es constante, digamos  $\bar{f} \equiv c$ . Luego,  $\text{sis}(\mathbb{R}P^2, \bar{f}g_0) = c \text{sis}(\mathbb{R}P^2, g_0) = \pi$  y  $\text{Area}(\mathbb{R}P^2, \bar{f}g_0) = c^2 \text{Area}(\mathbb{R}P^2, g_0) = 2\pi c^2$ , la mitad del área de la esfera standard de radio  $c$ . Se deduce la cota deseada.

Para analizar el caso de igualdad, notemos que la desigualdad en la estimación del área

$$\left( \int_G f(\xi x)^{\frac{1}{2}} d\xi \right)^2 \leq \int_G f(\xi x) d\xi$$

debería ser una identidad. Pero esto solo puede suceder si  $f$  es una función constante, es decir, si  $g$  es un múltiplo de la métrica de curvatura constante 1.  $\square$

De hecho, la desigualdad  $\sigma(S) \geq \frac{2}{\pi}$  vale para todas las superficies cerradas esenciales  $S$  por una desigualdad de Gromov. Para demostrarla, Gromov explotó la topología de los revestimientos universales de superficies esféricas. Estos revestimientos, como es bien sabido, son homeomorfos al plano  $\mathbb{R}^2$ .

Realicemos una observación preliminar sobre la métrica en un revestimiento  $\tilde{S}$  (no necesariamente universal) de una superficie riemanniana  $(S, g)$ . Consideraremos siempre a un revestimiento  $\tilde{S}$  equipado con la única métrica riemanniana  $\tilde{g}$  que hace a la aplicación revestimiento  $p : (\tilde{S}, \tilde{g}) \rightarrow (S, g)$  una isometría local. Usando esta métrica es posible probar cuantitativamente que los revestimientos son homeomorfismos locales, un hecho que fue observado explícitamente en [63].

**Lema 3.2.2.** *Sea  $p : (\tilde{M}, \tilde{g}) \rightarrow (M, g)$  un revestimiento de una variedad riemanniana  $(M, g)$ . Entonces,  $p$  es inyectiva sobre bolas de radio menor a  $\frac{1}{2} \text{sis}(M, g)$ .*

*Demostración.* Sea  $B$  una bola de radio  $r < \frac{1}{2} \text{sis}(M, g)$  en el espacio revestimiento  $\tilde{M}$ . Supongamos que  $p(y) = p(z)$  para ciertos  $y, z$  en  $B$ . En particular,  $d(y, z) < 2r$ , de manera que existe una curva  $\lambda$  que une  $y$  a  $z$  y tiene longitud a lo sumo  $2r$ . Entonces, la longitud del lazo  $p \circ \lambda$  es menor o igual a  $2r < \text{sis}(M, g)$ , de donde se deduce que es null-homotópico. Sin embargo, el lazo no se levanta a un lazo en  $\tilde{S}$ , lo que es una contradicción. Luego,  $p$  es inyectiva en  $B$ .  $\square$

Este hecho fue explotado por Gromov en su desigualdad sistólica óptima para superficies esféricas. Recordemos que dado un punto  $x$  en una variedad riemanniana  $(M, g)$ ,  $B(x, r)$  denota la bola abierta de radio  $r > 0$  alrededor de  $x$  con respecto a la distancia determinada por el tensor riemanniano.

**Teorema 3.2.3.** *([44, Theorem 5.2.A]) Sean  $(S, g)$  una superficie riemanniana cerrada y  $\gamma \subseteq S$  un lazo sistólico. Entonces, dado  $r < \frac{\text{sis}(S, g)}{2}$  existe un punto  $x \in \gamma$  tal que*

$$\text{Area } B(x, r) \geq 3r^2.$$

*En particular,  $\sigma(S) \geq \frac{3}{4}$ .*

*Demostración.* Consideremos el área promedio de las bolas de radio  $r$  centrado en puntos de  $\gamma$

$$\frac{1}{\text{sis}(S, g)} \int_{\gamma} \text{Area } B(v, r) d\gamma.$$

Para probar que al menos una de esas bolas tiene área mayor o igual a  $3r^2$ , en vista de la desigualdad de córea aplicada a bolas:

$$\text{Area } B(v, r) \geq \int_0^r \text{long}(\partial B(v, s)) ds,$$

es suficiente con chequear que la longitud promedio de las esferas  $\partial B(v, s)$  sobre  $\gamma$  es al menos  $6s$  para cada  $0 < s < r$ . Para hacer esto, notemos en primer lugar que el levantado  $\tilde{\gamma} \subseteq \tilde{S}$  es una geodésica infinita, homeomorfa a una línea recta en  $\tilde{S}$ . Fijemos  $0 < s < r$  y marquemos una sucesión infinita de puntos  $(w_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  en  $\tilde{\gamma}$  tal que  $d_{\tilde{S}}(w_i, w_j) = s|i - j|$ . Mostraremos que la longitud promedio de las esferas  $\partial B_{\tilde{S}}(w_i, s)$  es al menos  $6s$ . La esfera  $\partial B_{\tilde{S}}(w_i, s)$  interseca en segmentos de longitud al menos  $2s$  a cada una de las bolas  $B_{\tilde{S}}(w_{i-1}, s)$ ,  $B_{\tilde{S}}(w_{i+1}, s)$ . Los dos segmentos restantes  $\lambda_i^+$ ,  $\lambda_i^-$  que forman parte de  $\partial B_{\tilde{S}}(w_i, s)$  están en dos lados distintos del plano determinados por la geodésica  $\tilde{\gamma}$ . Dados índices  $k < l$ , consideramos el camino entre  $w_l$  y  $w_k$  formado por unir todos los segmentos  $\lambda_j^+$  en la parte superior de las esferas  $\partial B_{\tilde{S}}(w_j, s)$  para  $k \leq j \leq l$  junto con segmentos dentro de  $B_{\tilde{S}}(w_k, s)$  y  $B_{\tilde{S}}(w_l, s)$  que unen sus centros con un extremo de  $\lambda_k^+$  y de  $\lambda_l^+$ , respectivamente (ver Figura 3.1). Como la distancia entre  $w_k$  y  $w_l$  es

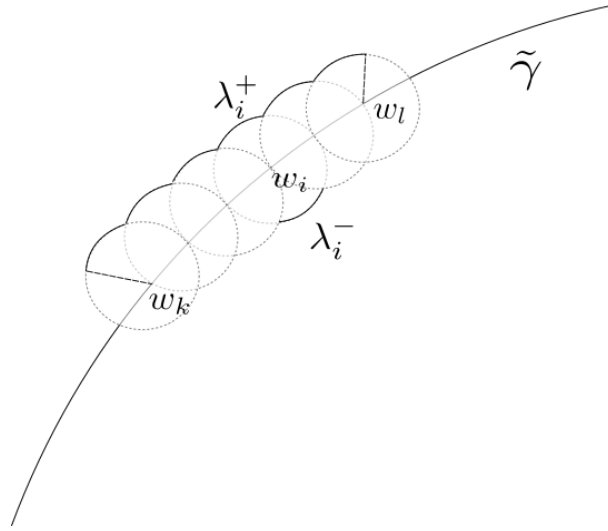


Figura 3.1: En la mitad superior del plano está ilustrado el camino que une  $w_l$  con  $w_k$ , marcado en negrita.

$s|k - l|$  por hipótesis, tenemos la siguiente cota para la longitud de dicho camino:

$$\sum_{j=k}^l \text{long}(\lambda_j^+) + 2s \geq s|k - l|.$$

Luego, si hacemos tender a infinito  $n = |k - l|$ , vemos que

$$\liminf_n \frac{1}{n} \sum_j \text{long}(\lambda_j^+) \geq s,$$

de donde se deduce que la longitud promedio de las esferas  $\partial B_{\tilde{S}}(w_i, s)$  está acotada inferiormente por  $6s$ . Como  $p$  es inyectiva restringida a todas estas bolas, por el Lema 3.2.2, la longitud promedio de las esferas  $\partial B(v, s)$  en  $S$  es mayor o igual que  $6s$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

Como todas las superficies cerradas (orientables o no) excepto la esfera y el plano proyectivo son esféricas, deducimos la siguiente estimación universal para el área sistólica de las superficies.

**Corolario 3.2.4.** *Sea  $S$  una superficie cerrada que no es la esfera. Entonces,*

$$\sigma(S) \geq \frac{2}{\pi}.$$

*Además, la igualdad se alcanza solo en el plano proyectivo con su métrica redonda standard.*

Otra característica del área sistólica de superficies que está completamente resuelta es el comportamiento asintótico respecto del género  $\gamma$ . El mejor resultado conocido en esta dirección es el siguiente.

**Teorema 3.2.5.** *(cf. [65, Remark 4.2]) Sea  $S_\gamma$  una superficie cerrada de género  $\gamma$ . Entonces,*

$$\pi \leq \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{\log(\gamma)^2} \sigma(S_\gamma) \leq \frac{9\pi}{4}.$$

La cota superior fue establecida por Buser y Sarnak [27], quienes construyeron superficies hiperbólicas con el área sistólica requerida (asintóticamente) como revestimientos de una cierta superficie de Riemann aritmética. La cota inferior asintóticamente correcta fue determinada por Gromov en [44, §6.4] a través de una suerte de proceso de promedio sobre cadenas medibles conocido como *difusión de cadenas* desarrollado en [43]. La constante  $\pi$ , más ajustada que el  $\frac{1}{4}$  que se deduce de las técnicas de Gromov, fue establecida por Katz y Sabourau en [65, Theorem 4.1] a través de la estimación de Katok del *volumen entrópico* (o *volumen asintótico*) para superficies hiperbólicas.

Cerramos este breve panorama sobre el área sistólica de superficies enunciando algunos problemas abiertos. Por analogía con la desigualdad del Corolario 3.2.4, es legítimo preguntarse si todas las superficies de género  $\geq 1$  cumplen la desigualdad de Loewner, esto es, si  $\sigma(S) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$  para  $S$  de género al menos 1. Por un resultado de Katz y Sabourau [65, Theorem 5.1], la desigualdad se cumple para todas las superficies de género al menos 20. Más ambiciosamente: ¿es el área sistólica  $\sigma$  creciente con respecto al género de las superficies? La motivación para esta pregunta proviene de la intuición de que el área sistólica de una superficie  $S$  mide geoméricamente cuán difícil es construir una variedad riemanniana con la topología de  $S$  y el hecho de que la topología de  $S$  se vuelve más compleja a medida que el género crece.

Enfocamos ahora nuestra atención en la geometría sistólica de los poliedros de dimensión 2. Un *poliedro riemanniano a trozos*  $(X, g)$  consta de un poliedro  $X$  junto con una triangulación en la que cada símplex está equipado coherentemente con una métrica riemanniana suave. Esto significa que siempre que dos símplexes  $\sigma$  y  $\tau$  se intersecan, las métricas riemannianas correspondientes  $g_\sigma$  y  $g_\tau$  coinciden en la intersección:  $g_\sigma|_{\sigma \cap \tau} = g_\tau|_{\sigma \cap \tau}$ . La estructura riemanniana a trozos sobre  $X$  determina de la manera natural una estructura de longitud para  $X$ , mientras que el volumen de  $X$  se define, como es de esperar, como la suma de los volúmenes de los símplexes de dimensión máxima. Luego, es claro cómo definir el volumen sistólico para poliedros. Como probó Gromov en [44, Appendix 2], su desigualdad sistólica (Teorema 3.1.2) aplica también a *poliedros esenciales* (aunque con una constante peor), y por lo tanto el volumen sistólico es positivo para una clase considerable de espacios.

**Teorema 3.2.6.** *Sea  $X$  un poliedro compacto esencial de dimensión  $n$ . Entonces, existen una constante  $C_n > 0$  que depende únicamente de la dimensión  $n$  tal que*

$$\text{sis}(X, g)^n \leq C_n \text{Vol}(X, g)$$

*para cualquier métrica riemanniana a trozos  $g$  en  $X$ .*

Aquí, siguiendo a Gromov llamamos a un poliedro  $n$ -dimensional  $X$  *esencial* si existe un poliedro esférico  $K$  y una función continua  $X \rightarrow K$  que no se contrae al  $(n - 1)$ -esqueleto de  $K$ . La intuición es que en un poliedro esencial  $X$ , de forma análoga a lo que sucede en las variedades esenciales, la topología 1-dimensional detecta la no trivialidad de la topología  $n$ -dimensional de  $X$ . La diferencia reside en que en un poliedro general no hay una clase fundamental y luego se utiliza el  $n$ -esqueleto para ese propósito.

La estrategia para probar el Teorema 3.2.6 es similar al caso de las variedades. Gromov definió un invariante métrico para poliedros riemannianos a trozos llamado *radio de contractibilidad*, que cumple el papel del filling radius en este contexto. Concretamente, el  $n - 1$  radio de contractibilidad de un poliedro riemanniano a trozos  $X$  mide cuán grande tiene que ser un entorno  $U$  de  $X$  en  $L^\infty(X)$  para garantizar que la inclusión  $X \hookrightarrow U$  factoriza a través de un poliedro de dimensión  $(n - 1)$ . Tanto el Lema 3.1.3 como el Teorema 3.1.7 se generalizan a este contexto, reemplazando el filling radius por el  $n - 1$  radio de contractibilidad. Ver [44, Appendix 2] para más detalles.

El motivo principal por el que nos interesa la geometría sistólica de los poliedros 2-dimensionales es su conexión con grupos. No es difícil verificar que los poliedros esenciales de dimensión 2 son exactamente aquellos con grupo fundamental no libre. Para tales poliedros  $X$ , el Teorema de Gromov 3.2.6 implica que el área sistólica  $\sigma(X)$  está acotada inferiormente por  $\frac{1}{10^4}$ . En [76], Rudyak y Sabourau mejoraron significativamente esta cota para una clase de grupos que los autores llaman de *índice libre de Grushko cero*. Recordemos que según el Teorema de Grushko [79], un grupo finitamente presentable  $G$  admite una descomposición

$$G = F_k * H_1 * \cdots * H_n,$$

donde  $F_k$  es el grupo libre de rango  $k$  y los grupos  $H_i$  son grupos no libres y libremente indescomponibles. Además, tal descomposición es única salvo orden y conjugaciones. El número  $k$  es llamado *índice de Grushko libre* de  $G$  en [76, §1].

**Teorema 3.2.7.** ([76, Theorem 3.5]) *Sea  $(X, g)$  un poliedro riemanniano a trozos de dimensión 2. Supongamos que su grupo fundamental  $\pi_1(X)$  es de índice libre de Grushko cero. Entonces, si  $x$  pertenece a un lazo sistólico de  $X$ ,*

$$\text{Area } B(x, r) \geq r^2,$$

para todo  $0 < r < \frac{1}{2} \text{sis}(X, g)$ . En particular,  $\sigma(X) \geq \frac{1}{4}$ .

El argumento de la demostración reside en un análisis cuidadoso de la topología de las *esferas*  $\partial B(x, r)$  (esto es, las curvas de nivel de la función distancia a  $x$ ), del cual se extrae una cota para el área de las bolas a través de la desigualdad de coárea. Mediante el uso de otro argumento topológico, esta vez tomado de la teoría de revestimientos, esta cota fue extendida a todos los poliedros esenciales en [63, Theorem 3.1].

**Teorema 3.2.8.** ([63, Theorem 3.1]) *Sea  $(X, g)$  un poliedro riemanniano a trozos esencial de dimensión 2. Entonces, hay un punto  $x$  en  $X$  tal que*

$$\text{Area } B(x, r) \geq r^2,$$

para todo  $0 < r < \frac{1}{2} \text{sis}(X, g)$ . En particular,  $\sigma(X) \geq \frac{1}{4}$ .

*Demostración.* Como  $X$  es esencial, su grupo fundamental no es libre y luego  $X$  admite un revestimiento  $\tilde{X}$  con grupo fundamental de índice libre de Grushko cero. Notemos que el revestimiento  $p : (\tilde{X}, \tilde{g}) \rightarrow (X, g)$  es una isometría local e induce un monomorfismo en el grupo fundamental. Por lo tanto,  $\text{sis}(\tilde{X}, \tilde{g}) \geq \text{sis}(X, g)$ . Por el Teorema 3.2.8 existe un punto  $\tilde{x} \in \tilde{X}$  tal que

$$\text{Area } B_{\tilde{X}}(\tilde{x}, r) \geq r^2,$$

para cada  $0 < r < \frac{1}{2} \text{sis}(X, g)$ . Esto implica la afirmación por el Lema 3.2.2.  $\square$

Como explicamos en la introducción del capítulo, la geometría sistólica de poliedros 2-dimensionales se extiende a grupos finitamente presentables a través de la conocida correspondencia entre ambas categorías. Recordemos que el área sistólica  $\sigma(G)$  de un grupo finitamente presentable  $G$  se define como el área sistólica óptima  $\sigma(X)$  entre sus triangulaciones  $X$ . Es fácil ver que el área sistólica de grupos libres es trivial, dado que tales grupos admiten triangulaciones sin 2-símplices. Por otra parte, la desigualdad del Teorema 3.2.8 implica que el área sistólica de cualquier grupo finitamente presentable y no libre  $G$  es mayor o igual a  $\frac{1}{4}$  (comparar con el Corolario 3.2.4). En la próxima sección, mejoramos esta cota por un factor de 2 para cierta clase de grupos que incluye los grupos de superficie. La intuición detrás de este refinamiento es que, mientras ciertamente  $\sigma(\pi_1(S)) \leq \sigma(S)$  para superficies cerradas  $S$ , debería haber relaciones más estrechas entre estas dos magnitudes. En particular, las cotas inferiores generales para el área sistólica de superficies y grupos de superficie deberían ser más cercanas (si es que no coinciden).

Otra observación elemental sobre el área sistólica de grupos es que vale la desigualdad  $\sigma(G * H) \leq \sigma(G) + \sigma(H)$  para grupos finitamente presentable  $G, H$ . En efecto, tomemos triangulaciones casi óptimas  $(X_1, g_1)$  y  $(X_2, g_2)$  para  $G$  y  $H$  respectivamente, normalizadas de manera que  $\text{sis}(X_1, g_1) = \text{sis}(X_2, g_2) = 1$ . Claramente, el área del wedge  $X_1 \vee X_2$  dotado con la métrica riemanniana a trozos obvia es la suma de las áreas de  $X_1$  y  $X_2$  y el sistole es igual a 1. Por otro lado, parece difícil imaginar modelos más económicos para el producto libre de grupos, especialmente cuando uno de ellos es libre (cf. [76, Question 1.2]). Sin embargo, al momento de escribir esta Tesis, la pregunta sobre si  $\sigma(G * \mathbb{Z}) = \sigma(G)$  permanece abierta. Discutiremos esta pregunta en la última sección del capítulo.

### 3.3. Una extensión de la desigualdad sistólica de Guth

En la sección presente generalizamos a poliedros riemannianos a trozos de dimensión 2 una desigualdad sistólica de Guth [49] para variedades riemannianas. Nuestro interés principal en la desigualdad es que permite refinar la cota inferior para el área sistólica de una clase considerable de grupos que contiene a los grupos de superficie.

Empezamos con el enunciado de la desigualdad sistólica de Guth.

**Teorema 3.3.1.** *Sea  $M$  una  $n$ -variedad cerrada y suave. Supongamos que existen clases de cohomología  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$  con  $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n \neq 0$  en  $H^n(M, \mathbb{Z}_2)$ . Entonces, dada una métrica riemanniana  $g$  en  $M$ , existe un punto  $x \in M$  tal que para cada  $r < \frac{\text{sis}(M, g)}{2}$*

$$\text{Vol } B(x, r) \geq C_n (2r)^n,$$

donde  $C_n$  es una constante positiva que depende únicamente de la dimensión. En particular, se sigue que  $\sigma(M) \geq C_n$ .

Explícitamente, según un refinamiento debido a Nakamura [72] la constante puede ser tomada como  $C_n = \frac{1}{n!}$ , lo cual es una mejor considerable sobre la constante

$$C_n = \frac{1}{(6(n+1) \cdot n^n \cdot \sqrt{n+1!})^n}$$

que puede extraerse de la demostración de la desigualdad sistólica de Gromov.

