1. *Una función* $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *se llama una* norma *en* $\mathbb{R}^n$ *si se cumple que:*

   - $N(v) = 0 \Leftrightarrow v = (0, ..., 0)$.
   - $N(\alpha v) =\mid \alpha \mid N(v)$, *para todo* $v \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   - $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$ *para todo* $v, w \in \mathbb{R}^n$.

   Sean $\| (x_1, ..., x_n) \|_1 := \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid$ y $\| (x_1, ..., x_n) \|_\infty := \max\limits_{1 \leq i \leq n} \mid x_i \mid$.

   Demostrar que las funciones $\| * \|_1$ y $\| * \|_\infty$ son normas.

2. *Una función* $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *se llama una* distancia *en* $\mathbb{R}^n$ *si se cumple:*

   - $d(v, w) = 0 \Leftrightarrow v = w$.
   - $d(v, w) = d(w, v)$, *para todo* $v, w \in \mathbb{R}^n$.
   - $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w)$, *para todo* $v, w, u \in \mathbb{R}^n$.

   Demostrar que si N es una norma en $\mathbb{R}^n$, entonces $d(v, w) := N(v - w)$ es una distancia en $\mathbb{R}^n$.

3. Sean S, T subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Demostrar que valen las siguientes propiedades:

   a) Si $S \subseteq T$, entonces $S^\circ \subseteq T^\circ$.

   b) $(S \cap T)^\circ = S^\circ \cap T^\circ$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una intersección infinita?

   c) $(S \cup T)^\circ \supseteq S^\circ \cup T^\circ$. ¿Vale la igualdad?

   d) $\overline{S \cup T} = \overline{S} \cup \overline{T}$. ¿Se puede generalizar esta igualdad a una unión infinita?

   e) $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. ¿Vale la igualdad?

   f) $(\mathbb{R}^n - S)^\circ = \mathbb{R}^n - \overline{S}$.

4. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Recuérdese que $\partial S = \overline{S} \setminus S^\circ$.

   a) Demostrar que S es abierto si y solo si es disjunto con ∂S.

   b) Demostrar que S es cerrado si y solo si $\partial S \subset S$.

5. Hallar los puntos de acumulación del conjunto $S = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right), \text{con } n, m \in \mathbb{N} \right\}$. Hallar la adherencia $\overline{S}$.

6. Hallar todos los subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ que son a la vez abiertos y cerrados.

7. Probar que dos intevalos abiertos cualesquiera de $\mathbb{R}$ son homeomorfos (dos subconjuntos X e Y de $\mathbb{R}$ son homeomorfos si existe una función continua y biyectiva $h\colon X \to Y$, con inversa continua).

8. Sea $\|\cdot\|$ una norma en $\mathbb{R}^n$. Probar que si $\|\cdot\|$ proviene de un producto interno y $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a \neq b$, $\|a\| = \|b\| = r$, entonces $\|ta + (1-t)b\| < r$ para todo $t \in (0,1)$. Probar que no es necesariamente cierto si la norma no proviene de un producto interno.

9. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo no vacío. Fijado $p \in \mathbb{R}^n$ consideramos la función $f\colon C \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x - p\|$.

   a) Probar que si $\|\cdot\|$ proviene de un producto interno entonces existe a lo sumo un punto $a \in C$ tal que $f(a) = \operatorname{ínf}\{f(x), x \in C\}$.

   b) Probar que si C es cerrado existe tal a.

   c) Mostrar que el primer ítem no es necesariamente cierto si la norma no proviene de un producto interno.

10. Sea d una distancia en $\mathbb{R}^n$.

   a) Pruebe que d es la distancia asociada a una norma si y solo si valen las siguientes propiedades:

      1) $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ (d es invariante por traslaciones),

      2) $d(kx, ky) = |k| d(x,y)$ para todo $k \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ (d es homogénea).

   b) Pruebe que dicha norma es única y que si viene dada por un producto interno entonces vale la siguiente propiedad: para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2.$$