Comparemos en más detalle ambas desigualdades. La condición topológica sobre el cup-length con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  en la desigualdad de Guth es más restrictiva que la hipótesis de esencialidad de Gromov, pero, en el mismo espíritu aplica a variedades para las cuales la topología 1-dimensional (en este caso, la cohomología) genera en cierto sentido la clase fundamental. Por otro lado, además de proveer mejores constantes, la desigualdad de Guth tiene la ventaja de ser local, en el sentido que muestra que el volumen de bolas de radios comparables al sistole tienen volumen relativamente grande en lugar de estimar el volumen de toda la variedad. En cuanto a los métodos de la demostración, si bien definitivamente no es trivial, la desigualdad de Guth evita las dificultades técnicas del argumento de Gromov, particularmente la generalización de la desigualdad isoperimétrica de Federer-Fleming a espacios de Banach de dimensión infinita. Por el mismo motivo, la demostración de la desigualdad de Guth no provee la información adicional sobre el filling radius y desigualdad isoperimétricas en espacios de Banach de dimensión infinita que sí producen las técnicas de Gromov.

La principal novedad del argumento en la demostración de Guth es el uso de hipersuperficies (casi) mínimas. Para explicar este punto, consideremos una variedad cerrada  $M$  en las condiciones del Teorema 3.3.1. Por el teorema de Thom [80], la clase de homología (con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$ ) dual Poincaré a  $\alpha_n$  puede ser representada por una hipersuperficie (i.e., una subvariedad de codimensión 1) de  $M$ , para la cual se comprueba fácilmente que es de cup-length máximo con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  también. Supongamos por el momento que existe una hipersuperficie  $Z$  de volumen mínimo que representa esa clase de homología. El corazón técnico de la demostración es una estimación de estabilidad, similar a estimaciones para superficies mínimas en [77], que controla el volumen de bolas de radios pequeños en  $Z$ . Más concretamente, para probar esta estimación, Guth explotó el siguiente hecho relativamente intuitivo: si se toma una bola  $B(z, r)$  de radio adecuadamente pequeño  $r$  centrado en un punto  $z \in Z$  y corta de  $Z$  la intersección  $Z \cap B(z, r)$  para llenar el hoyo de uno de los hemisferios de la esfera  $\partial B(z, r)$ , se obtiene otra hipersuperficie  $Z'$  homóloga a la original (ver Figura 3.2). Luego, por la minimalidad de  $Z$ , el volumen  $n-1$  dimensional de  $Z \cap B(z, r)$  es comparable al volumen  $n-1$  dimensional de la esfera  $\partial B(z, r)$ . Inductivamente, el volumen  $n-1$  dimensional de  $Z \cap B(z, r)$  (y luego, de  $\partial B(z, r)$ ) es relativamente grande para cada  $r$  en un intervalo pequeño. La estimación final sobre el volumen de las bolas  $B(z, r)$  se obtiene integrando las cotas para el volumen  $n-1$  dimensional de cada esfera  $\partial B(z, s)$ ,  $s < r$ , esto es, usando la desigualdad de coárea.

Para dar la demostración, necesitaremos enunciar algunos lemas preliminares y fijar ciertas notaciones. Si  $x$  es un punto en una variedad riemanniana (o en un poliedro riemanniano a trozos)  $(X, g)$ , la bola (métrica) cerrada de radio  $r$  centrada en  $x$  será denotada por  $\bar{B}(x, r)$ . Dada una clase de homología no trivial  $[\gamma]$  en  $H_1(X, \mathbb{Z}_2)$ , la longitud de  $[\gamma]$ , denotada  $\text{long}([\gamma])$ , es el ínfimo de las longitudes tomado sobre los 1-ciclos que representan  $[\gamma]$ . Siguiendo a Guth [50], la definición de longitud se extiende a clases de cohomología no triviales  $\alpha$  por dualidad:

$$\text{long}(\alpha) := \inf\{\text{long}([\gamma]) : [\gamma] \in H_1(X, \mathbb{Z}_2), \alpha([\gamma]) \neq 0\}.$$

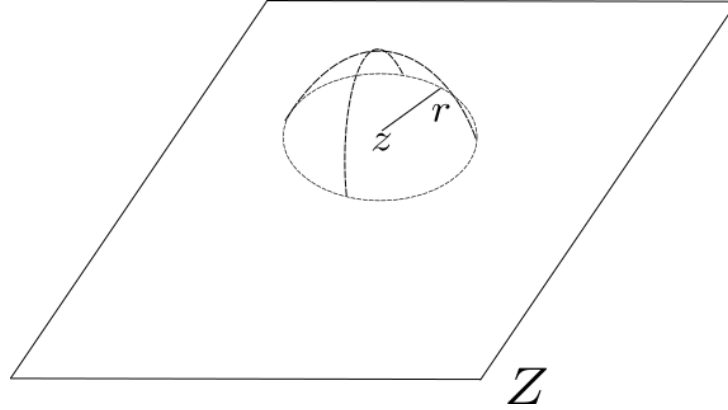


Figura 3.2: La hipersuperficie  $Z$  con un hemisferio de la esfera  $\partial B(z, r)$ .

Observemos que  $\text{long}(\alpha) \geq \text{sis}(X, g)$  para cualquier  $\alpha \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$  no trivial. También, si  $X$  es una variedad cerrada y  $Z$  una hipersuperficie que representa una clase de homología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  en  $H_{n-1}(X, \mathbb{Z}_2)$ ,  $Z$  será llamada  $\delta$ -minimizante si el volumen  $n-1$  dimensional de cualquier otra subvariedad suave  $Z'$  en la misma clase de homología verifica la desigualdad  $\text{Vol}_{n-1}(Z') \geq \text{Vol}_{n-1}(Z) - \delta$ .

Emplearemos también la siguiente versión homológica de un lema de Gromov [47, p. 290], debida a Guth [50, Curve-factoring Lemma].

**Lema 3.3.2.** *Sea  $(M, g)$  una variedad riemanniana completa. Sea  $\gamma$  un 1-ciclo contenido en una bola  $B(x, r)$  para  $x \in M$ ,  $r > 0$ . Entonces, para cualquier  $\varepsilon > 0$  dado,  $\gamma$  es homólogo a una suma finita  $\sum_i \gamma_i$ , donde cada  $\gamma_i$  es un 1-ciclo de longitud a lo sumo  $2r + \varepsilon$ .*

*Demostración.* Es suficiente probar el lema para el caso en que  $\gamma$  es homeomorfo a un círculo. Subdividimos  $\gamma$  en un número finito de intervalos  $\sigma_i$ , cada uno de longitud menor a  $\varepsilon$ . Ahora, unimos el  $i$ -ésimo vértice de la subdivisión de  $x$  por un segmento geodésico  $\lambda_i$ , donde el índice es cíclico. Entonces  $\gamma$  es homólogo a  $\sum_i \gamma_i$  donde  $\gamma_i = \lambda_i + \sigma_i - \lambda_{i+1}$ . Esto concluye la demostración, pues la longitud de cada uno de los segmentos  $\lambda_i$  es a lo sumo  $r$ .  $\square$

En lugar de la versión original de Guth, reproduciremos aquí un refinamiento del lema de estabilidad debida a Nakamura [72, Lemma 2.1].

**Lema 3.3.3.** *Sea  $(M, g)$  una variedad cerrada riemanniana. Sea  $\alpha \in H^1(M, \mathbb{Z}_2)$  una clase no trivial de longitud  $2R$ . Para  $\delta > 0$ , sea  $Z$  una hipersuperficie embebida  $\delta$ -minimizante en  $M$  que representa la clase de homología dual Poincaré dual a  $\alpha$ . Entonces, si  $r < R$ ,*

$$\text{Vol}_{n-1}(\partial \bar{B}(z, r)) \geq 2 \text{Vol}_{n-1}(Z \cap \bar{B}(z, r)) - 2\delta,$$

para cada  $z \in Z$ .

*Demostración.* Como explicamos más arriba, la clave para probar este resultado es mostrar que la hipersuperficie formada por remover  $Z \cap \bar{B}(z, r)$  de  $Z$  y agregar un “hemisferio” apropiado de  $\partial \bar{B}(z, r)$  es homólogo a  $Z$ . Para lograr eso, notemos primero que el  $(n-1)$ -ciclo relativo  $Z \cap \bar{B}(z, r)$  en el par  $(\bar{B}(z, r), \partial \bar{B}(z, r))$  es null-homólogo. En efecto, si no fuera el caso, por la



dualidad de Poincaré-Lefschetz el producto  $\text{cap } Z \cap \bar{B}(z, r)$  y cierto 1-ciclo (absoluto)  $\gamma \subseteq \bar{B}(z, r)$  sería no trivial. Como  $r < R$ , por el Lema 3.3.2  $\gamma$  es homólogo a una suma  $\sum_i \gamma_i$  donde podemos hacer la longitud de cada  $\gamma_i$  menor a  $2R = \text{long}(\alpha)$  eligiendo un  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Así,  $\alpha([\gamma]) = \sum_i \alpha([\gamma_i]) = 0$  por la definición de la longitud de  $\alpha$ , lo que contradice el hecho de que el producto  $\text{cap}$  entre  $Z \cap \bar{B}(z, r)$  y  $\gamma$  es no trivial.

Luego, el ciclo relativo  $Z \cap \bar{B}(z, r)$  es borde de una cadena relativa  $Q_1$ . Como el ciclo es embebido, esta cadena es la suma de ciertas componentes de  $\bar{B}(z, r) \setminus Z$ . Además, como el ciclo es null-homólogo y el anillo de coeficientes es  $\mathbb{Z}_2$ , también es el borde de la cadena complementaria  $Q_0$ . Se deduce que  $\partial \bar{B}(z, r)$  se descompone a través de  $Z \cap \partial \bar{B}(z, r)$  en las cadenas  $Q_0 \cap \partial \bar{B}(z, r)$  y  $Q_1 \cap \partial \bar{B}(z, r)$ . Así,  $Z$  es homólogo al ciclo  $Z'$  formado por cortar  $Z \cap \bar{B}(z, r)$  de  $Z$  y pegar el “hemisferio” de menor área entre  $Q_0 \cap \partial \bar{B}(z, r)$  y  $Q_1 \cap \partial \bar{B}(z, r)$ . Como es posible suavizar  $Z'$  alrededor de la intersección para hacerla una hipersuperficie suave y embebida sin aumentar su volumen y  $Z$  es  $\delta$ -minimizante, deducimos que  $\text{Vol}_{n-1}(Z') \geq \text{Vol}_{n-1}(Z) - \delta$ . Ahora  $Z$  y  $Z'$  coinciden fuera de  $\bar{B}(z, r)$ , así que la última desigualdad equivale a

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{n-1}(\partial \bar{B}(z, r)) &\geq 2 \min\{\text{Vol}_{n-1}(Q_0 \cap \partial \bar{B}(z, r)), \text{Vol}_{n-1}(Q_1 \cap \partial \bar{B}(z, r))\} \\ &\geq 2 \text{Vol}_{n-1}(Z \cap \bar{B}(y, r)) - 2\delta, \end{aligned}$$

como buscábamos. □

Estamos listos ahora para mostrar el refinamiento de Nakamura de la desigualdad sistólica de Guth.

**Teorema 3.3.4.** *Sea  $(M, g)$  una superficie riemanniana cerrada de dimensión  $n$ . Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H^1(S, \mathbb{Z}_2)$  clases no necesariamente distintas tales que  $\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n \neq 0$  en  $H^n(M, \mathbb{Z}_2)$  y sea  $2R := \min_i \{\text{long}(\alpha_i)\} > 0$ . Entonces, existe  $x \in M$  tal que para todo  $r \in (0, R)$ ,*

$$\text{Vol } B(x, r) \geq \frac{(2r)^n}{n!}.$$

En particular,  $\sigma(M) \geq \frac{1}{n!}$ .

*Demostración.* Procedemos por inducción en la dimensión  $n$ , siendo trivial el caso  $n = 1$ . Para  $n \geq 2$ , tomemos una hipersuperficie  $\delta$ -minimizante  $Z$  que representa la clase de homología dual Poincaré a  $\alpha_n$ . La relación entre el producto  $\text{cup}$  y  $\text{cap}$  implica que

$$\alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_{n-1}[Z] = \alpha_1 \cup \dots \cup \alpha_n[M] \neq 0.$$

Luego, obtenemos restringiendo a  $Z$  clases de cohomología  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_{n-1} \in H^1(Z, \mathbb{Z}_2)$  con producto  $\text{cup}$  no trivial y cuya longitud no es menor a la longitud de las clases correspondientes en  $H^1(M, \mathbb{Z}_2)$ . Por inducción, hay un punto  $z \in Z$  tal que

$$\text{Vol}_{n-1}(B_Z(z, r)) \geq \frac{(2r)^{(n-1)}}{(n-1)!}$$

siempre que  $r < R$ , donde el subíndice  $Z$  en  $B_Z(z, r)$  indica que la bola es con respecto a la métrica riemanniana inducida en  $Z$ . Como claramente  $B_Z(z, r) \subseteq Z \cap \bar{B}(z, r)$ , por el Lema 3.3.3

y la desigualdad de coárea,

$$\begin{aligned} \text{Vol } B(z, r) &\geq \int_0^r \text{Vol}_{n-1}(\partial \bar{B}(z, s)) \, ds \geq \int_0^r 2 \text{Vol}_{n-1}(Z \cap \bar{B}(z, r)) - 2\delta \, ds \\ &\geq \int_0^r 2 \text{Vol}_{n-1}(B_Z(z, r)) - 2\delta \, ds \geq \int_0^r 2 \frac{(2s)^{n-1}}{(n-1)!} - 2\delta \, ds = \frac{(2r)^n}{n!} - 2r\delta. \end{aligned}$$

Notemos que si bien es posible conseguir esta cota para cada  $\delta > 0$ , el punto  $z$  pertenece a una hipersuperficie  $\delta$ -minimizante embebida en  $M$ , que por lo tanto depende de  $\delta$ . Para finalizar la prueba, tomemos una sucesión de números positivos  $(\delta_k)$  que converge a 0 y formemos la sucesión correspondiente de puntos  $(z_k) \subseteq M$ , eligiendo  $z_k$  de una hipersuperficie  $\delta_k$ -minimizante que represente la clase  $[Z]$ . Por continuidad, el límite  $x \in M$  de una subsucesión convergente de  $(z_k)$  verifica la cota

$$\text{Vol } B(x, r) \geq \frac{(2r)^n}{n!}$$

para  $r \in (0, R)$ . La cota para el volumen sistólico de  $M$  se deduce inmediatamente del hecho que  $2R \geq \text{sis}(M, g)$ .  $\square$

Este teorema aplica, entre otros, a toros y espacios proyectivos de cualquier dimensión, así como a superficies cerradas esenciales. Para variedades con cup-length con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  maximal de dimensión  $n \geq 3$ , el teorema da la mejor cota inferior conocida para el volumen sistólico como Nakamura destaca en [72, §1.4]. En cambio, en dimensión 2 contamos con desigualdades más fuertes, puesto que el Teorema 3.3.4 implica solo que  $\sigma(S) \geq \frac{1}{2}$  para superficies cerradas  $S$ . Sin embargo, su conclusión es más fuerte en un aspecto: la cota inferior para el área se deduce meramente de la existencia de dos clases de cohomología “largas” con producto cup no trivial, independientemente del tamaño del sístole. Tomemos un poliedro de dimensión 2 riemanniano a trozos  $(X, g)$  con cup-length maximal. Tal  $X$  tiene una clase de homología de dimensión 2  $[C]$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  distinguida, a saber, aquella que detecta el producto cup no trivial de clases de homología 1-dimensionales. Se puede demostrar que la clase  $[C]$  es representada por una superficie (posiblemente singular) embebida en  $X$ . Si bien el sístole de  $S$  puede ser arbitrariamente pequeño (i.e. en general no está controlado por el sístole de  $(X, g)$ ), como la clase  $[C]$  está generada por clases de cohomología de longitud mayor que el sístole de  $(X, g)$ , el Teorema 3.3.4 aplica para dar una cota inferior del área de  $S$ , luego de  $X$ .

Formalicemos el argumento recientemente esbozado. El primer punto consiste en describir cómo realizar clases de homología 2-dimensionales como superficies singulares, o más precisamente, como imágenes continuas de superficies de manera controlada. Nuevamente, por los resultados de Thom, una clase de homología con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  de cualquier dimensión en un poliedro puede ser representada como la imagen de la clase fundamental de una variedad cerrada por una función continua. Registramos aquí una construcción explícita para el caso de las clases de homología de dimensión 2 con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  de complejos simpliciales similar a la descrita en ([52, pp. 108-109]). Recordemos que una aplicación simplicial es *no degenerada* si preserva la dimensión de los símlices.

**Lema 3.3.5.** *Sea  $X$  un complejo simplicial y sea  $[C] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$  una clase de homología no trivial. Entonces, existe una superficie cerrada triangulada  $S$  (posiblemente no orientable y no conexa) junto con una aplicación simplicial no degenerada  $h : S \rightarrow X$  tal que  $h_*[S] = [C]$ ,*

donde  $[S] \in H_2(S, \mathbb{Z}_2)$  denota la clase fundamental. Además,  $h$  no identifica 2-símplices, es decir,  $h(\sigma) \neq h(\eta)$  para 2-símplices distintos  $\sigma, \eta$  de  $S$ .

Notemos en particular que si equipamos el 2-complejo  $X$  con una estructura riemanniana a trozos  $g$ , esta construcción permite relacionar fácilmente la longitud y el área de subespacio de  $X$  con subespacios de  $S$  dotados con la métrica riemanniana a trozos pullback por la función  $h : S \rightarrow X$ . Más concretamente, en tal situación la función  $h$  preserva las longitudes y las áreas.

*Demostración.* Tomemos un 2-ciclo  $Z = \sum_i \sigma_i$  en  $C_2(X, \mathbb{Z}_2)$  que representa la clase de homología  $[C]$  y formemos una unión disjunta de 2-símplices  $\tilde{\sigma}_i$ , uno por cada  $\sigma_i$  en el soporte de  $Z$ . Como el borde algebraico de  $Z$  es trivial, las aristas de los símplexes  $\sigma_i$  se cancelan de a pares. Elijamos un conjunto maximal de tales pares de cancelación e identifiquemos las aristas de  $\tilde{\sigma}_i$  acordemente. Es claro que el espacio cociente obtenido a partir de  $\coprod_i \tilde{\sigma}_i$  haciendo estas identificaciones es una superficie cerrada  $S$  que origina una aplicación simplicial  $h : S \rightarrow X$  con las propiedades deseadas.  $\square$

**Observación 3.3.6.** En general, para una clase de homología  $n$ -dimensional con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  para  $n \geq 2$  la construcción de la demostración produce una realización por una pseudovariedad cuyas singularidades son de codimensión al menos 3 (cf. [52, p. 109]). Por lo tanto, se necesita un argumento diferente para extender esta desigualdad a dimensiones  $n \geq 3$ .

**Teorema 3.3.7.** *Sea  $(X, g)$  un poliedro riemanniano a trozos conexo de dimensión 2. Supongamos que existen clases  $\alpha, \beta$  en  $H^1(X, \mathbb{Z}_2)$  tales que  $\alpha \cup \beta \neq 0$  en  $H^2(X, \mathbb{Z}_2)$  y sea  $2R = \min\{\text{long}(\alpha), \text{long}(\beta)\} > 0$ . Entonces, existe un punto  $x \in X$  tal que para todo  $r \in (0, R)$ ,*

$$\text{Area } B(x, r) \geq \frac{(2r)^2}{2}.$$

*Demostración.* Como por hipótesis existen clases  $\alpha, \beta \in H^1(X, \mathbb{Z}_2)$  tales que  $\alpha \cup \beta \neq 0$ , hay una clase de homología  $[C] \in H_2(X, \mathbb{Z}_2)$  con  $\alpha \cup \beta[C] \neq 0$ . Por el Lema 3.3.5 aplicado a la clase  $[C]$ , obtenemos una superficie cerrada triangulada  $S$  junto con una aplicación simplicial  $h : S \rightarrow X$  que representa a  $[C]$ . Dotamos a  $S$  con la métrica de pullback  $h^*(g)$ , donde  $g$  es la métrica riemanniana a trozos en  $X$ . Por la naturalidad del producto cup, tenemos que

$$h^*(\alpha) \cup h^*(\beta)[S] = (\alpha \cup \beta)h_*[S] = \alpha \cup \beta[C] \neq 0.$$

Si  $S$  no es conexas, el cálculo de arriba implica que para alguna componente de  $S$  las componentes correspondientes de  $h^*(\alpha)$  y  $h^*(\beta)$  tienen producto cup no trivial. Por un ligero abuso de notación, seguiremos llamando  $S$  a tal componente. Afirmamos que tanto la longitud de  $h^*(\alpha)$  como la de  $h^*(\beta)$  están acotadas inferiormente por  $\text{sis}(X, g)$ . En efecto, si  $\gamma$  es un 1-ciclo en  $S$  tal que  $h^*(\alpha)\gamma \neq 0$ , como  $h^*(\alpha)\gamma = \alpha(h_*\gamma)$  y  $h$  preserva longitudes se deduce que  $\text{long}(h^*(\alpha)) \geq \text{long}(\alpha)$ , y, análogamente, que  $\text{long}(h^*(\beta)) \geq \text{long}(\beta)$ . Si bien en principio el Teorema 3.3.4 no aplica formalmente a  $(S, h^*(g))$  pues la métrica riemanniana  $h^*(g)$  es apenas suave a trozos, esta se puede aproximar con un error arbitrariamente pequeño por métricas suaves. Luego, por el Teorema 3.3.4 para estas aproximaciones suaves y continuidad, existe un punto  $y$  en  $S$  tal que para todo  $r \in (0, R)$

$$\text{Area } B_S(y, r) \geq \frac{(2r)^2}{2},$$

donde  $B_S(y, r)$  es la bola de radio  $r$  centrada en el punto  $y \in S$ . Como  $h$  preserva áreas tenemos para  $x = h(y)$  que

$$\text{Area } B(x, r) \geq \frac{(2r)^2}{2}.$$

□

Notemos que la desigualdad aplica también a complejos no compactos, siempre y cuando la longitud de las clases de cohomología involucradas sea positiva. Esta observación es de especial relevancia para los revestimientos. Como mostramos en el Lema 3.2.2 siguiendo a [63], los revestimientos de poliedros riemannianos a trozos son inyectivos restringidos a bolas de radio menor a la mitad del sístole del espacio base. Como por otra parte el sístole de un revestimiento no simplemente conexo es claramente mayor o igual al sístole del espacio base, deducimos el siguiente corolario.

**Corolario 3.3.8.** *Sea  $(X, g)$  un poliedro compacto y conexo de dimensión 2 dotado de una métrica riemanniana a trozos  $g$  y sea  $(\hat{X}, \hat{g})$  un revestimiento de  $X$ . Supongamos que existen clases  $\alpha, \beta$  en  $H^1(\hat{X}, \mathbb{Z}_2)$  tales que  $\alpha \cup \beta \neq 0$  en  $H^2(\hat{X}, \mathbb{Z}_2)$  y sea  $2R := \min\{\text{long}(\alpha), \text{long}(\beta)\}$ . Entonces, existe  $x \in \hat{X}$  tal que  $\text{Area } B(x, r) \geq \frac{(2r)^2}{2}$  para todo  $r \in (0, R)$ . En particular,  $\text{Area}(X, g) \geq \frac{1}{2} \text{sis}(X, g)^2$ .*

### 3.3.1. Área sistólica de grupos

En esta sección mostramos cómo derivar una desigualdad para el área sistólica para la clase de grupos de tipo superficie a partir de la generalización de la desigualdad sistólica de Guth. Recordamos la definición de grupos de tipo superficie dada en la Introducción.

**Definición 3.3.9.** Sea  $G$  un grupo. Decimos que  $G$  es de tipo superficie si existen clases  $\alpha, \beta$  en  $H^1(G, \mathbb{Z}_2)$  tales que  $\alpha \cup \beta \neq 0$  en  $H^2(G, \mathbb{Z}_2)$ .

La condición cohomológica en la definición de grupos de tipo superficie es por supuesto la traducción al contexto de grupos de la propiedad de tener cup-length con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  maximal para poliedros de dimensión 2. De la misma forma, la propiedad de un grupo de contener subgrupos de tipo superficie se traduce en el contexto de 2-poliedros como la propiedad de admitir revestimientos de cup-length con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  maximal. Así, obtenemos una desigualdad sistólica para grupos que contienen un subgrupo de tipo superficie a través del Corolario 3.3.8.

**Teorema 3.3.10.** *Sea  $G$  un grupo que contiene un subgrupo de tipo superficie  $T$ . Entonces,  $\sigma(G) \geq \frac{1}{2}$ .*

*Demostración.* Sea  $(X, g)$  un complejo riemanniano a trozos con grupo fundamental  $G$  y sea  $(\hat{X}, \hat{g})$  el revestimiento de  $X$  con grupo fundamental  $T$  equipado con la métrica pullback  $\hat{g}$ . Por el Corolario 3.3.8, la demostración se reduce a verificar que bajo las hipótesis sobre su grupo fundamental,  $\hat{X}$  debe tener cup-length con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  maximal. Notemos que el complejo  $\hat{X}$  es el 2-esqueleto de un CW-complejo esférico  $K$  (posiblemente de dimensión infinita). Luego,  $K$  es un espacio de Eilenberg-MacLane  $K(T, 1)$  y por lo tanto su anillo de cohomología  $H^*(K, \mathbb{Z}_2)$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  es isomorfo al anillo de cohomología  $H^*(T, \mathbb{Z}_2)$  de  $T$ . Por construcción, la inclusión  $\hat{X} \hookrightarrow K$  induce un isomorfismo  $H^1(K, \mathbb{Z}_2) = H^1(T, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(\hat{X}, \mathbb{Z}_2)$

y un monomorfismo  $H^2(K, \mathbb{Z}_2) = H^2(T, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(\hat{X}, \mathbb{Z}_2)$ . Como  $T$  es de tipo superficie, esto implica que  $\hat{X}$  tiene cup-length con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$  maximal.  $\square$

Hay muchas clases de grupos para las que la cota del Teorema 3.3.10 aplica. Para empezar, todos los grupos de superficie son de tipo superficie por la Dualidad de Poincaré, como también lo son los grupos abelianos libres de rango al menos 2, los 2-grupos elementales abelianos y también los grupos isomorfos a productos directos y libres de un grupo con un grupo de tipo superficie. Ejemplos de grupos que contienen grupos de superficie incluyen entre otros, grupos de Artin no libres, grupos que contienen un elemento de orden 2 (en particular, grupos de Coxeter) y grupos fundamentales infinitos de 3-variedades cerradas irreducibles. En efecto, los grupos de Artin contienen una copia de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  a menos que sean libres, mientras que los grupos con un elemento de orden 2 contienen una copia de  $\mathbb{Z}_2$ . Con respecto a los grupos de 3-variedades irreducibles, recordemos que la conjetura del subgrupo de superficie afirma que toda 3-variedad cerrada e irreducible con grupo fundamental infinito contiene una superficie cerrada inmersa y  $\pi_1$ -inyectiva. Esta conjetura fue resuelta por la afirmativa por Kahn y Markovic en [59] y así, por el Teorema 3.3.10 el área sistólica de grupos fundamentales infinitos de 3-variedades cerradas irreducibles también admite  $\frac{1}{2}$  como cota inferior.

Aunque la cota del Teorema 3.3.10 constituye una mejora sobre la cota inferior general  $\frac{1}{4}$  para el área sistólica de grupos no libres, existe aun un trecho entre ella y el óptimo conjeturado  $\frac{2}{\pi}$ . Cerramos esta sección mostrando que esto puede ser resuelto para los grupos fundamentales de superficies no orientables si asumimos una versión más fuerte de la Conjetura de Filling Area de Gromov. Una variedad riemanniana  $(M^{n+1}, g_M)$  es un *filling isométrico* de una variedad riemanniana  $(N^n, g_N)$  si  $\partial M = N$  y la restricción a  $N \times N$  de la función distancia  $d_{g_M}$  determinada por  $g_M$  coincide con  $d_{g_N}$ . Como será más claro en la sección siguiente, estimaciones del volumen de tales fillings podrían jugar un papel importante en geometría sistólica. La Conjetura de Filling Area afirma que el área mínima entre fillings orientables e isométricos del círculo equipado con su métrica riemanniana standard de longitud  $2\ell$  se alcanza en el hemisferio standard de área  $\frac{2}{\pi}\ell^2$ .

Sea  $(X, g)$  un 2-poliedro riemanniano a trozos con grupo fundamental isomorfo al grupo fundamental de una superficie no orientable y supongamos que  $h : S \rightarrow X$  representa la clase relevante de homología de  $H_2(X, \mathbb{Z}_2)$  con  $S$  una superficie conexa. Por la naturalidad de la sucesión exacta del teorema de coeficientes universales,  $S$  debe ser no orientable. A partir de ahora procedemos como en la demostración de [57, Proposition 3.1]. Tomemos el lazo más corto  $\gamma \in S$  tal que  $h_*[\gamma]$  es no trivial en  $\pi_1(X)$  y abramos  $S$  por  $\gamma$ . La superficie riemanniana resultante  $(\Sigma, \tilde{g})$  es un filling isométrico (posiblemente no orientable) de un círculo del doble de la longitud de  $\gamma$  y con la misma área que  $S$ . Si asumimos como válida la conclusión de la conjetura de Filling Area (incluso para fillings isométricos no orientables), tenemos  $\text{Area}(\Sigma, \tilde{g}) \geq \frac{2}{\pi}(\text{long}(\gamma))^2 \geq \frac{2}{\pi}(\text{sis}(X, g))^2$ . Luego, como  $\text{Area}(X, g) \geq \text{Area}(\Sigma, \tilde{g})$  concluimos que  $\sigma(X, g) \geq \frac{2}{\pi}$ . En particular, implicaría que  $\sigma(\mathbb{Z}_2) = \frac{2}{\pi}$ .

### 3.4. Área sistólica de un producto libre de grupos

Uno de los interrogantes abiertos fundamentales sobre el área sistólica de grupos es comprender la manera en que el área sistólica transforma un producto libre de grupos en términos de sus factores libres. Ya hemos visto que, dados grupos finitamente presentables  $G$  y  $H$ , se cumple la desigualdad  $\sigma(G * H) \leq \sigma(G) + \sigma(H)$ . Sería interesante saber si hay relaciones más estrechas

entre el área sistólica de  $G * H$  y el área sistólica de sus factores libres. Más concretamente: ¿vale la desigualdad  $\sigma(G * H) \geq C(\sigma(G) + \sigma(H))$  para alguna constante universal  $C > 0$ ? Aunque no logramos responder esta pregunta, nos proponemos describir en esta sección un abordaje posible para relacionar el área sistólica de un producto libre de grupos al área sistólica de sus factores libres.

Una primera aproximación natural para comparar el área sistólica de un grupo de la forma  $G * H$  con la de  $G$  y  $H$  iría como sigue. Tomemos un poliedro riemanniano a trozos  $(Y, g)$  que casi realiza el área sistólica  $\sigma(G * H)$ , es decir, tal que la razón  $\frac{\text{Area}(Y, g)}{\text{sis}(Y, g)^2}$  no exceda  $\sigma(G * H)$  más que un  $\varepsilon$  positivo fijo arbitrario. Fijemos también triangulaciones  $X_G, X_H$  de los grupos  $G$  y  $H$ , respectivamente. Dado que todos los poliedros involucrados son de dimensión 2 y el grupo fundamental de  $Y$  es isomorfo al de  $X_G \vee X_H$ , existe una aplicación lineal a trozos  $g : X_G \vee X_H \rightarrow Y$  que induce isomorfismo en el grupo fundamental (ver por ejemplo [78, Lemma 1.5]). Entonces, uno aspira a estimar el área sistólica de  $X_G \vee X_H$  dotado con la métrica riemanniana a trozos de pullback a través de la función  $g$  (estrictamente hablando, tal métrica podría ser degenerada pero puede ser aproximada por una no degenerada) en términos del área sistólica de  $Y$ . Desafortunadamente, no hay manera de controlar razonablemente el número de preimágenes de cada 2-símplex en  $Y$  por  $g$ , al menos hasta donde sabemos. Así, el área de  $X_G \vee X_H$  con la métrica inducida por  $g$  podría ser en potencia arbitrariamente más grande que el área de  $Y$ .

En vista de esto, partimos de la misma base pero en lugar de  $g$ , utilizamos una aplicación en la otra dirección. Es decir, tomamos una aplicación lineal a trozos  $f : Y \rightarrow X_G \vee X_H$  que induce un isomorfismo en el grupo fundamental. Esencialmente, la idea es dividir  $Y$  en  $f^{-1}(X_G)$  y  $f^{-1}(X_H)$  y tratar de estimar el área sistólica de estos dos subpoliedros de  $Y$ . Hagamos esta construcción más explícita. Fijemos triangulaciones de  $Y, X_G$  y  $X_H$  (que seguiremos denotando  $Y, X_G$  y  $X_H$ ) tales que la aplicación  $f : Y \rightarrow X_G \vee X_H$  es simplicial. Sea  $Y_G$  el subcomplejo de  $Y$  definido por  $Y_G := f^{-1}(X_G)$  e  $Y_H$  la clausura simplicial del complemento de  $Y_G$ , esto es, el subcomplejo de  $Y$  generado por los símplexes  $s$  tales que  $f(s) \not\subseteq X_G$ . Notemos que la unión de  $Y_G$  e  $Y_H$  cubre  $Y$  y que la intersección  $Y_G \cap Y_H$  es un complejo de dimensión 1 (posiblemente no conexo). Esta última característica es la razón principal de la falta de simetría en la definición de  $Y_G$  e  $Y_H$ ; más adelante adjuntaremos conos en  $Y_G \cap Y_H$  y necesitaremos mantener nuestras construcciones en el mundo 2-dimensional. El primer objetivo es obtener complejos con grupo fundamental  $G$  y  $H$  a partir de  $Y_G$  e  $Y_H$ . Para hacer esto, empezamos por establecer dos propiedades topológicas de la descomposición  $Y = Y_G \cup Y_H$  en el próximo lema.

**Lema 3.4.1.** *Sean  $Y_G$  e  $Y_H$  como arriba. Entonces,*

- *para cada componente conexa  $C$  de  $Y_G \cap Y_H$  la inclusión  $\iota_C : C \hookrightarrow Y$  induce el morfismo trivial  $\pi_1(C) \rightarrow \pi_1(Y)$ , y*
- *cada componente conexa de  $Y_G$  (simétricamente, de  $Y_H$ ) contiene al menos una componente conexa de  $Y_G \cap Y_H$ .*

*Demostración.* Para el primer ítem, denotemos  $v$  al punto wedge de  $X_G \vee X_H$  y notemos que  $f(C) = \{v\}$  para cada componente  $C$  de  $Y_G \cap Y_H$ . Luego,  $f \circ \iota_C$  induce el morfismo trivial  $\pi_1(C) \rightarrow \pi_1(X)$ . Como  $f$  induce un isomorfismo  $\pi_1(Y) \rightarrow \pi_1(X_G \vee X_H)$ , se deduce que  $\iota_* : \pi_1(C) \rightarrow \pi_1(Y)$  es trivial. Con respecto a la segunda afirmación, sean  $a$  y  $b$  vértices de  $Y_G$  e  $Y_H$  respectivamente. Como  $Y$  es conexo, existe un camino en el 1-esqueleto de  $Y$  que une  $a$  con  $b$ .

Si existe una primera arista en ese camino que no pertenece a  $Y_G$ , uno de sus extremos está en  $Y_G \cap Y_H$ . En el caso opuesto,  $b$  pertenece a la intersección  $Y_G \cap Y_H$ , lo que concluye la prueba.  $\square$

Como consecuencia, en el caso en que  $Y_G \cap Y_H$  sea conexo, no es difícil construir complejos con grupo fundamental  $G$  y  $H$  partiendo de  $Y_G$  e  $Y_H$ .

**Lema 3.4.2.** *Supongamos que  $Y_G \cap Y_H$  es conexo. Entonces, los grupos  $\pi_1(Y_G/(Y_G \cap Y_H))$  y  $\pi_1(Y_H/(Y_G \cap Y_H))$  son isomorfos a  $G$  y  $H$  respectivamente.*

*Demostración.* Notemos que  $Y_G$  e  $Y_H$  son conexos por el Lema 3.4.1 y que  $Y/(Y_G \cap Y_H)$  es homeomorfo a  $Y_G/(Y_G \cap Y_H) \vee Y_H/(Y_G \cap Y_H)$ , donde el punto wedge es la clase de  $Y_G \cap Y_H$  en el espacio cociente  $Y/(Y_G \cap Y_H)$ . Como  $f(Y_G \cap Y_H) = v$ , la aplicación  $f$  factoriza por una función continua  $g : Y_G/(Y_G \cap Y_H) \vee Y_H/(Y_G \cap Y_H) \rightarrow X_G \vee X_H$ . Por la primera afirmación del Lema 3.4.1, la aplicación cociente  $q : Y \rightarrow Y/(Y_G \cap Y_H)$  induce un isomorfismo en el grupo fundamental. Ahora, como  $f_*$  es un isomorfismo, la aplicación inducida en el grupo fundamental  $g_* : \pi_1(Y_G/(Y_G \cap Y_H)) * \pi_1(Y_H/(Y_G \cap Y_H)) \rightarrow G * H$  es un isomorfismo. Como  $g_*$  se restringe a morfismos  $\pi_1(Y_G/(Y_G \cap Y_H)) \rightarrow G$  y  $\pi_1(Y_H/(Y_G \cap Y_H)) \rightarrow H$ , se deduce que  $\pi_1(Y_G/(Y_G \cap Y_H))$  es isomorfo a  $G$  y, de la misma manera, que  $\pi_1(Y_H/(Y_G \cap Y_H))$  es isomorfo a  $H$ .  $\square$

Aunque es posible metrizar coherentemente el CW-complejo  $Y_G/(Y_G \cap Y_H)$ , el sístole de tal espacio es en potencia arbitrariamente pequeño, dado que puntos que están lejos en  $Y_G$  pueden quedar muy cerca en el espacio cociente. En cambio, podemos adjuntar por ejemplo un cono en la intersección  $Y_G \cap Y_H$  y trabajar con el complejo  $Y_G \cup C(Y_G \cap Y_H)$ , que es homotópicamente equivalente a  $Y_G/(Y_G \cap Y_H)$  por hechos standard de topología algebraica. El próximo resultado se encarga del caso general, en el cual  $Y_G \cap Y_H$  no es necesariamente conexa,

**Lema 3.4.3.** *Sean  $Y_G$  e  $Y_H$  los complejos simpliciales definidos arriba. Entonces, existe un CW-complejo  $\tilde{Y}$  de dimensión 2 que contiene a  $Y$ , junto con una extensión  $\tilde{f} : \tilde{Y} \rightarrow X_G \vee X_H$  de  $f$  que también induce isomorfismo en el grupo fundamental tal que  $\tilde{Y}$  se descompone como la unión de subcomplejos  $\tilde{Y}_G, \tilde{Y}_H$  que intersecan en un grafo conexo. Además la inclusión  $\tilde{Y}_G \cap \tilde{Y}_H \hookrightarrow \tilde{Y}$  induce el morfismo trivial en el grupo fundamental.*

*Demostración.* Esto fue probado esencialmente por Stallings en [79, Theorem 3.2]. Mostramos cómo adaptar sus argumentos en este contexto. Supongamos que  $Y_G \cap Y_H$  no es conexo y tomemos un camino simplicial  $\gamma$  en  $Y$  que une dos componente conexas diferentes de  $Y_G \cap Y_H$ . Notemos que  $f \circ \gamma$  determina un lazo basado en  $v$  en  $X_G \vee X_H$  (donde  $v$  es el punto wedge). Como la aplicación  $f_*$  inducida en el grupo fundamental por  $f$  es sobreyectiva, existe un lazo (simplicial)  $\alpha$  en  $Y$  basado en  $\gamma(0)$  así que  $[f \circ \gamma] = [f \circ \alpha]$  en  $\pi_1(X_G \vee X_H, v)$ . Luego, si ponemos  $\lambda = \alpha^{-1} * \gamma$ , el lazo  $f \circ \lambda$  es null-homotópico en  $X_G \vee X_H$ . Claramente, podemos escribir  $\lambda$  como una concatenación  $\lambda = \lambda_1 * \lambda_2 * \dots * \lambda_r$ , donde cada  $\lambda_i$  es un camino completamente contenido en  $Y_G$  o  $Y_H$  y ningún par de caminos consecutivos están contenidos en el mismo subcomplejo. En particular,  $f$  envía los extremos de estos caminos a  $v$  y así cada  $f \circ \lambda_i$  define un lazo en  $X_G \vee X_H$ . Como  $[f \circ \lambda] = [f \circ \lambda_1] * [f \circ \lambda_2] * \dots * [f \circ \lambda_r]$  en  $\pi_1(X_G \vee X_H, v) = G * H$ , existe un índice  $i$  tal que  $f \circ \lambda_i$  es null-homotópica en  $X_G$  o  $X_H$  según  $\lambda_i$  esté contenida en  $Y_G$  o  $Y_H$ . Si ambos extremos de  $\lambda_i$  están en la misma componente conexa de  $Y_G \cap Y_H$  podemos reemplazarlo por otro camino  $\lambda'_i$  contenido en  $Y_G \cap Y_H$  y anexarlo a  $\lambda_{i+1}$  para conseguir una descomposición  $\lambda = \lambda_1 * \dots * \lambda_{i-1} * (\lambda'_i * \lambda_{i+1}) * \dots * \lambda_r$ . Por inducción en  $r$ , existe algún camino  $\lambda_j$  que une dos

componentes conexas distintas de  $Y_G \cap Y_H$  tal que  $f \circ \lambda_j$  es un lazo null-homotópico en  $X_G \vee X_H$ . Consideremos el mapping cylinder  $M_\lambda$  de la función  $\lambda : I \rightarrow Y$ . Como  $f \circ \lambda$  es homotópica a la función constante  $v$  en  $X_G \vee X_H$ , podemos extender  $f$  a  $M_\lambda$  usando la null-homotopía de  $\lambda$  en la nueva 2-celda cilíndrica  $e = I \times I$ . En particular, la imagen de  $e$  por la extensión está completamente contenida en  $X_G$  o  $X_H$  y es constantemente  $v$  en la parte libre del borde  $\ell$ , esto es,  $\ell = \partial(I \times I) \setminus (I \times 0)$  (ver Figura 3.3). Tomemos  $\tilde{Y}_G$  como  $Y_G \cup e$  o  $Y_G \cup \ell$ , según  $\lambda_i \subseteq Y_G$

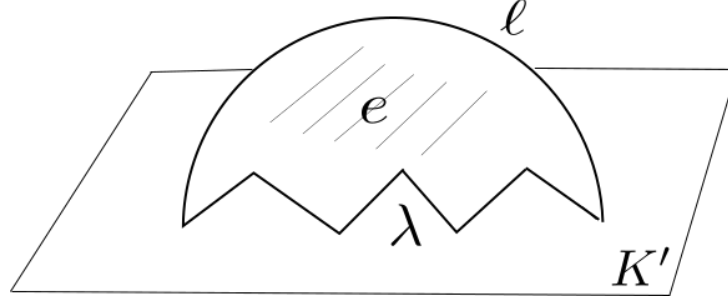


Figura 3.3: Ilustración esquemática del mapping cylinder de  $\lambda$ .

o no y definamos  $\tilde{Y}_H$  análogamente. Por construcción,  $\tilde{Y}_G \cap \tilde{Y}_H = (Y_G \cap Y_H) \cup \ell$ . Después de un número finito de pasos, obtenemos un CW-complejo  $\tilde{Y}$  de dimensión 2, una extensión continua  $\tilde{f} : \tilde{Y} \rightarrow X_G \vee X_H$  de la función  $f$  y subcomplejos  $\tilde{Y}_G, \tilde{Y}_H$  que cubren  $\tilde{Y}$  e intersecan en un subcomplejo conexo 1-dimensional. Como la inclusión  $Y \hookrightarrow \tilde{Y}$  es una equivalencia homotópica, vemos que  $\tilde{f}$  induce un isomorfismo en el grupo fundamental. Finalmente, para la última parte del enunciado notemos que  $\tilde{f}(\tilde{Y}_G \cap \tilde{Y}_H) = \{v\}$  y como  $\tilde{f}_*$  es un isomorfismo y el morfismo inducido por la inclusión  $\pi_1(\tilde{Y}_G \cap \tilde{Y}_H) \rightarrow \pi_1(\tilde{Y})$  es trivial. La conclusión sigue del argumento en la demostración del Lema 3.4.1.  $\square$

Por supuesto, también necesitamos encargarnos del área y el sístole del complejo resultante  $\tilde{Y}$ . Definimos el área sistólica  $\sigma(X, g)$  de un poliedro riemanniano a trozos  $(X, g)$  de dimensión 2 como el cociente

$$\sigma(X, g) := \frac{\text{Area}(X, g)}{\text{sis}(X, g)^2}.$$

Mostramos a continuación cómo equipar con una métrica riemanniana a trozos los mapping cylinders que aparecen en la demostración del último lema de manera que el área sistólica es casi preservada.

**Lema 3.4.4.** *Sea  $(Y, g)$  un poliedro compacto riemanniano a trozos de dimensión 2. Sea  $\lambda : I \rightarrow Y$  una aplicación lineal, no degenerada (esto es, una aplicación que preserva la dimensión de los símplexes). Entonces, dado un  $\varepsilon > 0$ , hay una métrica riemanniana a trozos  $g'$  sobre el mapping cylinder  $M_\lambda$  tal que  $\sigma(M_\lambda, g') \leq \sigma(Y, g) + \varepsilon$ .*

*Demostración.* Necesitamos definir una métrica riemanniana a trozos conveniente en el cuadrado  $I \times I$  que es pegado en  $I \times 0$  a  $Y$  a través de la aplicación  $\lambda : I \rightarrow Y$ . Para hacer esto, comenzamos por fijar una triangulación de  $Y$  que sea lo suficientemente fina como para que la inclusión de los símplexes en  $Y$  sea un embedding isométrico (ver [23, Lemma 7.9]). Triangulamos  $I = I \times 0$  de manera acorde y dotamos a sus 1-símplexes con la métrica riemanniana de sus imágenes en



$Y$  por  $\lambda$ . Extendemos esta triangulación a  $I \times I$  y consideramos la métrica producto declarando el intervalo correspondiente a la segunda coordenada (la coordenada vertical) como un intervalo euclídeo de longitud  $\delta$  para algún  $\delta < \frac{\varepsilon}{\text{long}(\lambda)}$ . Así, obtenemos una métrica riemanniana a trozos en  $I \times I$  tal que  $\text{Area}(I \times I) < \varepsilon$ . Consideremos ahora la relación de equivalencia en  $I \times I$  generada por identificar  $(x, 0) \sim (y, 0)$  siempre que  $\lambda(x) = \lambda(y)$ . Como  $\lambda$  es no degenerada por hipótesis, la función cociente  $q : I \times I \rightarrow I \times I / \sim$  preserva la dimensión de los símplexes. Para metrizar cada símplex  $q(\sigma) \in I \times I / \sim$  lo declaramos como isométrico a  $\sigma \in I \times I$ , así que  $q$  es una isometría local. Ahora, dotemos a  $M_\lambda$  con la métrica riemanniana a trozos que se obtiene de  $I \times I / \sim$  e  $Y$ . Resulta claro que para esta métrica,  $\text{Area}(M_\lambda) < \text{Area}(Y) + \varepsilon$ . Resta estimar el sístole de  $M_\lambda$ . En primer lugar, notemos que  $M_\lambda$  se obtiene de identificar por una isometría local y biyectiva los subespacios  $I \times \{0\} / \sim$  de  $I \times I / \sim$  y  $\lambda(I)$  de  $Y$ . Luego, la métrica riemanniana a trozos resultante  $g'$  en  $M_\lambda$  se restringe a las métricas originales en el interior de cada espacio, esto es, el complemento del subespacio donde se produce la identificación (ver [23, Chapter I.5] para más información sobre las métricas cociente). Sea  $\gamma$  un lazo no trivial en  $M_\lambda$ . Sea  $p : M_\lambda \rightarrow Y$  el retracto por deformación fuerte canónico. Entonces  $p \circ \gamma$  es un lazo no trivial en  $Y$  y luego  $\text{long}(p \circ \gamma, g) \geq \text{sis}(Y, g)$ . Supongamos que  $\eta$  es una porción de  $\lambda$  contenida en  $(I \times I / \sim) \setminus (I \times \{0\} / \sim)$ . Entonces, hay un levantamiento continuo  $\tilde{\eta}$  de  $\eta$  a  $I \times I$ . Como la función  $q : I \times I \rightarrow I \times I / \sim$  es una isometría local,  $\text{long}(\tilde{\eta}) = \text{long}(q \circ \tilde{\eta}) = \text{long}(\eta)$ . Pero  $\text{long}(\tilde{\eta}) \geq \text{long}(pr(\tilde{\eta}))$ , donde  $pr$  es la proyección a la base del cilindro. Se deduce que  $\text{long}(\gamma, g') \geq \text{long}(p \circ \gamma, g)$  y por lo tanto  $\text{sis}(M_\lambda, g') \geq \text{sis}(Y, g)$ . Esto muestra que  $\sigma(M_\lambda, g') \leq \sigma(Y, g) + \varepsilon$ , como deseamos.  $\square$

En conclusión, dado un  $\varepsilon > 0$ , por los Lemas 3.4.3 y 3.4.4, existe un poliedro riemanniano a trozos  $(Y, g)$  que triangula  $G * H$  con  $\sigma(Y, g) < \sigma(G * H) + \varepsilon$  y tal que los subpoliedros  $Y_G$  e  $Y_H$  antes definidos intersecan en un grafo conexo. Como observamos en el párrafo que sigue al Lema 3.4.2, en tales condiciones el complejo obtenido a partir de  $Y_G$  adjuntando un cono en  $Y_G \cap Y_H$  tiene grupo fundamental isomorfo a  $G$ . La dificultad reside en equipar al cono  $C(Y_G \cap Y_H)$  con una métrica riemanniana a trozos de modo tal que tanto el área como el sístole del poliedro riemanniano a trozos resultante  $Y_G \cup C(Y_G \cap Y_H)$  sean controlables. Describimos a continuación una condición sobre una métrica riemanniana a trozos en el cono que permite estimar el sístole de todo el espacio .

Llamemos  $d_{Y_H}$  a la distancia inducida por la métrica riemanniana a trozos  $g$  en  $Y_H$  y consideremos  $d_{Y_H}|_{Y_G \cap Y_H}$ . Esta función distancia en el grafo  $Y_G \cap Y_H$  es típicamente no riemanniana, lo que quiere decir que no está inducida por ninguna métrica riemanniana a trozos (para convencerse de esto, considerar por ejemplo la distancia inducida en la 1-esfera por la métrica plana standard en el disco). Digamos que una métrica riemanniana a trozos  $h$  en el cono  $C(Y_G \cap Y_H)$  es *homotópicamente filling* para  $(Y_G \cap Y_H, d_{Y_H}|_{Y_G \cap Y_H})$  si la distancia inducida  $d_h$  cumple  $d_h|_{Y_G \cap Y_H} \geq d_{Y_H}|_{Y_G \cap Y_H}$ . Notemos que tales métricas existen. En efecto, notemos en primer lugar que la distancia intrínseca determinada por la métrica riemanniana a trozos en  $Y_G \cap Y_H$  es mayor o igual a la inducida  $d_{Y_H}|_{Y_G \cap Y_H}$ . Esto es así simplemente porque puede haber caminos en  $Y_H$  que no estén contenidos en  $Y_G \cap Y_H$ , unan dos puntos de la intersección y sean más cortos el camino más corto en  $Y_G \cap Y_H$ . Ahora, para construir una métrica homotópicamente filling en el cono, alcanza con dotar a sus 2-símplexes con una métrica *redonda* que no introduzca atajos. Por ejemplo, si  $Y_G \cap Y_H$  fuese un círculo topológico, el cono con tal métrica sería isométrico al hemisferio redondo standard. No es difícil extender esta idea a cualquier grafo finito, ver [76, Appendix A].

**Lema 3.4.5.** *Sea  $h$  una métrica riemanniana a trozos homotópicamente filling en  $C(Y_G \cap Y_H)$  para  $(Y_G \cap Y_H, d_{Y_H}|_{Y_G \cap Y_H})$ . Entonces, para la métrica riemanniana a trozos resultante  $g'$  se verifica*

$$\text{sis}(Y_G \cup C(Y_G \cap Y_H), g') \geq \text{sis}(Y, g).$$

*Demostración.* Sea  $\gamma$  un lazo no trivial en  $Y_G \cup C(Y_G \cap Y_H)$ . Tras hacer una pequeña perturbación, podemos suponer que  $\gamma$  interseca transversalmente a  $Y_G \cap Y_H$ . Sea  $\eta$  una porción de  $\gamma$  contenida en  $C(Y_G \cap Y_H)$ , con extremos distintos (si fueran iguales, podríamos ignorar esta parte y obtener un lazo no trivial  $\gamma'$  más corto) en  $Y_G \cap Y_H$ . Como por hipótesis la función distancia en el cono no es menor a  $d_{Y_H}|_{Y_G \cap Y_H}$ , existe un camino  $\tilde{\eta}$  en  $Y_H$  de longitud  $\leq \text{long}(\eta, h)$ . Después de un número finito de iteraciones, obtenemos de esta forma un lazo  $\tilde{\gamma}$  en  $Y = Y_G \cup Y_H$  de longitud a lo sumo  $\text{long}(\gamma, g')$  tal que las restricciones de  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$  a  $Y_G$  coinciden. Debemos probar que  $\tilde{\gamma}$  es un lazo no trivial en  $\pi_1(Y)$ . Notemos que los espacios cocientes  $Y/Y_H$  y  $Y_G \cup C(Y_G \cap Y_H)/C(Y_G \cap Y_H)$  son naturalmente homeomorfos. Además, los lazos  $q \circ \gamma$  en  $Y_G \cup C(Y_G \cap Y_H)/C(Y_G \cap Y_H)$  y  $p \circ \tilde{\gamma}$  en  $Y/Y_H$  coinciden tras aplicar el homeomorfismo natural  $Y/Y_H \rightarrow Y_G \cup C(Y_G \cap Y_H)/C(Y_G \cap Y_H)$ , donde  $q$  y  $p$  son, respectivamente, las aplicaciones cociente  $q : Y_G \cup C(Y_G \cap Y_H) \rightarrow Y_G \cup C(Y_G \cap Y_H)/C(Y_G \cap Y_H)$  y  $p : Y \rightarrow Y/Y_H$ . Dado que  $q$  induce un isomorfismo en grupos fundamentales porque  $C(Y_G \cap Y_H)$  es simplemente conexo,  $q \circ \gamma$  y en consecuencia,  $p \circ \tilde{\gamma}$  son lazos no triviales. Se sigue que la clase de  $\tilde{\gamma}$  es no trivial en  $\pi_1(Y)$  y por lo tanto,  $\text{sis}(Y, g) \leq \text{long}(\tilde{\gamma}, g) \leq \text{long}(\gamma, g')$ . Esto completa la prueba.  $\square$

Notemos que en realidad la única propiedad del cono  $C(Y_G \cap Y_H)$  que fue utilizada en el lema es que es simplemente conexo. Luego, podríamos considerar distintos poliedros riemannianos a trozos  $Z$  de dimensión 2 para “llenar” el grafo  $Y_G \cap Y_H$ , siempre y cuando contengan una copia homeomorfa del grafo, sean simplemente conexas y sus métricas cumplan la propiedad de ser homotópicamente filling. Formalizamos esta idea enunciando una suerte de *problema de Plateau homotópico*.

Sea  $P$  un complejo finito 1-dimensional con una distancia  $d$ , no necesariamente riemanniana a trozos. Decimos que un poliedro riemanniano a trozos  $(X, g)$  de dimensión 2 es un *filling homotópico* de  $(P, d)$  si existe un embedding  $\iota : P \rightarrow X$  que induce el morfismo trivial en grupos fundamentales tal que

$$d(x, y) \leq d_g(\iota(x), \iota(y))$$

para cada  $x, y \in P$ , donde  $d_g$  es por supuesto la distancia inducida en  $X$  por la estructura riemanniana a trozos  $g$ . Utilizando por ejemplo la métrica redonda mencionada en el cono de  $P$ , vemos que el área mínima de un filling homotópico (o incluso el filling homotópico simplemente conexo) de  $(P, d)$  es finita.

En este lenguaje, para aplicar de forma útil el Lema 3.4.5 para estimar el área sistólica de  $G * H$ , necesitaríamos estimar el área del filling homotópico simplemente conexo mínimo de  $(Y_G \cap Y_H, d_{Y_H}|_{Y_G \cap Y_H})$ . Como la meta es relacionar el área del espacio resultante al de  $Y = Y_G \cup Y_H$ , la métrica redonda en el cono es en general prohibitivamente grande, pues su área es proporcional a la longitud del grafo. No tenemos una cota efectiva para el área de fillings homotópicos (simplemente conexos); abajo especulamos de qué manera una tal estimación podría ser establecida.

Los filling homotópicos están relacionados con el *filling volume* de variedades, una noción definida por Gromov en [44, §2.2]. Sea  $V$  una variedad compacta null-cobordante con una distancia

$d$  (no necesariamente riemanniana). El *filling volume*  $\text{FillVol}(V)$  de  $V$  es el mínimo volumen de aquellas variedades riemannianas  $(W, g)$  tales que  $\partial W = V$  y  $d_g|_V \geq d$ , es decir,

$$d_g(x, y) \geq d(x, y)$$

para todo  $x, y \in V$ . Llamemos a una variedad  $W$  un *filling* de  $V$  si su borde es homeomorfo a  $V$ . Los fillings en la definición deberían ser orientables si la variedad  $V$  es orientable. En [44, Appendix 2] se demuestra que el filling volume de una variedad null-cobordante de dimensión  $n \geq 2$  es independiente de la topología del filling. Esto significa que el ínfimo se alcanza dentro del tipo topológico de cada filling de  $V$ . En cambio, en dimensión 1 el filling volume puede depender de la topología del filling (ver [44, §2.2.B Counterexamples]).

El valor del filling volume no es conocido para ninguna variedad riemanniana. La Conjetura de Filling Area de Gromov que enunciamos hacia el fin de §3.3.1, asevera que el hemisferio redondo tiene el área mínima entre los fillings del círculo con su métrica riemanniana standard. Gromov probó que el hemisferio redondo es el filling óptimo del círculo riemanniano standard si uno se restringe a los fillings simplemente conexos (esto es una consecuencia de la desigualdad de Pu's, Teorema 3.2.1, para el plano proyectivo). En [7], los autores extendieron la conclusión a superficies de género 1, pero las técnicas utilizadas no aplican a superficies generales de género  $\geq 2$ . Sin embargo, notablemente, se sabe que el hemisferio redondo es *gruesamente* el filling óptimo para el círculo riemanniano standard, como muestra el siguiente resultado de Ivanov y Katz.

**Proposición 3.4.6.** ([57, Proposition 3.1]) *Sea  $(\Sigma, g)$  un filling (no necesariamente orientable) de  $S^1$  tal que su función distancia  $d_g$  restringida al borde  $\partial\Sigma = S^1$  es mayor o igual a la función distancia  $d_{g_0}$ , donde  $g_0$  es la métrica riemanniana standard en  $S^1$ . Entonces,*

$$\text{Area}(\Sigma, g) \geq \frac{\pi}{4} \text{Area}(H),$$

donde  $H$  es el hemisferio redondo.

*Demostración.* Podemos asumir que el filling  $(\Sigma, g)$  es isométrico, es decir, que la función distancia  $d_g|_{S^1}$  coincide con  $d_{g_0}$ . En efecto, procedemos como en [30, Remark 6.4] para mostrar esto. Para un  $\varepsilon > 0$  arbitrario, consideramos la siguiente métrica riemanniana  $g_\varepsilon$  en el collar  $S^1 \times I$ :

$$g_\varepsilon := tg_0 + (1-t)g|_{S^1} + \varepsilon^2 dt^2.$$

Así,  $g_\varepsilon$  se restringe a  $g_0$  en  $S^1 \times \{1\}$  y a  $g|_{S^1}$  en  $S^1 \times \{0\}$ , y el área del collar  $(S^1 \times I, g_\varepsilon)$  tiende claramente a 0 cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Además, dado que  $g|_{S^1} \geq g_0$  por hipótesis, tenemos que  $g_\varepsilon \geq g_0 + \varepsilon^2 dt^2$ , de donde surge que las curvas en el collar entre puntos  $x$  e  $y$  en  $S^1 \times \{1\}$  tienen longitud mayor o igual a  $d_{g_0}(x, y)$ . Pegando el collar a  $\Sigma$ , obtenemos un filling isométrico  $(\Sigma \cup S^1 \times I, \bar{g}_\varepsilon)$  de área arbitrariamente cercana a  $\text{Area}(\Sigma, g)$ .

Fijemos ahora dos puntos  $x_0, x_1$  en  $S^1$  con  $d_{g_0}(x, y) = \frac{\pi}{2}$ . Consideremos la aplicación  $f : \Sigma \rightarrow \ell_2^\infty = (R^2, \|\cdot\|_{\ell^\infty})$  definida por  $f(x) = (d_g(x, x_0), d_g(x, x_1))$ . La idea de la demostración consiste en que, como la función  $f$  es contractiva, el área de la imagen de  $f$  debería estar acotada por el área de  $\Sigma$ . Aquí, entenderemos que el área de una superficie Finsler es su volumen riemanniano inscripto de Ivanov (ver [56, Example 4.4]), que coincide con la la noción usual de volumen para variedades riemannianas y subconjuntos de espacios euclídeos. Calculamos ahora la imagen de  $f$ .

Notemos que, puesto que  $d_g$  es isométrico a la distancia riemanniana standard en  $S^1$ , la imagen de  $\partial\Sigma = S^1$  es el borde de una bola  $\ell^1$  centrada en  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  de radio  $\frac{\pi}{2}$ . Como la 1-cadena  $\partial\Sigma$  es un borde en  $\Sigma$  y  $f$  es continua, también la 1-cadena  $f(\partial\Sigma)$  es un borde en  $f(\Sigma) \subseteq \mathbb{R}^2$ . Supongamos que existe un punto  $y$  del interior de la bola  $\ell^1$  de centro  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  y radio  $\frac{\pi}{2}$  que no está contenido en  $f(\Sigma)$ . Entonces, la aplicación  $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$  envía la 1-cadena  $\partial\Sigma$  a un generador de  $H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}) = \mathbb{Z}$ , lo cual es una contradicción. Se deduce que  $f(\Sigma)$  contiene el interior de  $f(\partial\Sigma)$  y luego

$$\text{Area}(\Sigma, g) \geq \text{Area} f(\Sigma) \geq \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{4} \text{Area}(H).$$

□

Interpretado en términos de fillings homotópicos, el Lema 3.4.6 enuncia que, si restringimos los fillings a ser variedades, existe una constante universal  $C > 0$  (más precisamente,  $C \geq \frac{\pi}{4}$ ) tal que para cada filling homotópico (que sea una variedad)  $(X, g)$  de  $S^1$  con su métrica riemanniana standard,

$$\text{Area}(X, g) \geq C \inf \text{Area}(Z, h),$$

donde el ínfimo es tomado sobre los fillings homotópicos simplemente conexos (y que son variedades)  $(Z, h)$  de  $S^1$ .

Por analogía, se podría preguntar si existe una constante positiva que relaciona el área de un filling homotópico simplemente conexo con el área de fillings homotópicos generales para otros complejos de dimensión 1 y otras funciones distancia. Si esto valiera con mayor generalidad, por ejemplo, dado que la inclusión  $Y_G \cap Y_H \rightarrow Y$  es trivial en grupos fundamentales, el área de  $Y$  acotaría salvo una constante el área de un filling homotópico mínimo simplemente conexo de  $(Y_G \cap Y_H, d_Y|_{Y_G \cap Y_H})$ . Supongamos por un momento que la misma conclusión fuera obtenida para el espacio métrico  $(Y_G \cap Y_H, d_{Y_H}|_{Y_G \cap Y_H})$ . Entonces, para un cierto filling homotópico simplemente conexo de  $(Y_G \cap Y_H, d_{Y_H}|_{Y_G \cap Y_H})$ , digamos,  $(Z, h)$ , tendríamos

$$\text{Area}(Y, g) \geq C \text{Area}(Z, h),$$

para una constante universal  $C > 0$ . Por el argumento del Lema 3.4.5, el área sistólica del espacio  $Y_G \cup Z$  con la métrica riemanniana a trozos resultante  $g'$  cumpliría la desigualdad

$$\sigma(Y_G \cup Z, g') \leq (1 + C)\sigma(Y, g), \quad (3.1)$$

y luego,  $\sigma(G) \leq C'\sigma(G * H)$  para  $C' = 1 + C$ .

Sin embargo, incluso si el resultado de comparación entre el área de fillings homotópicos y fillings homotópicos simplemente conexos del mismo espacio de dimensión 1 puede ser establecido, la demostración de la desigualdad (3.1) no sería inmediata. En concreto, la cota del Lema 3.4.5 aplica en principio a  $Y_G \cap Y_H$  con la distancia inducida por  $Y_H$  en lugar de la distancia inducida por  $Y$ , que es en general más chica, es decir,  $d_Y|_{Y_G \cap Y_H} \leq d_{Y_H}|_{Y_G \cap Y_H}$ . Una manera posible de resolver esto es encontrar un subgrafo  $L \leq Y_G \cap Y_H$  tal que la inclusión  $L \rightarrow Y$  es trivial en grupos fundamentales y el grupo fundamental de  $Y_G/L$  es isomorfo a  $G$ . Esto se correspondería intuitivamente a anular solo algunas de las clases de homotopía de lazos en  $\pi_1(Y_G)$  que provienen de la inclusión  $Y_G \cap Y_H \hookrightarrow Y_G$ , las que son necesarias cocientar de  $\pi_1(Y_G)$  para obtener el grupo  $G$ .

## Capítulo 4

# Una aproximación discreta para el área sistólica

La *complejidad simplicial* es un invariante combinatorio para grupos finitamente presentables que fue introducido recientemente por Babenko, Balacheff y Bulteau en [4]. Su definición está motivada por el estudio del área sistólica de grupos. Como mostraron los autores en el trabajo citado, la complejidad simplicial  $\kappa(G)$  de un grupo  $G$  constituye una buena aproximación al área sistólica de  $\sigma(G)$  para valores grandes de  $\kappa(G)$ . En vista de este resultado, tiene sentido abordar problemas sobre el área sistólica analizando las preguntas análogas para la complejidad simplicial. Por ejemplo, uno puede estimar el área sistólica de grupos calculando su complejidad simplicial o incluso intentar obtener información sobre aspectos estructurales del área sistólica, como su comportamiento respecto del producto libre de grupos, estudiando el problema en el contexto de la complejidad simplicial.

En la primera sección brindamos una introducción a la complejidad simplicial de grupos y algunas de sus propiedades básicas. El grueso del capítulo está dedicado a la solución parcial de dos problemas formulados por Babenko, Balacheff y Bulteau, que ocupa las siguientes tres secciones. En primera instancia, calculamos la complejidad simplicial de todos los grupos de superficie, tanto orientables como no orientables. Después, extendiendo las mismas técnicas, mostramos que  $\kappa(G * \mathbb{Z}) = \kappa(G)$  para cualquier grupo de superficie  $G$ . Filosóficamente, este resultado dice que un modelo topológico óptimo para un grupo de la forma  $\pi_1(S) * \mathbb{Z}$ , donde  $S$  es una superficie cerrada, está dado por el wedge de  $S$  con  $S^1$ . Constituye también la primera evidencia parcial a favor de la conjetura de la estabilidad de la complejidad simplicial con respecto al producto libre con grupos libres. Sin embargo, el problema general de estabilidad permanece abierto. En la última sección del capítulo discutimos una estrategia potencial para abordar otras instancias del problema, partiendo de una construcción similar a la descrita en la sección final del Capítulo 3.

### 4.1. La complejidad simplicial de grupos

Recordemos que dado un grupo  $G$ , llamamos a un complejo simplicial una *triangulación* de  $G$  si su grupo fundamental es  $G$ . La *complejidad simplicial*  $\kappa(G)$  de un grupo finitamente presentado es el mínimo número de 2-símplices en una triangulación de  $G$  (ver [4, Definition 2.1]).

Aquí,  $\kappa(G)$  puede ser pensado como una versión discreta del área para el grupo  $G$ . En efecto, uno puede considerar una triangulación mínima de  $G$  como un objeto geométrico declarando a cada 2-símplex como un triángulo equilátero euclídeo de área 1. En esta sección, cubrimos las propiedades básicas de la complejidad simplicial y damos estimaciones para el invariante en ciertas clases de grupos.

El primer aspecto interesante por explorar es la manera en que la complejidad simplicial mide la complejidad de los grupos. En este sentido, los grupos libres son los grupos más simples con respecto al invariante. En efecto, es claro que  $\kappa(F) = 0$  para todo grupo libre de rango finito  $F$  puesto que un bouquet de la cantidad apropiada de 1-esferas triangula a  $F$  sin usar 2-símplices. Por otra parte, la complejidad simplicial de grupos no libres es estrictamente positiva, dado que el grupo fundamental de un complejo de dimensión 1 es siempre libre. En este aspecto, la complejidad simplicial es completamente análoga al área sistólica. Otra característica destacada es la subaditividad con respecto al producto libre de grupos: dados grupos finitamente presentables  $G_1$  y  $G_2$ , tenemos

$$\kappa(G_1 * G_2) \leq \kappa(G_1) + \kappa(G_2).$$

Pues, si  $K_1, K_2$  son triangulaciones de  $G_1$  y  $G_2$  respectivamente, el wedge  $K_1 \vee K_2$  triangula  $G_1 * G_2$ . A diferencia del caso del área sistólica, se sabe que el wedge no es, en general, la manera más efectiva de producir un modelo para  $G_1 * G_2$  con respecto a la complejidad simplicial. Para ver esto, supongamos que  $G_1$  y  $G_2$  no son libres y consideremos el modelo de  $G_1 * G_2$  obtenido mediante pegar  $K_1$  y  $K_2$  en un 2-símplex (o más generalmente, en cualquier subcomplejo simplemente conexo de ambos); este complejo tiene estrictamente menos de  $\kappa(G_1) + \kappa(G_2)$  2-símplices. Sin embargo, si uno de los dos grupos es libre es un problema abierto determinar si la desigualdad es estricta. En otras palabras: ¿vale la identidad  $\kappa(G * \mathbb{Z}) = \kappa(G)$  para cualquier grupo finitamente presentable  $G$ ? Una respuesta afirmativa para esta cuestión implicaría que la manera natural de extender una triangulación óptima de un grupo  $G$  a una triangulación de  $G * \mathbb{Z}$  sin agregar 2-símplices es la óptima. En §4.4 mostramos que este es en efecto el caso cuando  $G$  es el grupo fundamental de una superficie cerrada.

El cálculo del valor exacto de la complejidad simplicial, como puede sospecharse de la definición, es difícil incluso para grupos específicos. En este sentido, la complejidad simplicial era conocida para unos pocos grupos, debido a un trabajo de Bulteau [25].

**Teorema 4.1.1.** *Valen las siguientes igualdades:*

$$\kappa(\mathbb{Z}_2) = 10, \kappa(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}) = 14, \kappa(K_2) = 16, \kappa(\mathbb{Z}_3) = 17,$$

donde  $K_2$  denota el grupo fundamental de la botella de Klein. Además la complejidad simplicial de los grupos de superficie  $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  y  $K_2$  se alcanza en triangulaciones óptimas de las superficies correspondientes.

Este resultado es obtenido mediante una combinación de ciertas observaciones sobre la estructura local de triangulaciones óptimas para grupos y un análisis exhaustivo de los 2-complejos con a lo sumo 17 2-símplices. Bulteau conjeturó en [25] que, tal como sucede en los casos del plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$ , el toro  $\mathbb{T}^2$  y la botella de Klein, una triangulación mínima de la superficie cerrada  $S$  es también óptima para su grupo fundamental  $\pi_1(S)$ . Verificamos esta conjetura en §4.4.

Aunque no existen, al menos hasta donde sabemos, otros grupos para los cuales la complejidad simplicial es conocida, contamos con algunas cotas para ciertas clases de grupos. Por ejemplo, se sabe que el orden de crecimiento preciso de la complejidad simplicial de grupos abelianos libres  $\kappa(\mathbb{Z}^n)$  con respecto al rango  $n$  es  $n^2$  [4, Example 2].

**Lema 4.1.2.** *Se tienen las siguientes cotas para la complejidad simplicial del grupo  $\mathbb{Z}^n$ :*

$$\frac{1}{2}n(n-1) \leq \kappa(\mathbb{Z}^n) \leq 7n(n-1).$$

*Demostración.* Notar que el toro  $n$ -dimensional  $\mathbb{T}^n$  es un espacio  $K(\mathbb{Z}^n, 1)$ . Para la cota inferior, sea  $K$  una triangulación de  $\mathbb{Z}^n$  de dimensión 2. Como  $K$  es el 2-esqueleto de un CW-complejo esférico, vemos el grupo abeliano libre  $H_2(K, \mathbb{Z})$  tiene rango al menos  $\binom{n}{2}$ , el rango de  $H_2(\mathbb{T}^n, \mathbb{Z})$ . Se deduce que  $K$  debe tener al menos  $\binom{n}{2}$  2-símplices. Para probar la cota superior, alcanza con observar que el 2-esqueleto de  $\mathbb{T}^n$  está formado por la unión de  $\binom{n}{2}$  toros de dimensión 2. Como es posible triangular  $\mathbb{T}^2$  usando 14 2-símplices, se concluye el resultado.  $\square$

El rasgo fundamental de la complejidad simplicial es que aproxima asintóticamente el área sistólica de grupos no libres.

**Teorema 4.1.3.** ([4, Theorem 1.2]) *Sea  $G$  un grupo no libre. Entonces,*

$$2\pi\sigma(G) \leq \kappa(G) \leq 625(502 \cdot \sigma(G))^{1 + \frac{2(1+\ln 5)}{\sqrt{\ln(502 \cdot \sigma(G))}}}.$$

Mostraremos el argumento para la cota inferior, que es elemental. La demostración de la cota superior es más compleja y explota el argumento de cubrimientos de Gromov [44, §5.3] (del cual las cotas en el lado derecho de la desigualdad se derivan) y algunos de los resultados de [76]. Remitimos al lector al artículo original para esa estimación [4, §3].

*Demostración del Teorema 4.1.3 (cota inferior).* Sea  $K$  una triangulación de  $G$  que realiza la complejidad simplicial. Dotamos a  $K$  de una métrica riemanniana a trozos  $h$  haciendo cada arista un segmento de largo  $\frac{2\pi}{3}$  y cada 2-símplex un hemisferio de radio 1 con la métrica redonda standard. Así, el área de  $(K, h)$  es igual a  $2\pi\kappa(G)$ , puesto que el área del hemisferio es  $2\pi$ . Como los arcos de longitud menor a  $\pi$  en el ecuador del hemisferio standard son segmento geodésicos, es posible deformar cada camino en el interior de un 2-símplex a su borde sin incrementar la longitud. Por lo tanto, existe un lazo sistólico en  $(K, h)$  contenido en el 1-esqueleto y así,  $\text{sis}(K, h) \geq 2\pi$ . Ahora,

$$\sigma(G) \leq \sigma(K, h) \leq \frac{\kappa(G)}{2\pi},$$

como buscábamos. Destacamos que la elección de la métrica redonda para los 2-símplices de  $K$  no es realmente esencial. Podríamos probar una desigualdad similar por ejemplo, equipando a cada 2-símplex con la métrica del triángulo equilátero de área 1, con el costo de requerir un argumento levemente más complicado para estimar la longitud de caminos en  $K$  en términos de caminos contenidos en el 1-esqueleto.  $\square$

## 4.2. Un método de simplificación homológica

El objetivo de esta sección es demostrar un lema técnico que será utilizado más adelante para establecer una cota inferior de la complejidad simplicial de grupos de la forma  $G * T$ , donde  $G, T$  son grupos finitamente presentables y la cohomología de  $G$  cumple la propiedad (A) (ver más abajo). La meta final es el cálculo de la complejidad simplicial cuando  $G$  es un grupo de superficie y  $T$  es un grupo libre (no necesariamente no trivial). La estrategia para lograr esto es esencialmente la misma que fue empleada en el Capítulo 2 para encontrar triangulaciones óptimas del tipo homotópico de superficies. Los ingredientes principales de la demostración son una versión de la estimación que usa la fórmula de la característica de Euler en Lema 2.1.2 (ver también la demostración de la cota inferior en el Teorema 2.1.1) y una técnica homológica que permite aplicar dicha estimación. Con esto en mente, desarrollamos en esta sección un método de simplificación homológica para triangulaciones de grupos de la forma  $G * T$  siguiendo los lineamientos de la Proposición 2.3.6.

Comenzamos por precisar qué significa que un grupo cumpla la propiedad (A). El anillo de cohomología de un grupo  $G$  significará su cohomología como grupo discreto, es decir, la cohomología de un espacio de Eilenberg-MacLane  $K(G, 1)$ , mientras que  $H^*(G, \mathbb{Z}_2)$  denota la cohomología (reducida) de  $G$  con coeficientes en  $\mathbb{Z}_2$ , como es usual. Decimos que el anillo de cohomología de un grupo satisface la propiedad (A) si lo hace el anillo de cohomología de un espacio  $K(G, 1)$  (ver Definición 2.3.2).

**Ejemplo 4.2.1.** De forma análoga al caso de las superficies, los grupos de superficies (ya sean orientables o no) satisfacen la propiedad (A) por la Dualidad de Poincaré. Más generalmente, todo grupo one-relator  $G$  con  $H_2(G, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$  y con forma producto cup no degenerada  $H^1(G, \mathbb{Z}_2) \times H^1(G, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^2(G, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$ , cumple la propiedad (A). Utilizando el cálculo del anillo de cohomología de los grupos one-relator de [74], uno puede obtener muchos ejemplos adicionales de tales grupos. Como ejemplos concretos, los grupos de Baumslag-Solitar  $BS(m, n)$  cumplen la propiedad (A) siempre que  $m$  y  $n$  sean impares.

Supongamos que  $K$  es una triangulación 2-dimensional de  $G * T$ , esto es,  $\pi_1(K) = G * T$ . Por argumentos standard de topología algebraica,  $K$  es el 2-esqueleto de un CW-complejo  $X$ , posiblemente infinito o de dimensión infinita. Como el grupo fundamental de  $X$  es isomorfo a  $G * T$ ,  $X$  es un espacio de Eilenberg-MacLane  $K(G * T, 1)$ . Por un teorema de Whitehead (ver por ejemplo [24, Theorem 7.3]), el wedge de  $K_G$ , un espacio  $K(G, 1)$  y de  $K_T$ , un espacio  $K(T, 1)$  es esférico, lo que implica que  $X$  es homotópicamente equivalente a  $K_G \vee K_T$ . Como dijimos anteriormente, apuntamos a estimar el número de 2-símplices de triangulaciones de  $G * T$  para  $G$  un grupo de superficie y  $T$  un grupo libre. Luego, como informalmente  $G$  debería ser responsable por la complejidad de la triangulación (es decir, el número de 2-símplices), el primer objetivo es aislar un subcomplejo de  $K$  que contenga únicamente las clases de homología de dimensión 2 de  $K$  que corresponden a clases en  $H_2(G, \mathbb{Z}_2)$ . Damos una definición para formalizar esta idea.

**Definición 4.2.2.** Sea  $X$  un CW-complejo de dimensión al menos 2, junto con una equivalencia homotópica  $h : X \rightarrow K_G \vee K_T$ , donde  $K_G, K_T$  se definen como arriba. Supongamos que su 2-esqueleto  $X^{(2)}$  tiene la estructura de un complejo simplicial finito. Sea  $M \leq X^{(2)}$  un subcomplejo (simplicial) que verifica las siguientes condiciones:

1. La inclusión  $i : M \hookrightarrow X$  induce isomorfismos  $i_* : H_n(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(X, \mathbb{Z}_2)$  para  $n < 2$ .



2. La composición  $H_2(M, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{i_*} H_2(X, \mathbb{Z}_2) \cong H_2(K_G, \mathbb{Z}_2) \oplus H_2(K_T, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{p} H_2(K_G, \mathbb{Z}_2)$  es un epimorfismo, donde  $p$  es la proyección y el isomorfismo  $H_2(X, \mathbb{Z}_2) \cong H_2(K_G, \mathbb{Z}_2) \oplus H_2(K_T, \mathbb{Z}_2)$  es inducido por  $h$ .

Diremos que tal subcomplejo  $M$  es *homológicamente  $G$ -completo* con respecto a  $h$ , o simplemente *homológicamente  $G$ -completo* si la equivalencia homotópica  $h$  se deduce del contexto.

El resultado siguiente afirma, a grandes trazos, que podemos matar las clases de homología “extra” en  $H_2(X, \mathbb{Z}_2)$  una a la vez (comparar con la Proposición 2.3.6).

**Lema 4.2.3.** *Sea  $X$  un CW-complejo de dimensión al menos 2 homotópicamente equivalente a un espacio de la forma  $K_G \vee K_T$  y tal que su 2-esqueleto  $X^{(2)}$  es un complejo simplicial finito. Sea  $M \leq X^{(2)}$  un subcomplejo homológicamente  $G$ -completo. Si  $\dim H_2(M, \mathbb{Z}_2) > \dim H_2(G, \mathbb{Z}_2)$ , existe un 2-símplex  $\sigma \in M$  tal que  $M \setminus \sigma$  es homológicamente  $G$ -completo. Además,  $\dim H_2(M \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) = \dim H_2(M, \mathbb{Z}_2) - 1$ .*

*Demostración.* Como por hipótesis  $\dim H_2(M, \mathbb{Z}_2) > \dim H_2(K_G, \mathbb{Z}_2)$  hay una clase  $B$  no trivial en el núcleo de la aplicación lineal  $p \circ i_* : H_2(M, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(K_G, \mathbb{Z}_2)$ . Sea  $\sigma$  un 2-símplex de  $M$  en el soporte de  $B$ . El borde topológico  $\partial\sigma$  visto como una cadena en  $C_1(M \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2)$  es el borde de la 2-cadena  $B - \sigma$ . Por lo tanto, la inclusión induce el morfismo trivial  $H_1(\partial\sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(M \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2)$ . Se concluye que la inclusión  $M \setminus \sigma \hookrightarrow M$  induce isomorfismos  $H_n(M \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(M, \mathbb{Z}_2)$  para  $n < 2$ . Resta verificar la sobreyectividad de  $p \circ j_* : H_2(M \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(K_G, \mathbb{Z}_2)$ , donde  $j$  es la inclusión  $j : M \setminus \sigma \hookrightarrow X$ . Sea  $[Z]$  una clase en  $H_2(K_G, \mathbb{Z}_2)$ . Por hipótesis, existe alguna clase  $C \in H_2(M, \mathbb{Z}_2)$  tal que  $p \circ i_*[C] = [Z]$ . Si  $\sigma$  no pertenece al soporte de  $C$ , vista como una clase en  $H_2(M \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2)$  tenemos que  $p \circ j_*[C] = [Z]$ . En el caso contrario, consideremos la 2-cadena  $C + B$ . Como los coeficientes son tomados en  $\mathbb{Z}_2$ , esta cadena es un 2-ciclo bien definido en  $M \setminus \sigma$  y  $p \circ j_*[C + B] = p \circ i_*[C] + p \circ i_*[B] = p \circ i_*[C] = [Z]$ . Luego, en cualquier caso  $p \circ j_* : H_2(M \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(K_G, \mathbb{Z}_2)$  es un epimorfismo. El hecho de que  $\dim H_2(M \setminus \sigma, \mathbb{Z}_2) = \dim H_2(M, \mathbb{Z}_2) - 1$  se deduce inmediatamente de la característica de Euler, pues  $\chi(M \setminus \sigma) = \chi(M) - 1$ .  $\square$

Introducimos una notación conveniente antes de seguir.

**Notación.** Dado un grupo finitamente presentable  $G$ , denotaremos por  $\bar{\chi}(G)$  la característica de Euler *2-truncada* de  $G$ , es decir,  $\bar{\chi}(G) := \dim H_2(G, \mathbb{Z}_2) - \dim H_1(G, \mathbb{Z}_2) + \dim H_0(G, \mathbb{Z}_2)$ .

Nos resta combinar el método de simplificación homológica con el control provisto por la propiedad (A) para obtener, dada una triangulación de un grupo de la forma  $G * T$ , un subcomplejo al cual la estimación de la característica de Euler aplica. El resultado siguiente se encarga de esta tarea.

**Lema 4.2.4.** *Sea  $K$  un complejo simplicial finito y conexo de dimensión 2 con grupo fundamental isomorfo a  $G * T$ , y supongamos que el anillo de cohomología de  $G$  cumple la propiedad (A). Entonces, existe otro complejo simplicial  $L$  de dimensión a lo sumo 2 que no cuenta con más 2-símplices que  $K$  tal que  $\chi(L) \leq \bar{\chi}(G)$ ,  $\dim H_2(L, \mathbb{Z}_2) = \dim H_2(G, \mathbb{Z}_2)$  y cada arista de  $L$  es cara de al menos dos 2-símplices.*

*Demostración.* Sea  $X$  un espacio de Eilenberg-MacLane  $K(G * T, 1)$  tal que  $X^{(2)} = K$ . Entonces, existe una aplicación  $i : K \rightarrow K_G \vee K_T$  que induce isomorfismos en  $H_n$  para  $n = 0, 1$  y

un epimorfismo en  $H_2$ , donde  $K_G$  y  $K_T$  son respectivamente un espacio  $K(G, 1)$  y un espacio  $K(T, 1)$  como antes. Como la proyección  $H_2(X, \mathbb{Z}_2) \cong H_2(K_G, \mathbb{Z}_2) \oplus H_2(K_T, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(K_G, \mathbb{Z}_2)$  es sobreyectiva,  $K$  es un subcomplejo homológicamente  $G$ -completo de  $X$ . Aplicando inductivamente el Lema 4.2.3, obtenemos un subcomplejo  $M$  de  $K$  que es homológicamente  $G$ -completo y tal que  $\dim H_2(M, \mathbb{Z}_2) = \dim H_2(G, \mathbb{Z}_2)$ . Tras colapsar las caras libre de  $M$ , podemos asumir que  $M$  no tiene aristas que sean cara de un único 2-símplex. Supongamos que hay una arista maximal  $e = \{a, b\}$  en  $M$  (en otro caso, podemos concluir la demostración tomando  $L$  como  $M$ ). Si no hay un camino entre  $a$  y  $b$  en  $M \setminus e$ , el cociente  $M/e$  tiene una estructura natural de complejo simplicial con una arista maximal menos que  $M$ . Si en cambio  $a$  y  $b$  están unidos por algún camino en  $M \setminus e$ ,  $M$  es homotópicamente equivalente a un CW-complejo de la forma  $Z \vee S^1$ , donde  $Z$  es el complejo  $M \setminus e$  y la esfera  $S^1$  resulta de adjuntar una 1-celda por la aplicación que envía los dos extremos a  $a \in Z$ . Tras aplicar de ser necesario una cantidad finita de estos movimientos, llegamos a un CW-complejo de la forma  $L \vee \bigvee_{i=1}^m S^1$  homotópicamente equivalente a  $M$ , donde  $L$  es un complejo simplicial formado por los 2-símplices de  $M$  (y luego, con a lo sumo la cantidad de 2-símplices de  $K$ ) en el que cada arista es la cara de al menos dos 2-símplices. Resta verificar la cota en la característica de Euler de  $L$ . Como  $L \vee \bigvee_{i=1}^m S^1$  es homotópicamente equivalente a  $M$ , claramente

$$\chi(M) = \chi(L \vee \bigvee_{i=1}^m S^1) = \chi(L) - m.$$

Por otro lado, por construcción  $\chi(M) = \bar{\chi}(G) - \dim H_1(T, \mathbb{Z}_2)$ , dado que  $\dim H_2(M, \mathbb{Z}_2) = \dim H_2(G, \mathbb{Z}_2)$  y el primer grupo de homología de  $M$  es isomorfo a  $H_1(K_G \vee K_T, \mathbb{Z}_2) = H_1(G, \mathbb{Z}_2) \oplus H_1(T, \mathbb{Z}_2)$ . Ahora, componiendo con la equivalencia homotópica  $L \vee \bigvee_{i=1}^m S^1 \simeq M$  obtenemos una aplicación  $f : L \vee \bigvee_{i=1}^m S^1 \rightarrow K_G \vee K_T$  que induce un isomorfismo en  $H_n$  para  $n = 0, 1$ , y tal que  $p \circ f_* : H_2(L \vee \bigvee_{i=1}^m S^1) = H_2(L, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(K_G, \mathbb{Z}_2)$  es un epimorfismo. En particular, dualizando conseguimos un isomorfismo

$$H^1(K_G \vee K_T, \mathbb{Z}_2) = H^1(G, \mathbb{Z}_2) \times H^1(T, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(L \vee \bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2) = H^1(L, \mathbb{Z}_2) \times H^1(\bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2).$$

Sea  $(0, a) \in H^1(L, \mathbb{Z}_2) \times H^1(\bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2)$  una clase no trivial y supongamos que  $(\alpha, \delta) \in H^1(G, \mathbb{Z}_2) \times H^1(T, \mathbb{Z}_2)$  es la única clase tal que  $f^*(\alpha, \delta) = (0, a)$ . Afirmamos que  $\alpha = 0$ . En efecto, supongamos por contradicción que no fuera el caso. Entonces, puesto que el anillo de cohomología de  $G$  satisface la propiedad (A) hay una clase  $\beta \in H^1(G, \mathbb{Z}_2)$  con  $\alpha \cup \beta \neq 0$ . Consideremos la clase  $f^*((\alpha, \delta) \cup (\beta, 0)) = f^*(\alpha \cup \beta, 0) \in H^2(L, \mathbb{Z}_2) = H^2(L, \mathbb{Z}_2) \times H^2(\bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2)$ . No puede ser trivial: tomemos una clase  $\lambda \in H_2(G, \mathbb{Z}_2)$  tal que  $(\alpha \cup \beta)\lambda \neq 0$  (aquí usamos la identificación  $H^2(G, \mathbb{Z}_2) = \text{Hom}(H_2(G), \mathbb{Z}_2)$ ). Como  $M$  es homológicamente  $G$ -completo, hay alguna clase  $\gamma \in H_2(L, \mathbb{Z}_2) \cong H_2(M, \mathbb{Z}_2)$  tal que  $f_*(\gamma) = (\lambda, \eta)$ , para algún  $\eta \in H_2(T)$ . Luego,

$$f^*(\alpha \cup \beta, 0)\gamma = (\alpha \cup \beta, 0)f_*(\gamma) = (\alpha \cup \beta, 0)(\lambda, \eta) \neq 0.$$

Por otro lado, la identidad

$$f^*((\alpha, \delta) \cup (\beta, 0)) = (0, a) \cup f^*(\beta, 0) = 0$$

nos lleva a una contradicción, lo cual prueba la afirmación. Concluimos que la inversa de la aplicación  $f^* : H^1(G, \mathbb{Z}_2) \times H^1(T, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(L, \mathbb{Z}_2) \times H^1(\bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2)$  se restringe a un monomorfismo  $H^1(\bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(T, \mathbb{Z}_2)$ . Luego,  $m \leq \dim H_1(T, \mathbb{Z}_2)$  y, como  $\chi(L) = \bar{\chi}(G) - (\dim H_1(T, \mathbb{Z}_2) - m)$ , la demostración está completa.  $\square$

### 4.3. Una cota inferior para la complejidad simplicial

En esta sección corta empleamos los resultados previos para probar la cota inferior anunciada en la complejidad simplicial para grupos de la forma  $G * T$ , donde  $G, T$  son finitamente presentables y  $G$  satisface la propiedad (A).

El mismo argumento que muestra que los 2-complejos con una triangulación densa admiten una cota inferior en el número de vértices en términos de su característica de Euler puede aplicarse para obtener una cota en el número de 2-símplices. En lo que sigue, entenderemos que un complejo simplicial de dimensión 2 es estrictamente de dimensión 2, es decir, que tiene al menos un 2-símplex.

**Lema 4.3.1.** (cf. Lema 2.3.1). *Sea  $L$  un complejo simplicial conexo de dimensión 2 tal que cada arista es cara de al menos dos 2-símplices. Entonces, si  $\chi(L) \leq 2$ , el complejo  $L$  tiene al menos  $\rho(L)$  vértices y al menos  $2\rho(L) - 2\chi(L)$  2-símplices.*

Recordemos que aquí  $\rho(L)$  denota la expresión  $\rho(\chi(L)) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(L)}}{2} \right\rceil$  como definimos en la Notación 2.1.

*Demostración.* La cota inferior  $\rho(L) = \rho(\chi(L))$  para el número de vértices es precisamente la conclusión del Lema 2.3.1. Para la estimación en el número de 2-símplices, notemos que la fórmula de la característica de Euler para  $L$  junto con la desigualdad  $3\alpha_2(L) \geq 2\alpha_1(L)$  implican que

$$2\chi(L) \geq 2\alpha_0(L) - 2\alpha_2(L),$$

de donde la cota deseada  $\alpha_2(L) \geq 2\rho(L) - 2\chi(L)$  se deduce inmediatamente.  $\square$

Una fórmula explícita para la cota inferior en la complejidad simplicial de grupos de la forma  $G * T$  donde  $G$  satisface la propiedad (A) se deduce casi directamente de los Lemas 4.2.4 y 4.3.1.

**Teorema 4.3.2.** *Sean  $G, T$  grupos finitamente presentables. Si  $G$  satisface la propiedad (A),  $\bar{\chi}(G) \leq 2$ , y  $\dim H_2(G) > 0$ , entonces  $\kappa(G * T) \geq 2\rho(\bar{\chi}(G)) - 2\bar{\chi}(G)$ .*

*Demostración.* Sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión 2 con grupo fundamental isomorfo a  $G * T$ . Como  $G$  satisface la propiedad (A), del Lema 4.2.4 obtenemos un complejo simplicial  $L$  con  $\alpha_2(L) \leq \alpha_2(K)$ ,  $\chi(L) \leq \bar{\chi}(G)$  y tal que cada arista de  $L$  está en al menos dos 2-símplices. Además, hay un epimorfismo  $H_2(L) \rightarrow H_2(G)$ , de manera que  $\dim H_2(L) > 0$  y tal que  $L$  es de dimensión 2. Por el Lema 4.3.1,  $L$  tiene al menos  $2\rho(L) - 2\chi(L)$  2-símplices. Ahora, como  $\chi(L) \leq \bar{\chi}(G)$  y  $\rho$  es una función decreciente, concluimos que  $\alpha_2(L) \geq 2\rho(\bar{\chi}(G)) - 2\bar{\chi}(G)$ , como buscábamos.  $\square$

Podemos aplicar el Teorema 4.3.2 a los grupos one-relator del Ejemplo 4.2.1. Por ejemplo, el teorema da la cota inferior  $\kappa(BS(m, n)) \geq 14$  para los grupos de Baumslag-Solitar con  $m, n$  impares, pues  $\chi(BS(m, n)) = 0$ . Sabemos que esta cota no es óptima excepto para el grupo fundamental del toro  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = BS(1, 1)$ . Sin embargo, uno esperaría cotas inferiores mejores para los grupos one-relator con muchos generadores (y por lo tanto, característica de Euler chica). Como veremos en la próxima sección, la cota inferior del Teorema 4.3.2 es óptima para los grupos fundamentales de superficies.

## 4.4. La complejidad simplicial de grupos de superficie

Esta sección contiene el resultado principal del capítulo: el cómputo de la complejidad simplicial  $\kappa(\pi_1(S) * F)$ , donde  $S$  es una superficie cerrada y  $F$  un grupo libre de rango finito (posiblemente trivial). Recordemos que  $\delta(S)$  denota el número de 2-símplices en una triangulación mínima de una superficie cerrada  $S$  y que una fórmula explícita para estos números fue establecida por Jungerman y Ringel (ver Teorema 2.1.1). Concretamente, para superficies no excepcionales, vale la siguiente identidad:

$$\delta(S) = 2\rho(\chi(S)) - 2\chi(S).$$

Para los casos excepcionales  $M_2, N_2$  y  $N_3$ , es necesario reemplazar  $\delta(S)$  por  $\delta(S) - 2$  en la fórmula.

Tal como fue observado en el Ejemplo 4.2.1, el grupo fundamental de una superficie cerrada no simplemente conexa  $S$  satisface la propiedad (A). Luego, podemos aplicar el Teorema 4.3.2 a grupos de la forma  $\pi_1(S) * T$ , obteniendo el corolario siguiente.

**Proposición 4.4.1.** *Sea  $S$  una superficie cerrada no simplemente conexa. Entonces  $\kappa(\pi_1(S) * T) \geq 2\rho(\chi(S)) - 2\chi(S)$ . En particular, si  $S$  es no excepcional, entonces  $\kappa(\pi_1(S) * T) \geq \delta(S)$ .*

*Demostración.* Por el Teorema 4.3.2, tenemos que  $\kappa(\pi_1(S) * T) \geq 2\rho(\bar{\chi}(\pi_1(S))) - \bar{\chi}(\pi_1(S))$ . Luego, alcanza con ver que  $\bar{\chi}(\pi_1(S)) = \chi(S)$  para cualquier superficie cerrada y no simplemente conexa  $S$ . La identidad es clara para las superficies  $S$  distintas del plano proyectivo real  $\mathbb{R}P^2$  puesto que tales superficies son esféricas. Para  $\mathbb{R}P^2$ , notemos que el espacio proyectivo infinito  $\mathbb{R}P^\infty$  es un espacio de Eilenberg-MacLane para  $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$ , así que tenemos  $\bar{\chi}(\pi_1(S)) = \chi(S)$  también para  $S = \mathbb{R}P^2$ .  $\square$

**Observación 4.4.2.** De hecho, se puede demostrar que para un grupo  $G$  en las hipótesis del Teorema 4.3.2 que la igualdad

$$\kappa(G) = 2\rho(\bar{\chi}(G)) - 2\bar{\chi}(G)$$

se alcanza solo para grupos fundamentales de superficies no excepcionales. En efecto, tomemos  $K$  una triangulación óptima para  $G$ , esto es, tal que  $K$  tiene exactamente  $\kappa(G) = 2\rho(\bar{\chi}(G)) - 2\bar{\chi}(G)$  2-símplices. Sabemos que  $3\alpha_2(K) \geq 2\alpha_1(K)$  y  $\chi(K) \geq \bar{\chi}(G)$ . Luego,

$$\kappa(G) = \alpha_2(K) \leq 2\alpha_0(K) - 2\chi(K) \leq 2\rho(\bar{\chi}(G)) - 2\bar{\chi}(G) = \kappa(G).$$

Por lo tanto, todas las desigualdades intermedias son en realidad identidades y en particular,  $3\alpha_2(K) = 2\alpha_1(K)$ . Esto implica que  $K$  es una pseudosuperficie y así  $G = \pi_1(K)$  es isomorfo al producto libre de  $\pi_1(S)$  con un grupo libre  $F$  para cierta superficie  $S$ . Como  $G$  satisface la propiedad (A), la parte libre  $F$  es trivial y luego  $G = \pi_1(S)$  como queríamos probar.

Resta tratar los casos excepcionales. Observemos que para un superficie excepcional  $S$  (es decir,  $S = N_2, N_3$  o  $M_2$ ), la Proposición 4.4.1 provee la cota inferior  $\kappa(\pi_1(S) * T) \geq 2\rho(\chi(S)) - 2\chi(S)$ , que es levemente más débil que la requerida pues  $\delta(S) = 2\rho(\chi(S)) - 2\chi(S) + 2$  en estos casos. Así, para superficies excepcionales necesitaremos refinar la demostración de la cota inferior en el Teorema 4.3.2.

**Lema 4.4.3.** *Sea  $S$  una superficie cerrada asférica (ya sea excepcional o no) y sea  $K$  un complejo simplicial de dimensión 2 con grupo fundamental isomorfo a  $\pi_1(S) * T$ . Sea  $L$  el complejo simplicial obtenido a partir de  $K$  aplicando el Lema 4.2.4. Si  $\chi(L) = \chi(S)$ , entonces existe una función continua  $L \rightarrow S$  que induce un isomorfismo en (co)homología.*

*Demostración.* De la demostración del Lema 4.2.4 aplicada a  $K$ , obtenemos una función continua  $f : L \vee \bigvee_{i=1}^m S^1 \rightarrow K_{\pi_1(S)} \vee K_T \simeq S \vee K_T$  (pues  $S$  es asférica) que induce un isomorfismo en  $H_n$  para  $n = 0, 1$  y un epimorfismo  $p \circ f_* : H_2(L \vee \bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2) = H_2(L, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_2(S, \mathbb{Z}_2)$ , y tal que  $\dim H_2(L, \mathbb{Z}_2) = \dim H_2(S, \mathbb{Z}_2)$ . Consideremos la aplicación natural  $g : L \rightarrow S$  definida como la composición  $L \hookrightarrow L \vee \bigvee_{i=1}^m S^1 \xrightarrow{f} S \vee K_T \rightarrow S$ , donde la primera aplicación es la inclusión y la última es la proyección al cociente. Como la aplicación cociente  $S \vee K_T \rightarrow S$  induce la proyección  $H_*(S, \mathbb{Z}_2) \oplus H_*(K_T, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_*(S, \mathbb{Z}_2)$  en homología,  $g$  induce un isomorfismo en  $H_2$  y así alcanza con mostrar que  $g_* : H_1(L, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(S, \mathbb{Z}_2)$  es un isomorfismo. Notemos que de la demostración del Lema 4.2.4 se deduce que la inversa de  $f^* : H^1(K_{\pi_1(S)}, \mathbb{Z}_2) \times H^1(K_T, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(L, \mathbb{Z}_2) \times H^1(\bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2)$  se restringe a un monomorfismo  $h : H^1(\bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(K_T, \mathbb{Z}_2)$ . Más concretamente, el monomorfismo  $h$  envía una clase  $a \in H^1(\bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2)$  a la única clase  $\alpha \in H^1(K_T, \mathbb{Z}_2)$  tal que  $f^*(0, \alpha) = (0, a)$ . Por otro lado,  $\chi(L) = \chi(S) - (\dim H_1(K_T, \mathbb{Z}_2) - m)$  y como  $\chi(L) = \chi(S)$  por hipótesis,  $m = \dim H_1(K_T, \mathbb{Z}_2)$  y así  $h$  es un isomorfismo. Es claro entonces que también  $f^*$  se restringe de manera análoga a un isomorfismo  $H^1(K_T, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(\bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2)$ . Ahora, el morfismo inducido por  $g$  entre los primeros grupos de cohomología coincide con la composición  $H^1(S, \mathbb{Z}_2) \hookrightarrow H^1(S, \mathbb{Z}_2) \times H^1(K_T, \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{f^*} H^1(L, \mathbb{Z}_2) \times H^1(\bigvee_{i=1}^m S^1, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(L, \mathbb{Z}_2)$ , donde la primera flecha es la inclusión y la última la proyección a la primera coordenada. Usando el hecho de que  $f^*$  se restringe a un isomorfismo entre los segundos factores, no es difícil chequear que la aplicación descripta entre los primeros factores  $H^1(S, \mathbb{Z}_2) \rightarrow H^1(L, \mathbb{Z}_2)$  es un isomorfismo. Como  $H^1(L, \mathbb{Z}_2)$  y  $H^1(S, \mathbb{Z}_2)$  son espacios vectoriales de dimensión finita sobre  $\mathbb{Z}_2$ , concluimos que  $g$  induce un isomorfismo en (co)homología, como buscábamos.  $\square$

A partir de este momento, los argumentos son muy similares a los empleados para tratar con el covering type de las superficies cerradas. La mayor diferencia es que no hay suficiente espacio para tener casos excepcionales para la complejidad simplicial.

**Proposición 4.4.4.** *Sea  $S = N_2, N_3$  o  $M_2$ . Entonces  $\kappa(\pi_1(S) * T) \geq \delta(S)$ .*

*Demostración.* Sea  $K$  una triangulación de  $\pi_1(S) * T$ . Por el Lema 4.2.4, y manteniendo las notaciones de la demostración del Teorema 4.3.2, obtenemos un complejo  $L$  con  $\alpha_2(L) \leq \alpha_2(K)$ ,  $\chi(L) \leq \bar{\chi}(\pi_1(S)) = \chi(S)$  y tal que cada arista de  $L$  está en al menos dos 2-símplices. Por el Lema 4.3.1, esto implica que  $L$  tiene al menos  $\rho(L) \geq \rho(S)$  vértices y al menos  $2\rho(L) - 2\chi(L)$  2-símplices. Notemos que si cualquiera de las desigualdades estrictas  $\alpha_0(L) > \rho(S)$ ,  $\chi(L) < \chi(S)$  se verifica, tenemos que

$$\alpha_2(L) \geq 2\rho(S) - 2\chi(S) + 2 = \delta(S)$$

y no hay nada que probar. En vista de esto, en lo que sigue asumiremos que  $\alpha_0(L) = \rho(S)$  y  $\chi(L) = \chi(S)$ . Observemos que la homología de  $L$  es isomorfa a la homología de  $S$  a través de una función continua  $L \rightarrow S$  por el Lema 4.4.3. También, como  $3\alpha_2(L) \geq 2\alpha_1(L)$ , por la fórmula de la característica de Euler para  $L$  tenemos que

$$3(\alpha_0(L) - \chi(L)) \leq \alpha_1(L) \leq \binom{\alpha_0(L)}{2}.$$

Resolvemos en primer lugar el caso  $S = N_2$ . Por la hipótesis, tenemos que  $\chi(L) = \chi(N_2) = 0$  y  $\alpha_0(L) = \rho(N_2) = 7$ . Luego, de la desigualdad de arriba obtenemos que  $\alpha_1(L) = 21$  y, dado que  $\chi(L) = 0$ ,  $\alpha_2(L) = 14$ . Así,  $3\alpha_2(L) = 2\alpha_1(L) = 42$ , de donde se deduce que toda arista de  $L$  es cara de exactamente dos 2-símplices. Como hay una función  $L \rightarrow S$  que induce un isomorfismo en homología, por la Proposición 2.4.1  $L$  sería homeomorfo a  $N_2$ , lo que contradice el Teorema 2.1.1. Luego,  $\alpha_0(L) > \rho(N_2)$  o  $\chi(L) < \chi(S)$  y en consecuencia  $\alpha_2(L) \geq \delta(N_2)$ .

Para la superficie  $S = N_3$ , sabemos que  $\chi(L) = \chi(N_3) = -1$  y  $\alpha_0(L) = \rho(N_3) = 8$ . Por lo tanto,

$$3(\alpha_0(L) - \chi(L)) = 27 \leq \alpha_1(L) \leq 28 = \binom{\alpha_0(L)}{2}.$$

Supongamos primero que  $\alpha_1(L) = 27$ , así que  $\alpha_2(L) = 18$ . Por lo tanto, cada arista de  $L$  es cara de exactamente dos 2-símplices y por la Proposición 2.4.1,  $L$  es homeomorfo a  $N_3$  en contradicción con el Teorema 2.1.1. Entonces,  $\alpha_1(L) = 28$ . En ese caso,  $\alpha_2(L) = 19$  y como  $57 = 3\alpha_2(L) = 2\alpha_1(L) + 1$ , toda arista de  $L$  está en dos 2-símplices excepto por una que es cara de tres 2-símplices de  $L$ . El link de un vértice de esta arista es un grafo en el cual cada vértice tiene grado dos excepto uno que tiene grado tres. Esto es imposible porque la suma de los grados de un grafo no dirigido es par. Por lo tanto,  $\alpha_0(L) > \rho(N_3)$  o  $\chi(L) < \chi(N_3)$  y luego  $\alpha_2(L) \geq \delta(N_3)$  como habíamos afirmado.

Finalmente, cuando  $S = M_2$  tenemos que  $\chi(L) = \chi(M_2) = -2$  y  $\alpha_0(L) = \rho(M_2) = 9$ . En este caso, sabemos que  $\alpha_2(L) \geq 22 = \delta(M_2) - 2$  y queremos probar que  $L$  tiene al menos  $\delta(M_2) = 24$  2-símplices. Veremos que los casos  $\alpha_2(L) = 22$ ,  $\alpha_2(L) = 23$  no pueden suceder. Supongamos primero que  $\alpha_2(L) = 22$ . Entonces, por la fórmula de la característica de Euler  $\alpha_1(L) = 33$ . Por lo tanto, cada arista de  $L$  es cara de exactamente dos 2-símplices de  $L$  y así, por la Proposición 2.4.1  $L$  debería ser homeomorfo a  $M_2$ , lo cual contradice el Teorema 2.1.1. Si  $\alpha_2(L) = 23$ , es  $\alpha_1(L) = 34$ , de donde  $69 = 3\alpha_2(L) = 2\alpha_1(L) + 1$ . Se deduce que cada arista de  $L$  es cara de exactamente dos 2-símplices excepto por una que es cara de tres 2-símplices. El mismo argumento que antes muestra que esto es imposible. Concluimos que  $\alpha_2(L) \geq \delta(M_2)$ .  $\square$

Los resultados principales de la sección siguen como corolario a esta última proposición.

**Corolario 4.4.5.** *Sea  $S$  una superficie cerrada no simplemente conexa. Entonces  $\kappa(S) = \delta(S)$ .*

*Demostración.* La cota superior  $\kappa(\pi_1(S)) \leq \delta(S)$  es clara, mientras que la cota inferior se deduce de las Proposiciones 4.4.1 y 4.4.4.  $\square$

Notemos que, como consecuencia de este resultado, la complejidad simplicial de los grupos de superficie crece linealmente con el género. Esto fue observado, en el caso orientable, en [4, Example 2].

**Corolario 4.4.6.** *Sea  $S$  una superficie cerrada no simplemente conexa y sea  $T$  un grupo finitamente presentable. Entonces,  $\kappa(\pi_1(S) * T) \geq \kappa(\pi_1(S))$ . En particular,  $\kappa(\pi_1(S) * \mathbb{Z}) = \kappa(\pi_1(S))$ .*

*Demostración.* Sea  $T$  un grupo finitamente presentable. Por las Proposiciones 4.4.1 y 4.4.4,  $\kappa(\pi_1(S) * T) \geq \delta(S)$  y como  $\kappa(\pi_1(S)) = \delta(S)$  por el Corolario 4.4.6, la primera afirmación se cumple. En cuanto a la segunda, es suficiente observar que la cota superior  $\kappa(G * \mathbb{Z}) \leq \kappa(G)$  vale trivialmente para cada grupo finitamente presentable  $G$ .  $\square$

Para resumir, compilamos los últimos resultados sobre la complejidad simplicial de grupos de superficie en el siguiente teorema.

**Teorema 4.4.7.** *La complejidad simplicial  $\kappa(\pi_1(S))$  del grupo fundamental de una superficie cerrada no simplemente conexa  $S$  coincide con el mínimo número de 2-símplices en una triangulación óptima de  $S$ . Además, la complejidad simplicial de los grupos de superficie es estable por tomar producto libre con grupos libres, esto es, vale  $\kappa(\pi_1(S) * \mathbb{Z}) = \kappa(\pi_1(S))$ .*

## 4.5. La complejidad simplicial de un producto libre de grupos

Recién vimos que la complejidad simplicial es estable por tomar producto libre con grupos libres para los grupos de superficie. En esta sección, tomamos otro camino para estudiar la complejidad simplicial de un producto libre de grupos generales, usando como punto de partida la construcción descrita en §3.4. De forma similar al caso del área systólica, sería deseable obtener una cota inferior de la complejidad simplicial  $G * H$  en términos de  $\kappa(G)$  y  $\kappa(H)$ . Para ser más específicos, parece plausible que la desigualdad  $\kappa(G * H) \geq \max\{\kappa(G), \kappa(H)\}$  valga. Desafortunadamente, en el caso general no tenemos resultados definitivos sobre la complejidad simplicial de un producto libre de grupos. Más bien, apuntamos a presentar una estrategia posible para demostrar la desigualdad, indicando cuáles son las partes que falta mostrar.

El dispositivo inicial es casi idéntico a §3.4. Sean  $G$  y  $H$  grupos finitamente presentables y tomemos una triangulación  $K$  de  $G * H$  que realiza la complejidad simplicial  $\kappa(G * H)$ . Como explicamos en §3.4, si  $X_G$  y  $X_H$  son triangulaciones de  $G$  y  $H$ , respectivamente, hay una aplicación simplicial  $f : K' \rightarrow X_G \vee X_H$  que induce un isomorfismo en grupos fundamentales para una subdivisión apropiada  $K'$  de  $K$ . Definimos el subcomplejo  $K_G$  de  $K'$  como  $K_G := f^{-1}(X_G)$  y sea  $K_H$  la clausura simplicial del complemento de  $K_G$  en  $K'$ , así que  $K_G \cup K_H = K'$  y  $K_G \cap K_H$  es 1-dimensional. En el Lema 3.4.3 mostramos una manera de obtener un subcomplejo de  $K'$  con grupo fundamental isomorfo a  $G$  formado por  $K_G$ , el cono en  $K_G \cap K_H$  y ciertas 2-celdas adicionales. En el contexto presente modificamos el producto del resultado para evitar la necesidad de adjuntar 2-celdas extra.

**Lema 4.5.1.** *Sean  $K_G$  y  $K_H$  los complejos simpliciales definidos más arriba. Entonces, existe un complejo simplicial de dimensión 1  $M$  tal que el complejo simplicial  $K_G \cup C(K_G \cap K_H) \cup M$  es conexo y tiene grupo fundamental isomorfo a  $G$ . Aquí, por  $C(K_G \cap K_H)$  entendemos el complejo formado por una unión disjunta de conos, exactamente una por cada componente conexa de  $K_G \cap K_H$ .*

*Demostración.* Si la intersección de  $K_G$  y  $K_H$  es conexa, podemos aplicar directamente el Lema 3.4.2. En el caso opuesto, de forma análoga a la demostración del Lema 3.4.3, hay un camino

simplicial  $\lambda$  en  $K'$  que une dos componentes conexas distintas de  $K_G \cap K_H$  cuya imagen  $f \circ \lambda$  es un lazo null-homotópico basado en  $v$  y completamente contenido en  $X_G$  o  $X_H$ . Tal como en el Lema 3.4.3, formemos el mapping cylinder  $M_\lambda$  de  $\lambda : I \rightarrow K'$  y extendamos  $f$  a  $M_\lambda$  usando una homotopía que contrae  $\lambda$  a  $v$ . Si  $e$  es la nueva 2-celda cilíndrica y  $\ell$  es el trayecto del borde de  $e$  que no está identificado con  $\lambda$ , definimos  $\tilde{K}_G$  como  $K_G \cup e$  o  $K_G \cup \ell$ , según sea  $\lambda_i \subseteq K_G$  o no. Definimos  $\tilde{K}_H$  en la misma forma y notamos que  $\tilde{K}_G \cap \tilde{K}_H = (K_G \cap K_H) \cup \ell$ .

Tras un número finito de pasos, obtenemos un CW-complejo  $\tilde{K}$  de dimensión 2, una extensión  $\tilde{f} : \tilde{K} \rightarrow X_G \vee X_H$  de la aplicación  $f$  que induce isomorfismo en el grupo fundamental y subcomplejos  $\tilde{K}_G, \tilde{K}_H$  que cubren  $\tilde{K}$  e intersecan en un subcomplejo conexo de dimensión 1. Es claro por construcción que  $\tilde{K}_G$  (respectivamente,  $\tilde{K}_H$ ) es conexo y colapsa a la unión de  $K_G$  (respectivamente  $K_H$ ) con algún grafo (simplemente colapsamos cada nueva 2-celda  $e$  en  $\tilde{K}_G$  o  $\tilde{K}_H$  a través de la cara libre  $\ell$ ).

Además, dado que  $\tilde{f}_*$  es un isomorfismo y  $\tilde{f}(\tilde{K}_G \cap \tilde{K}_H) = \{v\}$ , el argumento de la demostración del Lema 3.4.2 revela que  $\pi_1(\tilde{K}_G / (\tilde{K}_G \cap \tilde{K}_H))$  (y luego, también  $\pi_1(\tilde{K}_G \cup C(\tilde{K}_G \cap \tilde{K}_H))$ ) es isomorfo a  $G$ . Analicemos el complejo  $\tilde{K}_G \cup C(\tilde{K}_G \cap \tilde{K}_H)$  más detenidamente. Podemos pensar en el proceso de adjuntar un cono en  $\tilde{K}_G \cap \tilde{K}_H$  como la concatenación de tres pasos: primero adjuntamos un cilindro  $(\tilde{K}_G \cap \tilde{K}_H) \times I$  a altura 0, luego identificamos todos los puntos a altura 1 sobre la misma componente conexa de  $K_G \cap K_H$  y finalmente identificamos todos los puntos de altura 1 sobre una arista de  $\tilde{K}_G \cap \tilde{K}_H \setminus K_G \cap K_H$ . Sea  $L$  el CW-complejo que se obtiene tras aplicar los primeros dos pasos. Consideremos el complejo que se forma a partir de  $L$  colapsando cada 2-celda cilíndrica sobre una arista en  $\tilde{K}_G \cap \tilde{K}_H \setminus K_G \cap K_H$  a su base (ver Figura 4.1). Tras tales colapsos, las

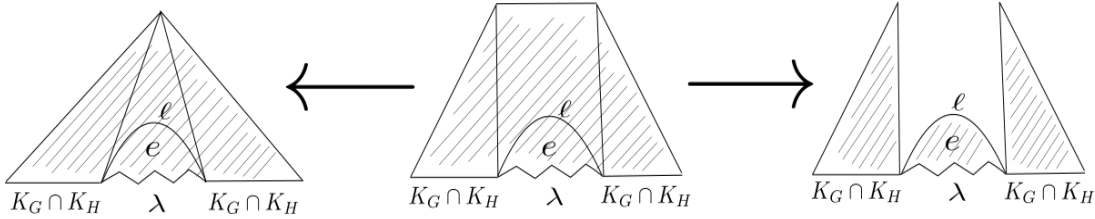


Figura 4.1: La flecha a la izquierda es la identificación de la parte superior del cilindro a un punto, mientras que la flecha a la derecha es el colapso a través de esta arista.

2-celdas nuevas en  $\tilde{K}_G$ , esto es, aquellas 2-celdas que no están en  $K'$  tienen caras libres y pueden ser colapsadas. Así,  $L$  colapsa a la unión de  $K_G \cup C(K_G \cap K_H)$  con un cierto grafo  $M$ . Como las identificaciones que se llevan a cabo en el tercer paso son equivalencias homotópicas, concluimos que  $\tilde{K}_G \cup C(\tilde{K}_G \cap \tilde{K}_H)$  es homotópicamente equivalente a  $K_G \cup C(K_G \cap K_H) \cup M$ , de donde la afirmación se deduce.  $\square$

En general, uno no puede esperar que el complejo  $K_G \cup C(X_G \cap X_H) \cup M$  tenga a lo sumo  $\kappa(G * H)$  2-símplices. El objetivo del resto de la sección es mostrar cómo estimar el número de 2-símplices de (algunas partes) del complejo.

En lo que sigue, pensamos en el complejo  $K$  como una estructura geométrica rígida (por ejemplo, como su realización geométrica en algún espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ ) en el cual la subdivisión  $K'$  está marcada. Para un 2-símplice  $\sigma$  de  $K$  escribimos  $\sigma' \leq K'$  para indicar el subcomplejo del



complejo subdividido  $K'$  dado por

$$\sigma' = \bigcup_{\tau \subseteq \sigma, \tau \in K'} \tau.$$

Distinguiamos dos subcomplejos de  $K_G \leq K'$  según la manera en que están distribuidos los 2-símplices de  $K$ . Sea  $A$  el subcomplejo de  $K_G$  generado por la unión de los subcomplejos  $\sigma'$  tales que  $\sigma' \cap K_G = \sigma'$ , donde  $\sigma$  es un 2-símplex de  $K$ . Esto es,  $A$  es la unión de los 2-símplices subdivididos de  $K$  que están completamente cubiertos por 2-símplices de  $K_G$ . Sea  $B$  el subcomplejo complementario de  $K_G$ . Notemos que  $B$  colapsa a un grafo: en efecto, para cada 2-símplex  $\sigma$  de  $K$ , el complejo  $B \cap \sigma'$  es un subcomplejo propio de  $\sigma'$  relativo a la subdivisión del borde  $(\partial\sigma)'$ , es decir, el colapso no usa aristas que pertenecen al subcomplejo  $(\partial\sigma)'$ . Luego, los colapsos dentro de cada 2-símplex original  $\sigma \in K$  no interfieren entre sí y vemos que  $B$  colapsa un grafo.

Especulamos por esta razón que es tal vez posible demostrar que el grupo fundamental de la unión de  $B$  con el cono sobre las aristas de  $K_G \cap K_H$  que pertenece a  $B$  es libre (acá tenemos que notar que sin algunas hipótesis adicionales esto no es necesariamente verdadero: por ejemplo, las triangulaciones de la banda de Möbius colapsan a un grafo pero el cono sobre el borde de la banda no tiene grupo fundamental libre). Supongamos que el grupo fundamental de  $B \cup C(K_G \cap K_H \cap B)$  es libre. Si adicionalmente las componentes conexas de la intersección de este complejo con  $A \cup C(K_G \cap K_H \cap A)$  son simplemente conexas, por el teorema de Seifert-van Kampen el grupo fundamental de

$$K_G \cup C(K_G \cap K_H) \cup M = (A \cup C(K_G \cap K_H \cap A)) \cup (B \cup C(K_G \cap K_H \cap B)) \cup M$$

es isomorfo al producto libre de  $\pi_1(A \cup C(K_G \cap K_H \cap A))$  con un grupo libre. En tal situación, como  $\pi_1(K_G \cup C(K_G \cap K_H) \cup M)$  es isomorfo a  $G$ , el número de 2-símplices en  $A \cup C(K_G \cap K_H \cap A)$  acota la complejidad simplicial de  $G$  por arriba.

Asumiremos en lo que sigue que las condiciones sobre el grupo fundamental de  $B \cup C(K_G \cap K_H \cap B)$  y su intersección con  $A \cup C(K_G \cap K_H \cap A)$  son ciertas y nos concentraremos en estimar el número de 2-símplices en este último complejo. Lograremos establecer, módulo estas dos condiciones, una cota por abajo para la complejidad simplicial de  $G * H$  en términos de  $\kappa(G)$ . Por supuesto, para completar la demostración de la cota sería necesario garantizar que las dos condiciones citadas se cumplen, posiblemente haciendo algunas modificaciones en el espíritu del Lema 4.5.2 de más abajo para alcanzar un mayor control sobre los complejos  $K_G$  y  $K_H$  y su intersección.

A primera vista, parecería que el número de 2-símplices en  $A \cup C(K_G \cap K_H \cap A)$  es en potencia arbitrariamente más grande que el número de 2-símplices en  $K$ , puesto que no tenemos control de cuán fina tiene que ser tomada la subdivisión  $K'$ . Sin embargo, lo primero a ser notado es que tras borrar las subdivisiones, el subcomplejo  $A$  puede ser considerado como un subcomplejo del complejo original  $K$ . Para eliminar legítimamente las subdivisiones, es necesario garantizar que tal proceso no destruye la estructura simplicial en el cono  $C(K_G \cap K_H \cap A)$ . Tomemos una arista  $e$  en  $K_G \cap K_H \cap A$ . Dado que  $e$  pertenece en particular a la intersección de  $K_G$  y  $K_H$ , no puede estar en el interior de un 2-símplex original  $\sigma$  de  $K$ . En efecto, si fuera este el caso,  $e$  debería ser cara de algún 2-símplex de la subdivisión  $K'$  cuya imagen por  $f$  está contenida en  $X_H$ . Pero como  $e \in A$ ,  $f(\sigma)$  está contenido en  $X_G$ . Luego,  $e$  es una arista de la subdivisión de alguna arista  $E$  del 1-esqueleto de  $K$ .

Ahora, consideremos la componente conexa  $Z$  de  $E \cap (K_G \cap K_H \cap A)$  que contiene a  $e$ . Si  $Z$  es un subcomplejo propio de la subdivisión de  $E$ , la arista sobre alguno de los dos vértices de  $Z$  es libre (esto es, es cara de un único 2-símplex) en el complejo  $A \cup C(K_G \cap K_H \cap A)$ . Así, el cono sobre  $Z$  puede colapsarse a través de esta arista a un complejo de dimensión 1. Así, tras realizar todos los colapsos y borrar las subdivisiones, llegamos a un complejo  $L$  de dimensión 2 en el cual los 2-símplices son únicamente de uno de dos tipos. Por un lado, tenemos los 2-símplices originales de  $K$  que provienen de olvidar las subdivisiones en  $A$  y por el otro, los 2-símplices del cono que están basados en 1-símplices de  $K$ . Para poder controlar el número de 2-símplices en  $L$  del segundo tipo, necesitamos llevar a cabo una modificación a la aplicación  $f$  y la subdivisión de  $K$  al inicio de la construcción (en particular, antes de la definición de los complejos  $K_G$  y  $K_H$ ).

**Lema 4.5.2.** *Sea  $\sigma = \{a, b, c\}$  un 2-símplex de  $K$  (antes de la subdivisión) y supongamos que  $f(\sigma) \neq \{v\}$ . Entonces, la aplicación  $f$  y la subdivisión  $K'$  de  $K$  pueden modificarse para enviar a  $v$  a lo sumo una arista de  $\partial\sigma := \{a, b\} \cup \{a, c\} \cup \{b, c\}$ , siempre induciendo un isomorfismo en grupos fundamentales.*

*Demostración.* Tratamos primero el caso en que  $f$  envía todo el borde de  $\sigma$  a  $\{v\}$ . Definimos  $g : K \rightarrow X_G \vee X_H$  como idénticamente  $v$  en  $\sigma$  e igual a  $f$  fuera de  $\sigma$ . Como  $g$  es simplicial y coincide con  $f$  en el 1-esqueleto  $K^{(1)}$ , induce el mismo morfismo en grupos fundamentales que  $f$ , lo que cierra la prueba de este caso.

Supongamos ahora que  $f(\{a, b\}) = f(\{a, c\}) = \{v\}$ . Entonces  $\alpha = f|_{\{b, c\}} : \{b, c\} \rightarrow X_G \vee X_H$  es un lazo en  $v$ . Notemos que este lazo es trivial en grupo fundamental  $\pi_1(X_G \vee X_H, v)$ . En efecto,  $\alpha$  es homotópico como camino al lazo  $\beta$  que parametriza  $f(\partial\sigma)$ . Como  $[\partial\sigma]$  es trivial en  $\pi_1(K)$ , la clase de  $\alpha$  en  $\pi_1(X_G \vee X_H, v)$  es trivial. A partir de una homotopía de caminos entre  $\alpha$  y la aplicación constante  $v$  en  $X_G \vee X_H$ , obtenemos por el teorema de aproximación simplicial relativa una aplicación simplicial  $F : D \rightarrow X_G \vee X_H$  tal que  $D$  es un disco triangulado con borde  $\ell_1 \cup \ell_2$  donde  $\ell_1, \ell_2$  son intervalos triangulados como (la subdivisión en  $K'$  de)  $\{b, c\}$  y  $F|_{\ell_1} = \alpha, F|_{\ell_2} = \text{const}_v$ , la aplicación que es constantemente  $v$ . Ahora, para un 2-símplex  $\eta$  de  $K$  que contiene a la arista  $\{b, c\}$  consideramos  $\eta \cup D_\eta$  donde  $D_\eta$  es una copia simplicialmente isomorfa de  $D$  y pegamos  $D_\eta$  a  $\eta$  por el intervalo  $\ell_1$ . Podemos obtener una nueva subdivisión de  $K$  reemplazando los símplexes  $\eta$  en el star (en  $K$ ) de  $\{b, c\}$  por  $\eta \cup D_\eta$ , donde pegamos  $\eta \cup D_\eta$  y  $\tau \cup D_\tau$  a través de la copia isomorfa de  $\ell_2$  en  $D_\eta$  y  $D_\tau$ . La aplicación definida como  $f$  fuera del star de  $\{b, c\}$  en  $K$  y como  $f \cup F$  en cada  $\eta \cup D_\eta$  para  $\eta$  en  $\text{st}_K(\{b, c\})$  claramente define la misma función que  $f$  en el grupo fundamental.  $\square$

Como consecuencia, podemos asumir que todo 2-símplex de  $K$  tiene a lo sumo una arista que es enviada a  $\{v\}$  por  $f$ . La relevancia de esto yace en el hecho de que las aristas de  $K$  que son base de 2-símplices en la parte del cono de  $L$  son enviadas a  $\{v\}$  por  $f$  puesto que pertenecen a la intersección  $K_G \cap K_H$ . Se deduce que por cada 2-símplex de  $K$  que no está en  $A$  hay a lo sumo un 2-símplex en la parte del cono de  $L$  y luego, la cantidad de 2-símplices en  $L$  es a lo sumo  $\kappa(G * H)$ , el número de 2-símplices en  $K$ . Resumiendo, este argumento mostraría que  $\kappa(G * H)$  es mayor o igual que  $\kappa(G)$  si pudiéramos dar cuenta del efecto en el grupo fundamental del complejo  $K_G \cup C(K_G \cap K_H)$  correspondiente al subcomplejo  $B$  sin utilizar 2-símplices adicionales.

# Bibliografía

- [1] S. Aaronson and N. A. Scoville. Lusternik-Schnirelmann category for simplicial complexes. *Illinois J. Math.*, 57(3):743–753, 2013.
- [2] R. D. M. Accola. Differentials and extremal length on Riemann surfaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 46:540–543, 1960.
- [3] J. J. Andrews and M. L. Curtis. Free groups and handlebodies. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 16:192–195, 1965.
- [4] I. Babenko, F. Balacheff, and G. Bulteau. Systolic geometry and simplicial complexity for groups. *J. Reine Angew. Math.*, 757:247–277, 2019.
- [5] F. Balacheff, H. Parlier, and S. Sabourau. Short loop decompositions of surfaces and the geometry of Jacobians. *Geom. Funct. Anal.*, 22(1):37–73, 2012.
- [6] W. Ballmann. Der Satz von Lusternik und Schnirelmann. In *Beiträge zur Differentialgeometrie, Heft 1*, volume 102 of *Bonner Math. Schriften*, pages 1–25. Univ. Bonn, Bonn, 1978.
- [7] V. Bangert, C. Croke, S. Ivanov, and M. Katz. Filling area conjecture and ovalless real hyperelliptic surfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 15(3):577–597, 2005.
- [8] J. A. Barmak. *Algebraic topology of finite topological spaces and applications*, volume 2032 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2011.
- [9] J. A. Barmak and E. G. Minian. Strong homotopy types, nerves and collapses. *Discrete Comput. Geom.*, 47(2):301–328, 2012.
- [10] D. Barnette. A proof of the lower bound conjecture for convex polytopes. *Pacific J. Math.*, 46:349–354, 1973.
- [11] C. Bavard. Inégalité isosystolique pour la bouteille de Klein. *Math. Ann.*, 274(3):439–441, 1986.
- [12] M. Berger. à l’ombre de Loewner. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 5:241–260, 1972.
- [13] M. Berger. Du côté de chez Pu. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 5:1–44, 1972.
- [14] C. Blatter. Über Extremallängen auf geschlossenen Flächen. *Comment. Math. Helv.*, 35:153–168, 1961.

- 
- [15] E. Borghini. A systolic inequality for 2-complexes of maximal cup-length and systolic area of groups. *arXiv e-prints*, page arXiv:1909.12720, Sep 2019.
- [16] E. Borghini. Some remarks on PL collapsible covers of 2-dimensional polyhedra. *Osaka J. Math.*, 57(1):39–49, 2020.
- [17] E. Borghini and E. G. Minian. The covering type of closed surfaces and minimal triangulations. *J. Combin. Theory Ser. A*, 166:1–10, 2019.
- [18] E. Borghini and E. G. Minian. Simplicial complexity of surface groups. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2019. (in press).
- [19] R. Bott. Nondegenerate critical manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 60:248–261, 1954.
- [20] U. Brehm and W. Kühnel. Combinatorial manifolds with few vertices. *Topology*, 26(4):465–473, 1987.
- [21] U. Brehm and W. Kühnel. 15-vertex triangulations of an 8-manifold. *Math. Ann.*, 294(1):167–193, 1992.
- [22] M. R. Bridson. The geometry of the word problem. In *Invitations to geometry and topology*, volume 7 of *Oxf. Grad. Texts Math.*, pages 29–91. Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
- [23] M. R. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [24] K. S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.
- [25] G. Bulteau. Les groupes de petite complexité simpliciale. Preprint, June 2015.
- [26] Y. D. Burago and V. A. Zalgaller. *Geometric inequalities*, volume 285 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Translated from the Russian by A. B. Sosinskiĭ, Springer Series in Soviet Mathematics.
- [27] P. Buser and P. Sarnak. On the period matrix of a Riemann surface of large genus. *Invent. Math.*, 117(1):27–56, 1994. With an appendix by J. H. Conway and N. J. A. Sloane.
- [28] J. Cheeger. Finiteness theorems for Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 92:61–74, 1970.
- [29] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, and D. Tanré. *Lusternik-Schnirelmann category*, volume 103 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [30] C. B. Croke. Rigidity theorems in Riemannian geometry. In *Geometric methods in inverse problems and PDE control*, volume 137 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 47–72. Springer, New York, 2004.

- [31] M. Farber. Topological complexity of motion planning. *Discrete Comput. Geom.*, 29(2):211–221, 2003.
- [32] H. Federer and W. H. Fleming. Normal and integral currents. *Ann. of Math. (2)*, 72:458–520, 1960.
- [33] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, E. Minuz, and J. A. Vilches. Discrete topological complexity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(10):4535–4548, 2018.
- [34] D. Fernández-Ternero, E. Macías-Virgós, and J. A. Vilches. Lusternik-Schnirelmann category of simplicial complexes and finite spaces. *Topology Appl.*, 194:37–50, 2015.
- [35] R. Forman. Morse theory for cell complexes. *Adv. Math.*, 134(1):90–145, 1998.
- [36] R. H. Fox. On the Lusternik-Schnirelmann category. *Ann. of Math. (2)*, 42:333–370, 1941.
- [37] A. A. Gaïfullin. Configuration spaces, bistellar moves, and combinatorial formulas for the first Pontryagin class. *Tr. Mat. Inst. Steklova*, 268(Differential’nye Uravneniya i Topologiya. I):76–93, 2010.
- [38] I. M. Gel’fand and R. D. MacPherson. A combinatorial formula for the Pontrjagin classes. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 26(2):304–309, 1992.
- [39] M. A. Grayson. Shortening embedded curves. *Ann. of Math. (2)*, 129(1):71–111, 1989.
- [40] B. Green, N. A. Scoville, and M. Tsuruga. Estimating the discrete geometric Lusternik-Schnirelmann category. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 45(1):103–116, 2015.
- [41] M. Gromov. Groups of polynomial growth and expanding maps. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 53(1):53–73, 1981.
- [42] M. Gromov. *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, volume 1 of *Textes Mathématiques [Mathematical Texts]*. CEDIC, Paris, 1981. Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.
- [43] M. Gromov. Volume and bounded cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 56:5–99 (1983), 1982.
- [44] M. Gromov. Filling Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 18(1):1–147, 1983.
- [45] M. Gromov. Hyperbolic groups. In *Essays in group theory*, volume 8 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 75–263. Springer, New York, 1987.
- [46] M. Gromov. Systoles and intersystolic inequalities. In *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle (Luminy, 1992)*, volume 1 of *Sémin. Congr.*, pages 291–362. Soc. Math. France, Paris, 1996.
- [47] M. Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, english edition, 2007. Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

- 
- [48] L. Guth. Notes on Gromov's systolic estimate. *Geom. Dedicata*, 123:113–129, 2006.
- [49] L. Guth. Metaphors in systolic geometry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II*, pages 745–768. Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.
- [50] L. Guth. Systolic inequalities and minimal hypersurfaces. *Geom. Funct. Anal.*, 19(6):1688–1692, 2010.
- [51] M. Hachimori. Decompositions of two-dimensional simplicial complexes. *Discrete Math.*, 308(11):2307–2312, 2008.
- [52] A. Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [53] J. J. Hebda. Some lower bounds for the area of surfaces. *Invent. Math.*, 65(3):485–490, 1981/82.
- [54] C. Hog-Angeloni and W. Metzler, editors. *Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory*, volume 197 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [55] J. F. P. Hudson. *Piecewise linear topology*. University of Chicago Lecture Notes prepared with the assistance of J. L. Shaneson and J. Lees. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.
- [56] S. V. Ivanov. Volumes and areas of Lipschitz metrics. *Algebra i Analiz*, 20(3):74–111, 2008.
- [57] S. V. Ivanov and M. G. Katz. Generalized degree and optimal Loewner-type inequalities. *Israel J. Math.*, 141:221–233, 2004.
- [58] M. Jungerman and G. Ringel. Minimal triangulations on orientable surfaces. *Acta Math.*, 145(1-2):121–154, 1980.
- [59] J. Kahn and V. Markovic. Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold. *Ann. of Math. (2)*, 175(3):1127–1190, 2012.
- [60] G. Kalai. Rigidity and the lower bound theorem. I. *Invent. Math.*, 88(1):125–151, 1987.
- [61] M. Karoubi and C. Weibel. On the covering type of a space. *Enseign. Math.*, 62(3-4):457–474, 2016.
- [62] K. U. Katz and M. G. Katz. Bi-Lipschitz approximation by finite-dimensional imbeddings. *Geom. Dedicata*, 150:131–136, 2011.
- [63] K. U. Katz, M. G. Katz, S. Sabourau, S. Shnider, and S. Weinberger. Relative systoles of relative-essential 2-complexes. *Algebr. Geom. Topol.*, 11(1):197–217, 2011.
- [64] M. G. Katz, Y. B. Rudyak, and S. Sabourau. Systoles of 2-complexes, Reeb graph, and Grushko decomposition. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 54936, 30, 2006.
- [65] M. G. Katz and S. Sabourau. Entropy of systolically extremal surfaces and asymptotic bounds. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 25(4):1209–1220, 2005.

- [66] J. M. Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2011.
- [67] L. A. Lusternik and L. G. Schnirelmann. *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*. Hermann, Paris, 1934.
- [68] F. H. Lutz. *Triangulated manifolds with few vertices and vertex-transitive group actions*. Berichte aus der Mathematik. [Reports from Mathematics]. Verlag Shaker, Aachen, 1999. Dissertation, Technischen Universität Berlin, Berlin, 1999.
- [69] F. H. Lutz. Combinatorial 3-manifolds with 10 vertices. *Beiträge Algebra Geom.*, 49(1):97–106, 2008.
- [70] S. V. Matveev. Complexity theory of three-dimensional manifolds. *Acta Appl. Math.*, 19(2):101–130, 1990.
- [71] J. Milnor and W. Thurston. Characteristic numbers of 3-manifolds. *Enseign. Math. (2)*, 23(3-4):249–254, 1977.
- [72] K. Nakamura. On Isosystolic Inequalities for  $T^n$ ,  $RP^n$ , and  $M^3$ . *arXiv e-prints*, page arXiv:1306.1617, Jun 2013.
- [73] P. M. Pu. Some inequalities in certain nonorientable Riemannian manifolds. *Pacific J. Math.*, 2:55–71, 1952.
- [74] J. G. Ratcliffe. The cohomology ring of a one-relator group. In *Contributions to group theory*, volume 33 of *Contemp. Math.*, pages 455–466. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.
- [75] G. Ringel. Wie man die geschlossenen nichtorientierbaren Flächen in möglichst wenig Dreiecke zerlegen kann. *Math. Ann.*, 130:317–326, 1955.
- [76] Y. B. Rudyak and S. Sabourau. Systolic invariants of groups and 2-complexes via Grushko decomposition. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 58(3):777–800, 2008.
- [77] R. Schoen. Estimates for stable minimal surfaces in three-dimensional manifolds. In *Seminar on minimal submanifolds*, volume 103 of *Ann. of Math. Stud.*, pages 111–126. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983.
- [78] P. Scott and C. T. C. Wall. Topological methods in group theory. In *Homological group theory (Proc. Sympos., Durham, 1977)*, volume 36 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 137–203. Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 1979.
- [79] J. R. Stallings. A topological proof of Grushko’s theorem on free products. *Math. Z.*, 90:1–8, 1965.
- [80] R. Thom. Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Comment. Math. Helv.*, 28:17–86, 1954.
- [81] W. Thurston. *Geometry and topology of three-manifolds*, 1978.

- [82] C. T. C. Wall. Finiteness conditions for CW-complexes. *Ann. of Math. (2)*, 81:56–69, 1965.
- [83] A. Weil. Sur les théorèmes de de Rham. *Comment. Math. Helv.*, 26:119–145, 1952.
- [84] G. W. Whitehead. On mappings into group-like spaces. *Comment. Math. Helv.*, 28:320–328, 1954.